



# Interaction fluide-structure pour des configurations multi-corps. Applications aux liaisons complexes, lois de commande d'actionneur et systèmes souples dans le domaine maritime.

Camille Yvin

## ► To cite this version:

Camille Yvin. Interaction fluide-structure pour des configurations multi-corps. Applications aux liaisons complexes, lois de commande d'actionneur et systèmes souples dans le domaine maritime. . Mécanique des fluides [physics.class-ph]. ULAM /Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2014. Français. NNT: . tel-01202821

**HAL Id: tel-01202821**

**<https://hal.science/tel-01202821>**

Submitted on 21 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Camille YVIN

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Ecole Centrale de Nantes  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : SPIGA

Discipline : Dynamique des fluides et des transferts  
Unité de recherche : LHEEA/DSPM

Soutenue le 15 décembre 2014

## Interaction fluide-structure pour des configurations multi-corps. Applications aux liaisons complexes, lois de commande d'actionneur et systèmes souples dans le domaine maritime.

### JURY

Président :	<b>Frédéric DIAS</b> , Professeur, University College Dublin
Rapporteurs :	<b>Frédéric DIAS</b> , Professeur, University College Dublin <b>Bettar Ould EL MOCTAR</b> , Professeur, University of Duisburg-Essen
Examineurs :	<b>Alban LEROYER</b> , Maître de Conférences, École Centrale de Nantes <b>Kostia RONCIN</b> , Enseignant Chercheur, ENSTA Bretagne <b>Laurent STAINIER</b> , Professeur des Universités, École Centrale de Nantes <b>Michel VISONNEAU</b> , Directeur de Recherche CNRS, École Centrale de Nantes
Invités :	<b>Jean-Jacques MAISONNEUVE</b> , Ingénieur de Recherche, DCNS Research/SIREHNA <b>Jean-François SIGRIST</b> , Ingénieur de Recherche HDR, DCNS Research
Directeur de Thèse :	<b>Michel VISONNEAU</b> , Directeur de Recherche CNRS, École Centrale de Nantes









# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Alain Clément, directeur du Laboratoire en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA), pour m'avoir accueilli.

Je remercie Monsieur Frédéric Dias, Professeur à la « University College Dublin », d'avoir accepté d'être le président de mon jury et rapporteur de ce manuscrit. Mes remerciements vont également à Monsieur Bettar Ould El Moctar, Professeur à la « University of Duisburg-Essen », pour avoir accepté d'être rapporteur. Leurs commentaires ont été particulièrement précis et constructifs en dépit de la longueur de ce manuscrit.

Je remercie Monsieur Laurent Stainier, Professeur des Universités à l'École Centrale de Nantes, d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Mes remerciements vont également à Monsieur Kostia Roncin, Enseignant Chercheur à l'ENSTA Bretagne, pour m'avoir suivi par le biais du CST et pour sa participation au jury.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-François Sigrist, Ingénieur de Recherche HDR à DCNS Research, pour avoir participé au jury et pour m'avoir suivi depuis ma sortie d'école d'ingénieurs.

Je remercie sincèrement la direction de DCNS Research/SIREHNA pour son soutien et pour m'avoir accordé la possibilité de réaliser ce projet personnel.

Puis, il y a les personnes sans qui cette thèse n'aurait pas été une aussi belle réussite. C'est réellement une chance qui m'a été offerte de pouvoir travailler avec eux et je reste persuadé que c'est leur investissement, leur enthousiasme et leur complémentarité scientifique qui m'ont permis d'apprécier pleinement ces trois années et d'être là où j'en suis actuellement.

C'est donc tout naturellement que je remercie mon directeur de thèse, Michel Visonneau, Directeur de Recherche CNRS, pour ses commentaires et conseils avisés ainsi que Jean-Jacques Maisonneuve, chef de l'équipe Modélisation et Simulation en Hydrodynamique à DCNS Research/SIREHNA pour son soutien. Merci à tous les deux de m'avoir fait confiance et d'avoir porté ce projet avec succès.

Quelle tâche difficile que de remercier correctement celui avec qui j'ai eu autant de plaisir à travailler au jour le jour. Ces quelques mots ne suffiront certainement pas mais, Alban, sache que grâce à tes grandes qualités scientifiques, humaines et ton infaillible optimisme, je n'ai (presque) jamais douté de la réussite de cette aventure.

Je remercie également chaleureusement l'ensemble de l'équipe DSPM : Patrick Queutey, Emmanuel Guilmineau, Jeroen Wackers et Gan bo Deng. Tous ont su répondre à mes interrogations. Grâce à eux j'ai pu entrevoir le monde de la recherche et j'ai réellement apprécié les moments passés ensemble.

Je remercie l'équipe MSH de DCNS Research/SIREHNA pour m'avoir accompagné le temps de cette thèse. J'espère qu'ils me supporteront durant les prochaines années.

Je pense aux petites mains de l'ombre qui rendent plus facile la vie de thésard : merci à Elodie Chahbani, Anne Lagatu, Françoise Maupas, Audrey Pavageau et Virginie Faurie.

Je remercie également mes compagnons « thésards » et amis même si ils ont eu plutôt tendance à m'écarter du droit chemin : Kostas pour son accent à la grecque et ses cocktails, Yoann pour son côté pointilleux vraiment drôle et Patrick pour ses projets fous mais tellement tentants. A vous trois, bonne chance pour la suite !

Ils ne s'en doutent peut être pas mais, mes amis, d'ici ou d'ailleurs, m'ont également permis de relâcher la pression quand il le fallait. Je garde en souvenir des sorties, des repas, des jeux et des fous rires mémorables avec chacun d'entre eux. Merci.

Lors de la rédaction de ce rapport, une ancienne rebelle n'ayant pour unique diplôme que le brevet des collèges m'a corrigé ! Merci à elle.

Mes derniers remerciements vont aux personnes qui me sont les plus chères : mes parents et mes frères. Bien entendu, j'ai gardé le meilleur pour la fin. Flora, nos dix premières années ensemble ne sont qu'un début.

Camille Yvin

*« La mer est le vaste réservoir de la nature. C'est par la mer que le globe a pour ainsi dire commencé, et qui sait s'il ne finira pas par elle ! Là est la suprême tranquillité. La mer n'appartient pas aux despotes. À sa surface, ils peuvent encore exercer des droits iniques, s'y battre, s'y dévorer, y transporter toutes les horreurs terrestres. Mais à trente pieds au-dessous de son niveau, leur pouvoir cesse, leur influence s'éteint, leur puissance disparaît ! Ah ! monsieur, vivez, vivez au sein des mers ! Là seulement est l'indépendance ! Là je ne connais pas de maîtres ! Là je suis libre ! »*

Jules Verne  
Vingt mille lieues sous les mers



# Sommaire

<b>A</b>	<b>Problématique</b>	<b>1</b>
A.1	L'architecture navale et l'hydrodynamique . . . . .	2
A.2	Histoire de l'hydrodynamique . . . . .	12
A.3	Présentation et analyse du sujet . . . . .	18
A.4	La simulation collaborative . . . . .	21
<b>B</b>	<b>Résolution du problème fluide</b>	<b>25</b>
B.1	Le problème fluide en équations . . . . .	27
B.2	Résolution numérique . . . . .	40
<b>C</b>	<b>Résolution du problème solide</b>	<b>73</b>
C.1	Le problème de la mécanique du solide en équation . . . . .	75
C.2	Résolution numérique . . . . .	88
<b>D</b>	<b>Le couplage fluide-structure</b>	<b>109</b>
D.1	Introduction . . . . .	112
D.2	Le problème fluide-structure en équations . . . . .	113
D.3	Les algorithmes de couplage fluide-structure . . . . .	116
D.4	Cas particulier des poutres . . . . .	131
D.5	Le problème de la masse ajoutée . . . . .	141
D.6	Résumé . . . . .	184
<b>E</b>	<b>Applications</b>	<b>187</b>
E.1	Premières applications . . . . .	189
E.2	Une barge parallélépipédique . . . . .	190
E.3	Une frégate soumise à une houle de face . . . . .	211
E.4	Des parallélépipèdes de faible densité . . . . .	238
E.5	Amortissement d'une frégate par ailerons actifs . . . . .	270
E.6	Un navire amarré dans un canal . . . . .	290
E.7	Deux simulations avec des poutres flexibles . . . . .	302
<b>F</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>311</b>
<b>G</b>	<b>Annexes</b>	<b>315</b>
	Liste des figures	412
	Liste des tableaux	419
	Liste des algorithmes	421
	Table des matières	422
	Bibliographie	427





# Introduction

Ce travail est réalisé dans le cadre d'une thèse CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche). Il résulte du partenariat entre le Laboratoire en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA) de l'École Centrale de Nantes (ECN) et DCNS Research/SIREHNA.

De nos jours, le besoin d'innover en architecture navale se fait fortement ressentir pour plusieurs raisons. L'innovation est primordiale pour une entreprise souhaitant rester compétitive. Ceci est d'autant plus vrai à l'heure où les échanges économiques se font de plus en plus à l'échelle mondiale. En complément, elle permet à l'entreprise de s'affirmer dans le paysage industriel et d'élargir son offre de produits et/ou de services.

L'innovation est également engendrée par l'apparition de nouvelles considérations d'ordre pratique, économique ou écologique. Par exemple, les industriels cherchent à réduire la consommation des navires afin de réaliser de substantielles économies. Cet objectif peut être atteint par une optimisation des formes de la carène, des hélices ou des appendices, l'ajout de systèmes hydrodynamiques de récupération d'énergie ou l'élaboration de nouveaux concepts (biomimétisme, carènes déformables, etc.).

Le secteur des énergies marines renouvelables connaît un développement considérable depuis quelques années. Que ce soit pour récupérer l'énergie des courants (turbines sous-marines ou autres systèmes), l'énergie de la houle (systèmes houlomoteurs), l'énergie du vent (éoliennes offshore) ou pour exploiter le différentiel de température entre les eaux de surface et les eaux de profondeur (énergie thermique des mers), il reste des marges de progression importantes pour tirer pleinement profit de ces différentes ressources ; que ce soit en améliorant les systèmes existants ou en inventant d'autres. L'innovation va donc jouer un rôle majeur dans ce secteur durant les prochaines années.

Elle peut aussi servir à diminuer les délais et les coûts de développement. En hydrodynamique navale, un navire ou tout autre système naval (hélice, sous-marin, système d'exploitation des énergies marines, etc.) peut être testé à une plus petite échelle (échelle d'une maquette) dans un bassin d'essais, pour déterminer et/ou vérifier ses performances hydrodynamiques avant sa production. Néanmoins, ces tests expérimentaux restent réservés à des projets de grande envergure, du fait de leurs durées de réalisation et de leurs coûts et sont sujets à des effets d'échelles introduisant des incertitudes au moment de l'extrapolation des résultats à l'échelle réelle. De nos jours, certains solveurs numériques offrent la possibilité d'étudier plus rapidement et à moindre coût une partie des problématiques traitées jusqu'à présent au sein de ces bassins. En outre, les études numériques permettent d'accéder à un très grand nombre d'informations locales difficiles à mesurer lors d'essais expérimentaux (vitesse du fluide, pression, etc.). Ces informations peuvent être utilisées pour évaluer finement certains phénomènes et ainsi optimiser les caractéristiques du système étudié.

Dans le domaine de l'hydrodynamique navale, l'étude d'un système mécanique complexe par des outils numériques se réalise très souvent de manière découplée. Dans la majorité des cas, l'objectif final est de connaître le comportement hydromécanique lorsqu'il est en fonctionnement. Pour un système de récupération d'énergie de la houle, la connaissance de son comportement dynamique va permettre d'évaluer l'énergie exploitable. En ce qui concerne un navire amarré, il est nécessaire de vérifier qu'il ne s'éloigne pas trop de sa position initiale pour des raisons de sécurité. S'il s'agit d'un navire équipé de systèmes de stabilisation actifs, il est primordial d'évaluer l'efficacité de ces systèmes en conditions réelles afin de les piloter efficacement. En vue de répondre à ces quelques exemples de problématique, une étude est classiquement divisée en deux parties. Dans un premier temps, les différents efforts (dont les efforts hydrodynamiques) s'exerçant sur ce système mécanique sont modélisés. Ces modèles comportent différentes inconnues évaluées par des méthodes expérimentales, numériques, statistiques, etc. Le comportement dynamique du système mécanique est résolu dans un second temps, une fois la totalité des inconnues déterminée. Cette approche ne permet pas de prendre en compte de manière précise des chargements hydrodynamiques complexes et les potentiels couplages forts entre le comportement du système mécanique et la réponse du milieu fluide.

L'objectif de ce travail de thèse est de développer et de valider un outil numérique capable de modéliser le comportement hydromécanique de systèmes mécaniques complexes en prenant en compte, de manière exacte, les chargements hydrodynamiques et les différents couplages avec le milieu fluide. Cet outil doit permettre à DCNS Research/SIREHNA d'étudier précisément le comportement hydromécanique de systèmes mécaniques complexes. L'objectif principal est une amélioration significative de ses outils de modélisation pour ses besoins propres (modélisation fine du comportement des systèmes développés au sein du groupe : navires, énergies marines renouvelables, systèmes embarqués) ou pour des études réalisées pour des clients aux exigences croissantes en matière de complexité des problèmes à traiter et de qualité des résultats.

Du fait de la nature du milieu fluide et des systèmes mécaniques envisagés, deux solveurs sont utilisés simultanément (simulation collaborative) : le solveur ISIS-CFD pour résoudre le problème fluide et le solveur MBDyn pour résoudre le problème mécanique. Le premier est développé au sein de l'équipe DSPM (Dynamique des Systèmes Propulsifs Marins) du laboratoire LHEEA de l'ECN. Il est dédié à la résolution des équations de Navier-Stokes exprimées en moyenne de Reynolds pour un écoulement incompressible, isotherme, turbulent et diphasique. Le second est, quant à lui, développé au Département d'Ingénierie Aérospatiale de l'Université Polytechnique de Milan. C'est un code d'analyse pluridisciplinaire des systèmes multi-corps.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres. Au début de chaque chapitre, un paragraphe descriptif est proposé. Par conséquent, seuls les thèmes généraux sont brièvement introduits ici. Le premier chapitre présente le contexte et la problématique de ce travail. Les deuxième et troisième chapitres décrivent les problématiques et les méthodes de résolution des problèmes élémentaires fluide et mécanique. La méthode de couplage entre ces deux problèmes est développée au sein du quatrième chapitre. Enfin, le dernier chapitre présente les différentes applications ayant servi à analyser et à valider la méthode de couplage mise en place.





# Problématique

Ce chapitre introduit de manière générale la problématique de ce travail de thèse. Dans un premier temps, une brève approche historique du domaine de l'architecture navale et de l'hydrodynamique est réalisée afin d'appréhender le contexte de la thèse.

L'analyse du sujet est présentée dans un second temps. Elle a pour but d'introduire une réflexion sur la méthodologie employée afin de répondre au problème posé. Finalement, une description du contexte des développements informatiques réalisés au cours de ce travail de thèse est proposée par le biais de la description de la simulation coopérative.

## Contenu

<b>A.1</b>	<b>L'architecture navale et l'hydrodynamique</b>	<b>2</b>
A.1.1	Du commencement au XVIII <sup>e</sup> siècle	2
A.1.2	Du XIX <sup>e</sup> siècle à nos jours	4
<b>A.2</b>	<b>Histoire de l'hydrodynamique</b>	<b>12</b>
A.2.1	Découverte des premières équations	12
A.2.2	Une nouvelle étape dans la mécanique des fluides	14
<b>A.3</b>	<b>Présentation et analyse du sujet</b>	<b>18</b>
<b>A.4</b>	<b>La simulation collaborative</b>	<b>21</b>

### A.1 L'architecture navale et l'hydrodynamique

L'architecture navale possède une très longue histoire qu'il est difficile de résumer en quelques lignes. Cette section a pour objectif de présenter certaines des avancées majeures en adoptant un point de vue historique. Les informations proviennent principalement de [Presles et Paulet, 2005] <sup>1</sup> lorsque la source n'est pas explicitement citée. Quelques moments clés de la construction navale sont présentés de manière chronologique dans deux sections représentant deux époques bien distinctes. Pendant la première époque, c.-à-d. jusqu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, l'architecture navale s'appuie peu sur le calcul scientifique. Au-delà de cette période, le calcul scientifique va être de plus en plus utilisé au fil des découvertes techniques et scientifiques.

Ces deux premières sections se focalisent principalement sur les grandes avancées scientifiques concernant la statique, la stabilité, la structure et la construction d'un navire. Ils abordent également l'apparition des sociétés de classification <sup>2</sup> et des bassins d'essais <sup>3</sup>. Ces deux parties d'introduction n'ont pas de lien direct avec ce travail de thèse. Cependant, elles sont utiles pour l'appréhension du contexte industriel et la compréhension des objectifs.

L'hydrodynamique, ici appliquée au domaine de l'architecture navale, est un point à part, du fait de sa complexité mais également de son importance dans l'élaboration d'un navire. Base de ce travail de thèse, une section particulière lui est consacrée (cf. section A.2 p. 12). Elle présente l'historique des différentes avancées scientifiques qui ont conduit aux équations de la mécanique des fluides sous la forme qu'on leur connaît actuellement.

#### A.1.1 Du commencement au XVIII<sup>e</sup> siècle

La découverte d'embarcations maritimes datant de la préhistoire [Bonnin, 1998] montre que les humains se sont tout de suite intéressés au milieu maritime afin d'en exploiter les innombrables possibilités : nourriture, transport de personnes ou de marchandises (commerce), conquête de territoires, etc.

Jusqu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, l'architecture navale se développe petit à petit grâce aux retours d'expérience et aux rencontres entre les différentes civilisations. Il est réellement surprenant de voir que peu de calcul n'est réalisé avant la construction et que c'est surtout le « savoir-faire » qui permet de construire de remarquables navires.

Certains navires marquent particulièrement leur époque du fait de leurs caractéristiques. C'est le cas d'un des premiers grands navires connus : la « nef royale de Chéops », ou « barque solaire » (cf. figure A.1.1.a page suivante). Elle est datée de 3000 à 2500 av J.C. environ. Il est également possible de rapidement citer : les pirogues à balancier des austronésiens, les jonques des chinois (cf. figure A.1.1.b page suivante) qui seraient apparues en 3000 av J.C., les premières trirèmes des grecs (cf. figure A.1.1.c page suivante) datées, quant à elles, du VII<sup>e</sup> siècle av J.C., les drakkars des vikings (cf. figure A.1.1.d page suivante) apparus au cours du I<sup>e</sup> siècle et les caravelles portugaises (cf. figure A.1.1.e page suivante) dont la naissance a eu lieu pendant le XV<sup>e</sup> siècle. Bien sûr, il en existe bien d'autres. Par exemple, en occident, vers la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, ce sont les navires à trois mâts communément appelés « vaisseaux » (cf. figure A.1.1.f page suivante) qui dominent les mers [Vila, 2012].

Du point de vue scientifique, quelques avancées méritent également d'être soulignées. C'est au grec Archimède de Syracuse (287 av J.C.-212 av J.C.) et ses célèbres traités [Archimède, a], [Archimède, b] que l'on doit les premiers travaux scientifiques qui seront, bien plus tard, appliqués à l'architecture navale [Legendre, 1891]. Il y expose les bases de l'hydrostatique ainsi que l'étude de la stabilité <sup>4</sup> des objets de forme simple (première définition du métacentre) car le calcul sur une géométrie complète était trop difficile avec les outils mathématiques de l'époque. La paternité de la vis qui porte son nom lui est également attribuée. Cette dernière inspirera notamment la future hélice marine.

---

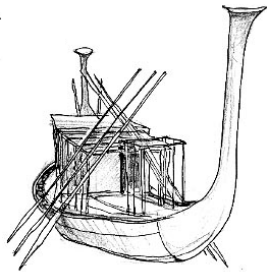
1. La lecture de cet ouvrage peut être recommandée à tous ceux souhaitant avoir une première vision de l'architecture navale. Il réussit l'exercice difficile de s'adresser autant à des spécialistes qu'à des non-initiés.

2. Les sociétés de classification ont « pour objectif de fournir aux assureurs toutes les informations requises pour leur permettre d'évaluer le niveau de fiabilité des navires et de leurs équipements, ainsi que d'assurer la protection des biens et des personnes. » [Presles et Paulet, 2005]. Ce sont des organismes indépendants fournissant des règles de bonne conception. Ces règles sont souvent utilisées par les architectes lors des différentes étapes de conception.

3. En architecture navale, les bassins d'essais permettent de réaliser des expériences à l'échelle modèle afin de tester et valider la forme des carènes, hélices, etc. Les résultats ainsi obtenus servent également à valider les outils numériques.

4. La stabilité d'un navire caractérise sa capacité à retourner à sa position d'équilibre après une perturbation. De façon simplifiée, elle caractérise sa capacité à ne pas chavirer.

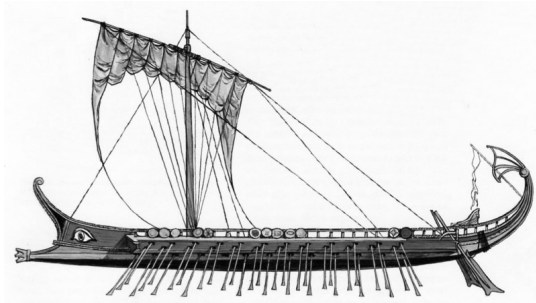
Il faut attendre le siècle des Lumières pour voir apparaître les premiers calculs scientifiques appliqués concrètement à l'architecture navale : « *C'est ainsi que jusqu'en 1720, les calculs aussi importants que le volume de carène, le poids et la stabilité du navire, les tirants d'eau... sont totalement ignorés. Lors de la mise à l'eau et surtout de l'armement, les mauvaises surprises ne sont alors pas exceptionnelles.* » [Boudriot, 1988]. L'exemple le plus marquant est certainement le naufrage du trois-mâts royal suédois « Le Vasa » en 1628 après avoir parcouru moins de 2 km lors de son voyage inaugural. Sa très faible stabilité explique ce naufrage mais les architectes de l'époque n'ont pu l'expliquer.



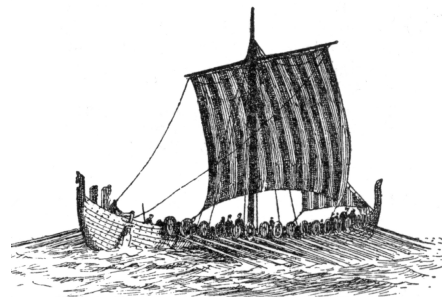
a : Nef royale de Chéops



b : Jonque chinoise



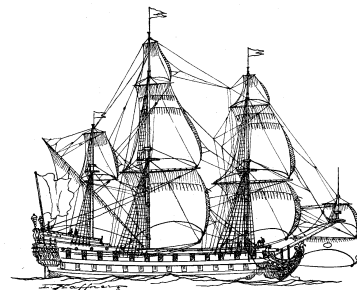
c : Trirème



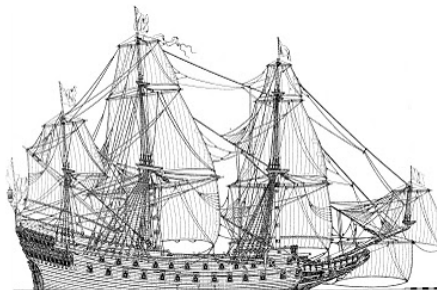
d : Drakkar



e : Caravelle



f : Vaisseau – Le phenix



g : Le Vasa

Figure A.1.1 : Quelques navires remarquables

En 1711, l'anglais William Sutherland (1685-1740) publie un ouvrage d'architecture navale fortement répandu en Angleterre [Sutherland, 1711]. En 1740, le mathématicien français Pierre Bouguer (1698-1758) publie le premier grand ouvrage scientifique sur l'architecture navale en France [Bouguer, 1740]. Il y expose la première théorie correcte du métacentre (dont la formule qui porte son nom, formule qui permet de caractériser la stabilité



des navires) et expose des méthodes permettant d'évaluer le centre de carène ainsi que le centre de gravité du navire. Les premières considérations sur l'écoulement des fluides (eau sur la coque, air dans les voiles) y sont également présentées. Cependant, elles restent très qualitatives. La naissance de l'hydrodynamique peu de temps après va fournir le point de départ théorique qui est toujours utilisé à l'heure actuelle (cf. section A.2 p. 12).

En 1743, l'anglais Thomas Simpson (1710-1761) publie un ouvrage dans lequel il décrit une méthode permettant de calculer des surfaces à partir des courbes la limitant [Simpson, 1743]. Cette méthode sera utilisée par la suite pour le calcul des volumes. En 1758, le français Henri-Louis Duhamel du Monceau (1700-1782) publie également une œuvre de vulgarisation sur l'architecture navale qui a beaucoup de succès [Duhamel, 1758].

### A.1.2 Du XIX<sup>e</sup> siècle à nos jours

S'appuyant sur les premiers calculs scientifiques et quelques grandes découvertes, le XIX<sup>e</sup> siècle voit apparaître de nombreux changements en architecture navale : les premiers bateaux à vapeur, les premiers bateaux à hélice et l'utilisation de l'acier pour la carène (en totalité ou en partie) en sont des exemples. Ci-dessous, quelques étapes importantes sont présentées.

L'invention de la machine à vapeur et du premier bateau à vapeur résulte de nombreux travaux dont certains ont eu lieu bien avant le XIX<sup>e</sup> siècle. En ce qui concerne la machine à vapeur, il est possible de citer le français Denis Papin (1647-1712) pour un des premiers dessins d'une machine à vapeur et l'invention du moteur à pistons en 1679 ainsi que l'anglais Thomas Newcomen (1664-1729) pour une première réalisation industrielle en 1712. Il faut attendre l'écossais James Watt (1736-1819) pour voir une augmentation significative de la puissance fournie. Il apporte de nombreuses améliorations, dont la plus importante est l'utilisation de vapeur sous pression. Ses principaux travaux ont lieu entre 1769 et 1784 et c'est lors de cette dernière année qu'il dépose un brevet pour une locomotive à vapeur. Deux bateaux sont en concurrence pour le titre du premier bateau à vapeur. En 1803, le « Charlotte Dundas » (cf. figure A.1.2) construit par l'écossais William Symington (1764-1831) arrive à remorquer deux barges de 70 tonnes malgré un vent contraire. En dépit de ce succès, il est laissé à l'abandon peu de temps après. En 1806, l'américain Robert Fulton (1765-1815) construit le premier prototype de bateau à vapeur véritablement fonctionnel après quelques échecs et demi-succès. En effet, le « le Clermont » (cf. figure A.1.3) a été utilisé commercialement pendant plus de 10 ans. Sa propulsion est effectuée par une roue à aubes qui est bien adaptée à la lenteur du moteur à vapeur. Rapidement, après le succès du « Clermont », de nombreux bateaux à vapeur seront construits. Par exemple, en 1819, le navire américain « Savannah » est le premier transatlantique qui allie la voile à une machine à vapeur. En 1821, l'« Aaron Manby », premier bateau à vapeur métallique, est construit en Angleterre pour servir sur la Seine.

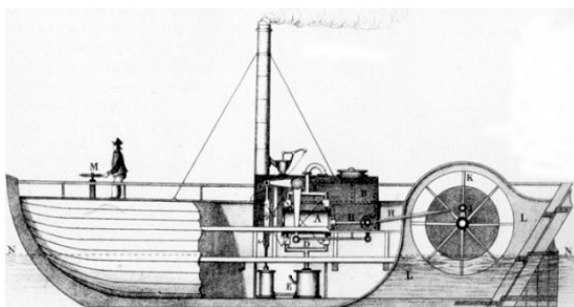


Figure A.1.2 : Le Charlotte Dundas

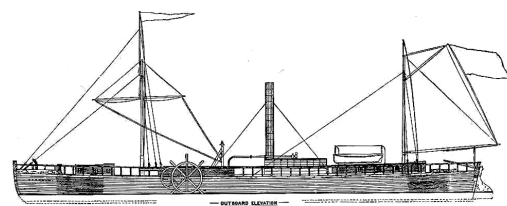


Figure A.1.3 : Le Clermont

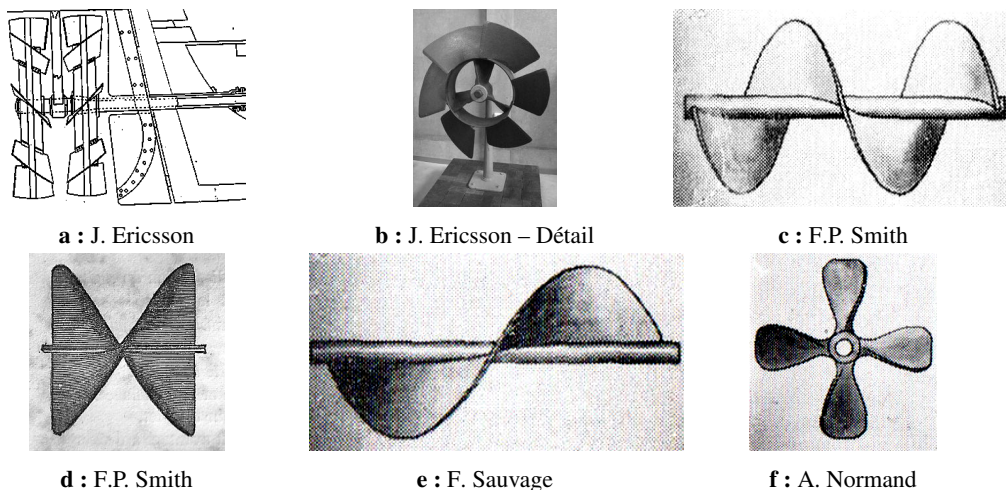
D'un point de vue administratif, c'est en 1764 qu'est créé le premier document officiel classifiant quelques navires anglais : le « Register of Ships ». Mais c'est en Belgique, et plus particulièrement à Anvers, que le Bureau Veritas voit le jour en 1828, ce qui initie la création officielle des futures sociétés de classification. Peu de temps après, en 1834, le « Register of Ships » devient l'organisme anglais dénommé « Lloyd's Register of British and Foreign Shipping ». Il publie le premier règlement pour la surveillance et la classification des navires la même année. De nos jours, les sociétés de classification réglementent les caractéristiques des navires relatives à la sécurité : stabilité, tenue à la mer<sup>5</sup> et manœuvrabilité<sup>6</sup> en sont des exemples.

5. La tenue à la mer est l'étude du comportement d'un navire ou d'une plateforme mobile subissant les effets de la houle.

6. La manœuvrabilité d'un navire est sa capacité à se déplacer sur un plan d'eau calme. Le navire doit pouvoir effectuer des manœuvres réglementaires pour être autorisé à naviguer.

La généralisation du bateau à vapeur crée un besoin industriel important qui va aboutir à la création de l'hélice marine sous la forme qu'on lui connaît actuellement. Cependant, « *la paternité de l'hélice marine est, comme toutes les inventions d'un objet aussi courant utilisé depuis plus d'un siècle, très controversée et sans doute indécidable. C'est le résultat d'une longue suite historique d'idées dont le recensement n'est jamais exhaustif.* » [Laurens, 2010]. Dans [Paris, 1855], une liste des essais réalisés, brevets déposés et théories développées au cours de cette naissance si particulière est réalisée. Les premiers embryons d'idées de l'hélice sont apparus très tôt comme l'attestent la vis d'Archimède et les fameux dessins de Léonard de Vinci. Il faut attendre la fin des années 1830 pour commencer à voir les premiers résultats concluant en architecture navale et plus précisément son « adoption définitive entre 1840 et 1850 » [Augustin-Normand, 1964].

Cependant, plusieurs travaux méritent d'être cités. Ceux de l'américain d'origine suédoise John Ericsson (1803-1889) en sont des exemples. Dès 1836, il dépose un brevet en Angleterre de roues contra-rotatives (cf. figures A.1.4.a et A.1.4.b) dont chacune ressemble fortement à celles dessinées par Bernoulli en 1752 [Carlton, 2007] pour le prix de l'Académie française ayant pour objectif de « mouvoir les navires sans la force du vent ». Cependant, il les place derrière le safran ce qui réduit à la fois la manœuvrabilité du navire mais également l'efficacité propulsive. Son idée ne rencontre pas le succès escompté. Il se rend par la suite aux États-Unis où il dessine la première hélice des navires de la « US Navy » en 1843. Toujours en Angleterre et pendant cette même année de 1836, Francis Petit Smith (1808-1874) dépose plusieurs brevets d'hélices à plusieurs spires (cf. figure A.1.4.c) s'inspirant de la vis d'Archimède. Cette fois, le succès est au rendez-vous. Cependant, lors des essais, la vitesse du navire se voit augmentée dès lors qu'une des spires se casse. F.P. Smith analyse cet événement et dessine, par conséquent, une vis à une seule spire (cf. figure A.1.4.d) qu'il place au niveau de la quille du steamer « SS Archimedes » (cf. figure A.1.5 page suivante) qui est terminé en 1839.



**Figure A.1.4 :** Quelques modèles d'hélice

En France, il est souvent dit que c'est le français Frédéric Sauvage (1786-1857) qui est le premier à déposer un brevet pour une hélice à une seule spire (cf. figure A.1.4.e), brevet qu'il obtint officiellement en 1832. Cependant, il se ruine financièrement en essayant de convaincre les pouvoirs officiels. Par la suite, il abandonne gratuitement son invention à l'architecte naval français Augustin Normand (1792-1871) qui l'applique, après quelques modifications, au « Napoléon » (cf. figure A.1.6 page suivante) en 1843. Les modifications qu'il apporte sont très importantes puisque, en analysant mieux que quiconque l'accident survenu lors des essais des hélices de F.P. Smith, il a l'idée des hélices dites à pales (cf. figure A.1.4.f). Les hélices à pales représentent la majorité des hélices marines utilisées à l'heure actuelle. Il n'en reste pas moins que F. Sauvage réclame publiquement la paternité de son invention sans toutefois l'obtenir réellement [Tissandier, 1881]. Le « SS Archimedes » et le « Napoléon » marquent l'adoption de l'hélice dans leurs marines respectives même si les navires restent équipés de voiles pour limiter leur très grande consommation de charbon.

Dès l'apparition de l'hélice, les architectes et ingénieurs navals essayent de prévoir les caractéristiques du propulseur (poussée et trainée) en fonction de sa géométrie et quelques tentatives d'explication sont proposées. La première peut être attribuée au professeur Auguste Taurines en 1842 [Taurines, 1842]. Devant la grande complexité théorique, ce sont surtout des essais expérimentaux qui sont menés. Une petite liste des premiers essais expérimentaux est présente dans [Augustin-Normand, 1964] mais il faut également préciser que l'hélice du « Napoléon » fut choisie parmi un petit nombre d'essais réalisés à plus petite échelle [Carlton, 2007].

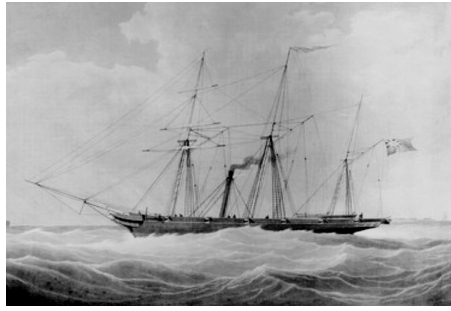


Figure A.1.5 : Le steamer SS Archimedes

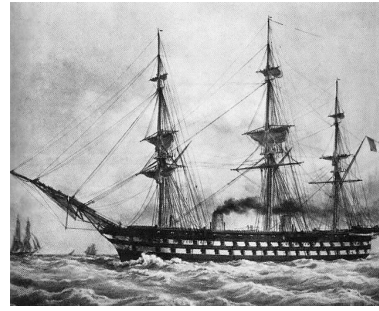


Figure A.1.6 : Le Napoléon

Ces premiers essais expérimentaux ne s'appuient pas sur une théorie scientifique éprouvée et donc, l'interpolation à l'échelle réelle des résultats à l'échelle maquette est très perfectible. Il faut attendre les travaux de l'anglais William Froude (1810-1879) et plus précisément sa méthode de décomposition de la résistance à l'avancement d'un navire<sup>7</sup> pour voir apparaître une méthode scientifiquement acceptable. Les travaux de l'irlandais Osborne Reynolds (1842-1912) complètent de manière indirecte les travaux de W. Froude en 1883.

Dans le domaine de la propulsion, l'invention du moteur à combustion interne en 1892 par l'allemand Rudolph Diesel (1858-1931) va de nouveau marquer un changement important dans l'architecture des bateaux à moteur. En effet, l'encombrement, le poids du moteur, le rendement et le prix du carburant sont à l'avantage du moteur diesel par rapport à la machine à vapeur. En 1903, la péniche le « Petit Pierre » est le premier navire équipé d'un moteur diesel [Althuser et Naegel, 2008].

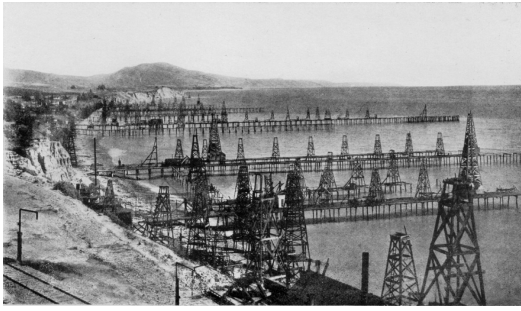
Le XX<sup>e</sup> siècle utilise et perfectionne les avancées réalisées au XIX<sup>e</sup> siècle. Il « *est le temps des paquebots transatlantiques ou liners, des grands yachts à voile et à moteur, de la vitesse motonautique, des cargos géants (pétroliers, portes-conteneurs, etc.), sous-marins, navires à propulsion nucléaire, navires rapides, voiliers modernes...* » [Presles et Paulet, 2005]. Le lecteur intéressé pourra se référer au précédent ouvrage pour les grandes avancées concernant les bateaux à voiles ou à moteurs. Il faut cependant préciser que durant cette période, ce sont les différentes éditions et révisions du « *Principle of Naval Architecture* » [Rossell *et al.*, 1939] publiées par « *The Society of Naval Architects and Marine Engineers* » (États-Unis d'Amérique) qui regroupent les avancées en matière de connaissances scientifiques et qui font référence.

Pendant le XX<sup>e</sup> siècle, l'architecture navale va également s'ouvrir à un domaine très particulier qu'est la conception et la construction de plateformes fixes ou mobiles pour l'extraction du pétrole ou du gaz en haute mer (plateforme « offshore »). Les problématiques sont souvent différentes des navires de surface car l'activité première n'est plus de se déplacer en milieu marin, mais au contraire, de rester au même endroit en résistant aux éléments naturels (houle, vent, tempêtes, tremblements de terre). Les études hydrodynamiques ont donc pour objectif d'étudier principalement les efforts subis par la plateforme ou sa tenue à la mer lorsqu'elle est au point fixe.

Au commencement, les premières plateformes pétrolières étaient uniquement des puits de pétrole reliés à la terre par diverses installations (cf. figures A.1.7.a, A.1.7.b et A.1.7.c page suivante). La première plateforme pétrolière perforant le fond marin et mettant en place la tête de puits en haute mer est développée en 1947 par l'entreprise Kerr-McGee pour une installation en Louisiane dans le golfe du Mexique (cf. figure A.1.7.d page suivante).

L'exploitation des champs pétroliers en haute mer, et d'autant plus en grande profondeur, n'est rentable qu'à partir du premier choc pétrolier qui a lieu en 1973. En haute mer, deux grands concepts généraux sont utilisés selon la profondeur. Jusqu'à 400 m, la plateforme peut s'appuyer sur le fond marin (plateforme de type « *jacket* ») mais au-delà, le prix de la structure (structure métallique (cf. figures A.1.8.a et A.1.8.b page suivante) ou en béton (cf. figures A.1.8.c et A.1.8.d page suivante)) est trop important et l'utilisation d'une ou plusieurs plateformes flottantes devient préférable. Dans ce dernier cas, l'acheminement du pétrole est réalisé par des flexibles (« *risers* ») et la forme et l'ancrage de la plateforme sont adaptées selon les situations. Les plateformes pétrolières peuvent être accompagnées d'un FPSO (Floating Production, Storage and Offloading unit), sorte de pétrolier permettant le traitement et le stockage du pétrole et/ou du gaz. Les FPSO peuvent également être

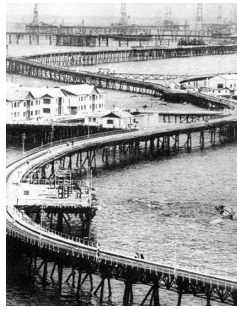
7. La résistance à l'avancement d'un navire est l'effort nécessaire qu'il faut exercer pour le déplacer d'un mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante sur un plan d'eau calme.



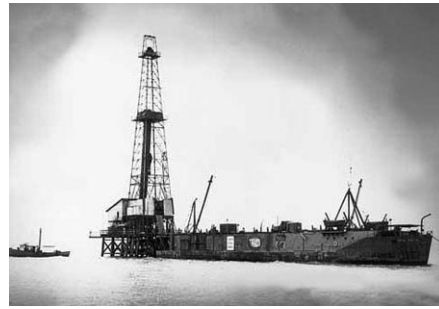
**a** : Summerland – Californie – 1915



**b** : Huntington beach – Californie – 1920



**c** : Mer Caspienne – URSS



**d** : Plateforme de Kerr-McGee – Louisiane – 1947

**Figure A.1.7** : Le début des premières plateformes métalliques

reliés directement à des puits sous-marins et réaliser l'extraction de manière autonome (cf. figure A.1.9.a page suivante). Le plus grand navire au monde était un ancien pétrolier reconverti en FPSO : le « Knock Nevis » (cf. figure A.1.9.b page suivante). Il mesurait 458 m de long. Les prochains défis pour l'ingénierie offshore sont l'exploitation des ressources en très haute profondeur (3000 m et plus) et dans les régions polaires.



**a** : Acheminement de Bullwinkle



**b** : Bullwinkle – Golfe du Mexique – Shell Oil



**c** : Acheminement de Troll A

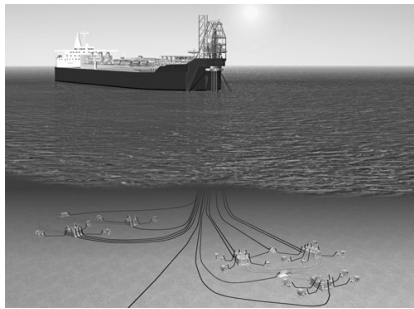


**d** : Troll A – Norvège – Shell Oil

**Figure A.1.8** : Plateformes offshore de structure métallique (a et b) ou en béton (c et d)

Les problématiques rencontrées par l'ingénierie pétrolière se retrouvent également dans le secteur récent et porteur des énergies renouvelables même si les dimensions caractéristiques sont différentes. Cinq sources d'énergie peuvent être exploitées : énergie du vent (éolienne offshore), énergie des courants (hydrolienne), énergie de la

houle (système houlomoteur), énergie des marées (usine marémotrice) et l'énergie thermique<sup>8</sup> (système ETM pour Énergie Thermique des Mers). Des parcs éoliens offshore (cf. figure A.1.10) commencent à voir le jour, le plus important étant celui de Horns Rev au Danemark avec une puissance électrique approchant les 370 MW pour 171 éoliennes (cf. figure A.1.10.a). Les hydroliennes restent à ce jour au stade expérimental et quelques concepts sont actuellement évalués en conditions réelles (cf. figure A.1.11). Les systèmes houlomoteurs sont principalement des prototypes à l'exception faite du système Pelamis installé au Portugal (cf. figure A.1.12.a page suivante) dont l'exploitation commerciale a été arrêtée peu de temps après son inauguration pour des raisons techniques et financières. Les sites adaptés aux usines marémotrices sont rares ce qui explique leur faible nombre à l'heure actuelle. Quelques usines marémotrices existent dans le monde mais l'impact écologique est important. Le développement des hydroliennes pourrait être une solution. Les systèmes ETM ne sont toujours pas utilisés à l'heure actuelle du fait de nombreuses difficultés technologiques mais des prototypes sont en cours de construction ou de validation (cf. figure A.1.12.b page suivante).



a : Exemple de FPSO



b : Le Knock Nevis

**Figure A.1.9 : Un FPSO (a) et un pétrolier (b)**



a : Parc de Horns Rev

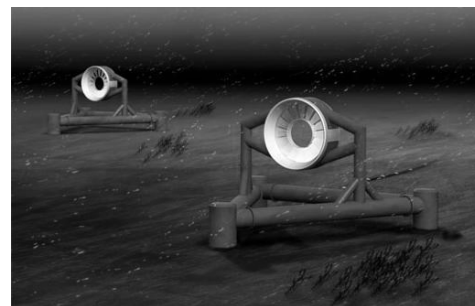


b : Projet WINFLO®

**Figure A.1.10 : Exemples d'éoliennes offshore fixes au Danemark (a) et flottantes en France (b)**



a : Concept Sea Flow – Sea Generation Ltd®



b : Concept d'OpenHydro – OpenHydro®

**Figure A.1.11 : Concepts d'hydroliennes installées en Irlande (a) et en France (b)**

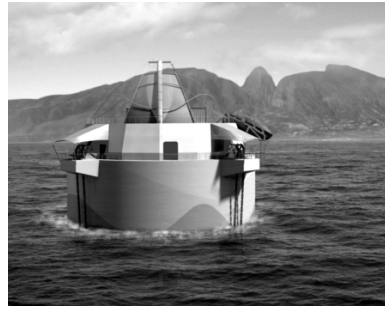
Cette courte présentation des domaines d'application de l'architecture navale moderne serait incomplète sans l'évocation du système le plus complexe : le sous-marin. Les informations présentées ci-dessous sont principalement tirées de [Bovis, 2010]. Le sous-marin est un système architectural si complexe qu'il n'a pu prendre

8. Utilisation du différentiel de température entre l'eau en profondeur et celle en surface pour réaliser une machine thermique.





a : Concept Pelamis – Pelamis Wave Power©



b : Concept ETM – DCNS©

**Figure A.1.12 :** Concept de système houlomoteur installé au Portugal (a) et concept d'ETM installé à la Réunion (b)

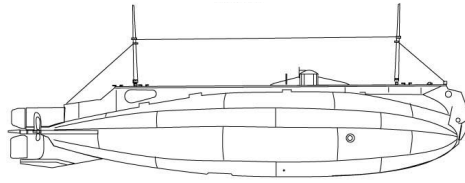
son essor qu'au sein du XX<sup>e</sup> siècle, c.-à-d. lorsque les connaissances scientifiques étaient suffisantes. C'est également l'engin maritime où l'hydrodynamique a le plus d'importance puisque sa capacité de naviguer totalement immergé le rapproche plus d'un avion que d'un bâtiment de surface. Il est également possible de rajouter que, du fait de sa nature militaire, un sous-marin se doit de faire le moins de bruit possible pour ne pas se faire repérer. Or, une grande partie de ce bruit est produit par ses caractéristiques hydrodynamiques et son propulseur.

Les grandes générations de sous-marin sont définies par l'appareil propulsif utilisé. Quelques concepts de sous-marins actionnés par la force musculaire marquent le début de son histoire. La « Tortue » de l'américain David Bushnell (1742-1824) en 1775 ou le « Nautilus » de son compatriote Robert Fulton (1765-1815) en 1800 en sont des exemples. Le premier sous-marin à moteur (moteur à air comprimé) est le « Plongeur », conçu par les français Siméon Bourgois (1815-1887) et Charles Brun (1821-1897) en 1863. Il pouvait accueillir 7 personnes. Cependant, des problèmes d'autonomie et la nécessité de rester près de la surface expliquent son désarmement rapide en 1867. L'invention du moteur électrique et de la batterie d'accumulateur au plomb vont remettre le concept du sous-marin sur les planches et c'est plus précisément le concept de submersible de type « Diesel-électrique », utilisé pour la première fois par l'Irlandais John Philip Holland (1841-1914) sur le « Holland VI » (cf. figure A.1.13.a page suivante), puis par le français Maxime Laubeuf (1864-1939) sur l'« Aigrette » (cf. figure A.1.13.b page suivante) en 1904, qui va redonner un nouveau souffle. L'utilisation du moteur thermique en surface et du moteur électrique en immersion augmente considérablement l'autonomie. Les premières « grandes » séries de sous-marins fonctionnent sur ce principe. En 1943, les U-boot allemands (cf. figure A.1.13.c page suivante), suivis de près par les sous-marins des autres nations, se voient équipés d'un « snorkel » permettant d'utiliser le moteur à combustion en immersion proche de la surface (immersion périscopique) afin de recharger les batteries du moteur électrique. Dès lors, l'immersion devient la situation normale du sous-marin et ses formes extérieures sont optimisées pour la plongée. Cependant, ce type de sous-marin doit souvent rester proche de la surface ce qui le rend facilement détectable.

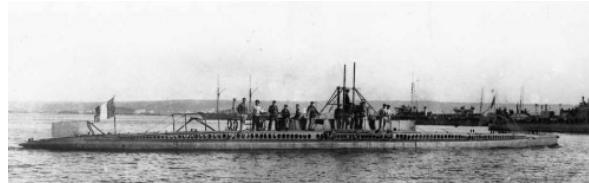
En 1954, le premier sous-marin à propulsion nucléaire est lancé : c'est l'« USS Nautilus » américain (cf. figure A.1.13.d page suivante). La Grande-Bretagne et la France suivront. La propulsion nucléaire règle le problème de l'autonomie énergétique en immersion et modifie considérablement leurs utilisations. La durée de plongée devient uniquement limitée par la quantité de vivre et le moral de l'équipage. Les sous-marins nucléaires sont maintenant regroupés en deux catégories principales : les SNA (Sous-marin Nucléaires d'Attaques) et les SNLE (Sous-marin Nucléaire Lanceur d'Engins) qui sont la composante principale de la dissuasion nucléaire en France.

En conclusion, cette section montre que la démarche scientifique ne fut appliquée à l'architecture navale que bien après sa naissance. C'est petit à petit et au gré des avancées scientifiques que le métier d'architecte naval a évolué. Même si l'expérience aura toujours une grande importance, il n'est plus possible à l'heure actuelle de concevoir un navire sans quelques connaissances scientifiques en mécanique des structures (la théorie de la poutre navire est encore couramment utilisée à l'heure actuelle en première approximation) ou en mécanique des fluides par exemple.

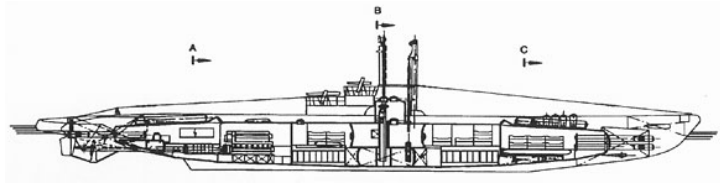
De plus, cette section avait pour objectif d'illustrer quelques grands domaines de l'architecture navale par une approche historique. Les grandes problématiques hydrodynamiques de l'architecture navale que sont la stabilité, la résistance à l'avancement, la propulsion et la tenue à la mer ont donc été introduites mais c'est très loin d'être une liste exhaustive. Les différentes étapes sont clairement formulées au sein du processus itératif



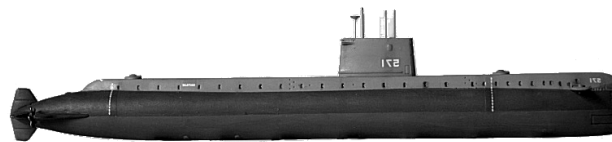
a : Le Holland VI – Etats-Unis



b : L'Aigrette – France



c : U-boot de type VIIC – Allemagne



d : L'USS Nautilus – Etats-Unis

Figure A.1.13 : Exemples de sous-marins

qu'est la boucle navire (cf. figure A.1.14). La boucle navire représente l'ordre des différentes études nécessaires à la conception d'un navire. C'est un processus nécessairement itératif car chaque secteur impacte directement les autres. Le rôle principal de l'architecte naval est d'avoir une vision globale afin de coordonner efficacement les étapes de conception.

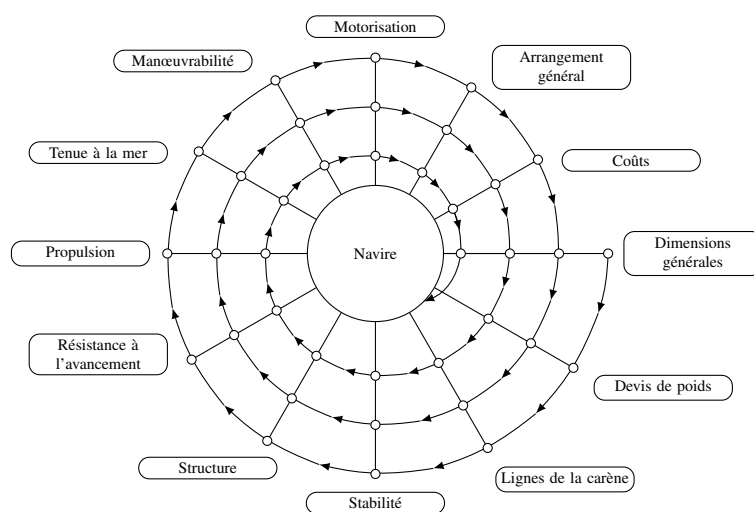


Figure A.1.14 : La boucle navire

Il est vrai que les sociétés de classification établissent des règles de conception afin de garantir la sécurité des personnes et des structures. Cependant, ces règles concernent principalement la résistance structurelle, la stabilité et la manœuvrabilité du navire. L'architecte naval a donc un rôle très important dans les choix architect-

turaux et la conception hydrodynamique du navire ou du propulseur. La conception hydrodynamique du navire commence évidemment par des méthodes simples (formules analytiques, empiriques ou retour d'expérience) mais ces dernières atteignent rapidement leurs limites pour des concepts originaux ou lorsqu'un résultat précis est nécessaire. Les bassins d'essais permettent de répondre à ces problématiques mais les moyens techniques nécessaires, le temps de mise en place des essais, les problèmes d'effet d'échelle et les coûts associés restent des freins importants pour une utilisation systématique.

Afin de contourner ces différents obstacles, il n'est plus rare que les architectes navals se tournent vers des études numériques pour concevoir un navire. Cette évolution est fortement liée à l'augmentation et à la démocratisation de la puissance de calcul des ordinateurs, mais pas uniquement. Effectivement, les méthodes numériques permettent de s'affranchir des effets d'échelle présents lors des essais expérimentaux sur maquette et l'étude de plusieurs designs (ou l'optimisation d'un design) semble dorénavant accessible financièrement. Comme il a été montré dans cette section, les bassins d'essais reposent sur une histoire déjà conséquente et sont peuvent être utilisés pour réaliser certaines études à l'échelle modèle et fournir des données de validation permettant la validation des outils numériques. Néanmoins, les études numériques sont de plus utilisées (voir remplacent totalement les essais bassins) grâce aux progrès conséquents réalisés aux niveaux des méthodes de résolution et l'ajout de modèles de plus en plus complexes.



## A.2 Histoire de l'hydrodynamique

L'histoire de l'hydrodynamique est presque aussi longue que celle de l'architecture navale. Elle s'est développée grâce à un très grand nombre de mathématiciens, hydrauliciens, hydrodynamiciens, numériciens et autres scientifiques. Reconstruire l'histoire de cette discipline et rendre hommage à qui de droit est un exercice difficile qui nécessite de réaliser des choix personnels parmi les nombreux ouvrages disponibles et points de vue différents. L'objectif de cette section est de rappeler l'ordre d'apparition de quelques unes des avancées majeures réalisées jusqu'à aujourd'hui. Les informations proviennent principalement des ouvrages suivants : [Viollet *et al.*, 1998], [Anderson, 1999], [of Iowa, 1983] [MacTutor, 2012]. Les équations sont succinctement présentées afin d'illustrer quelques propos. Une présentation plus rigoureuse de ces équations est proposée à la section B.1 p. 27.

### A.2.1 Découverte des premières équations

Archimède de Syracuse est sans aucun doute un des précurseurs emblématiques de cette discipline scientifique avec sa célèbre loi du volume d'eau déplacé. Bien plus tard, Léonard de Vinci (1452-1519), par ses nombreux dessins d'écoulements, introduit le concept de ligne de courant et énonce également quelques principes de base comme le principe de conservation de la masse (ou principe de continuité). En même temps, il décrit et comprend partiellement l'influence des parois d'un canal sur l'écoulement et donne ainsi une première idée du frottement [Viollet *et al.*, 1998].

Sir Isaac Newton (1643-1727), s'inspirant des travaux de Nicolas Copernic (1473-1543), publie en 1687 ses différentes lois de mécanique [Newton, 1687] et énonce clairement la définition de masse, quantité de mouvement, inertie et force. Il y donne également une formule censée représenter la force de résistance subie par un objet se déplaçant dans un fluide, mais cette dernière n'est pas correcte<sup>9</sup>. Pourtant, elle sera utilisée pendant longtemps et notamment dans le domaine de l'architecture navale. Il y donne également le principe de mouvement relatif qui stipule que la résistance à l'avancement d'un objet se déplaçant dans un fluide au repos est égale à la force exercée par un écoulement de même vitesse sur cet objet fixe. I. Newton correspond également avec l'allemand Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) qui pose les bases du calcul infinitésimal (calculs intégral et différentiel) dans de nombreux ouvrages. Cette méthode permettra par la suite d'écrire les futures équations de la mécanique des fluides ou des structures par exemple.

L'ouvrage fondateur de l'hydrodynamique peut être attribué à Daniel Bernoulli (1700-1782). Ce dernier publie en 1738 [Bernoulli, 1738] sa première théorie des écoulements en s'appuyant sur le principe de la conservation des « forces vives »<sup>10</sup> et par une découpe du fluide en tranches parallèles<sup>11</sup>. Cette méthode permet de ramener l'étude du système (un système composé d'un grand nombre de corps représentés par des tranches) à l'étude de son seul centre de gravité par le biais de ce que l'on appelle aujourd'hui la conservation de l'énergie mécanique d'un système. Ce fut donc une représentation unidimensionnelle. C'est cette méthode qui permet d'établir une première version de son théorème reliant la vitesse et la pression au sein d'un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide non-visqueux incompressible<sup>12</sup>. La version moderne de ce théorème stipule que la charge  $H$  (cf. équation A.2.1) est constante sur une ligne de courant pour un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait (non-visqueux) incompressible. Soit  $z$  la coordonnée cartésienne verticale dans le sens inverse de la pesanteur, la charge  $H$ , est définie par l'équation suivante :

$$H = p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \rho gz \quad (\text{A.2.1})$$

Le père de Daniel Bernoulli, Jean Bernoulli (1667-1748) reproche à son fils de se baser sur le principe de la « conservation des forces vives », principe qui n'est pas unanimement accepté par ses confrères. Jean Bernoulli va ainsi s'appliquer à reprendre les travaux de son fils en s'appuyant cette fois-ci sur une approche newtonienne. Il publie ses résultats en 1742 [Bernoulli, 1742]<sup>13</sup>. Ce sont ces travaux qui vont fortement inspirer le français

---

9. Sir I. Newton pensait que l'effort de traînée était proportionnel à la vitesse.

10. Les forces vives peuvent être rapprochées de ce que l'on appelle aujourd'hui l'énergie cinétique.

11. L'objectif est d'étudier le comportement d'un fluide dans un vase percé d'un trou.

12. Sa méthode n'utilisant uniquement qu'une approche globale, Daniel Bernoulli n'a pu établir son théorème qu'aux limites du domaine fluide. La pression est uniquement considérée comme une force s'exerçant sur les parois d'un vase par exemple. Son théorème sera généralisé plus tard, notamment par son père [Guilbaud, 2009] puis de manière rigoureuse par Léonard Euler.

13. Il annote son document de l'année 1732 afin de précéder les travaux de son fils.

Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) pour sa mise en équation d'un écoulement [D'Alembert, 1744] paru en 1744. Il y associe son fameux principe de dynamique publié en 1743 [D'Alembert, 1743] et le paradoxe de l'hydrostatique<sup>14</sup> énoncé par le flamand Simon Stevins (1548-1620) en 1586 [Stevens, 1586]. Sur le plan des résultats, ces trois méthodes ne se différencient guère mais sur le plan théorique, seule la méthode de Jean Bernoulli (le père) se distingue. En effet, c'est l'unique méthode n'utilisant pas une approche globale et, par conséquent, l'unique méthode qui a recours à la notion dite de pression interne. Le rôle important joué par cette pression interne n'est cependant pas encore considéré à sa juste valeur.

Jean le Rond D'Alembert va remettre en doute le parallélisme des tranches qu'il a lui-même utilisé pour son premier traité sur l'hydrodynamique. Il s'applique donc à ne plus utiliser une approche unidimensionnelle mais bidimensionnelle. C'est dans son traité publié en 1747 [D'Alembert, 1747] que la vitesse d'un fluide va être, pour la première fois, représentée sous la forme de ce que l'on pourrait appeler aujourd'hui un champ de vitesse (cf. équation B.1.1 p. 27). Peu de temps après, il développe ses travaux et publie les résultats en 1752 [D'Alembert, 1752]. Dans cet essai, il y expose son célèbre paradoxe<sup>15</sup>. C'est également dans cet essai, qu'il trouve les deux équations régissant le comportement d'un écoulement stationnaire, potentiel, bidimensionnel pour un fluide incompressible (cf. équations A.2.2 et A.2.3) en s'appuyant sur une surface de fluide infinitésimale et en appliquant son principe de la dynamique. Mathématiquement, il utilise le calcul aux différences partielles développé par Léonard Euler (1707-1783), Alexis Claude Clairaut (1713-1765) et Alexis Fontaine des Bertins (1704-1771) dans les années 1730.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad \overline{\text{rot}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.3})$$

Le suisse Léonard Euler généralise la méthode introduite par son concurrent J.I.R. D'Alembert (calcul infinitésimal, expression des inconnues sous la forme de champs) aux écoulements instationnaires pour des fluides parfaits et introduit la notion de particule fluide. Il présente ses résultats dans son mémoire en 1755 [Euler, 1755]. Il établit ainsi l'équation de conservation de la masse ou équation de continuité (cf. équation A.2.4). Par contre, pour déterminer l'équation de la quantité de mouvement (cf. équation A.2.5), il applique la seconde loi de Sir Isaac Newton à son élément de particule fluide. Il fait donc intervenir la notion de pression interne. C'est pour toutes ces raisons qu'on attribue à Euler les équations qui portent son nom<sup>16</sup> mais il n'en faut pas moins oublier la contribution de la famille Bernoulli et de D'Alembert. L. Euler est également le premier à établir de manière rigoureuse la loi dite de Bernoulli (cf. équation A.2.1 page suivante). Les équations d'Euler sont présentées sous forme eulérienne et en convention d'Einstein par les équations ci-dessous.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i^v \quad (\text{A.2.5})$$

À l'époque, la résolution des équations d'Euler pose énormément de problèmes car les outils mathématiques manquent. J.I.R. D'Alembert, en grande correspondance avec Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), réalise les premiers progrès. Il commence à introduire une méthode de résolution des écoulements plans potentiels d'un fluide incompressible dans le plan complexe en introduisant le potentiel des vitesses et la fonction de courant. Ses travaux sont présentés dans certains de ses nombreux ouvrages publiés entre 1761 et 1780 [D'Alembert, 1761-1780]. C'est également dans ces ouvrages qu'il tente, en vain, de donner une explication à son célèbre paradoxe. Une première tentative d'explication qualitative de ce paradoxe est réalisée par Pierre Louis Georges Du Buat (1734-1809) en 1779 [Du Buat, 1779]. Il faut cependant attendre l'apparition du concept de viscosité pour pouvoir l'expliquer rigoureusement.

14. Le paradoxe de l'hydrostatique énonce que la pression d'un liquide sur le fond d'un récipient dépend uniquement de la hauteur d'eau dans le récipient et non de sa forme ou de la forme du fond.

15. Le paradoxe de D'Alembert énonce qu'un corps rigide en mouvement uniforme (vitesse constante) dans un fluide parfait irrotationnel ne subit pas d'effort de résistance.

16. Equations régissant le comportement d'un fluide compressible non-visqueux en instationnaire.

Les premiers grands travaux sur les ondes de gravité (communément appelées vagues) ont également débuté avec I. Newton et ont intéressé de nombreux grands scientifiques et mathématiciens [Craik, 2004]. C'est Franz Joseph von Gerstner (1756-1832) qui, en 1802, donne la première solution non-linéaire exacte pour les ondes de surface en profondeur infinie [von Gerstner, 1802]. Très souvent, ce sont les vagues linéaires décrites correctement la première fois par George Biddell Airy (1801-1892) en 1842 [Airy, 1842] ainsi que celles de G.G. Stokes (cf. plus loin) de 1947 incluant des termes de dérivation supérieurs [Stokes, 1847] qui sont utilisées. De nombreux développements, certes moins utilisés en pratique, ont été réalisés depuis ces résultats [Craik, 2004].

### A.2.2 Une nouvelle étape dans la mécanique des fluides

Les limites des équations d'Euler par rapport aux observations expérimentales sont déjà bien connues : le paradoxe de D'Alembert en est un exemple mais de nombreuses autres expériences mettent en évidence la notion de perte de charge due à la viscosité : les travaux de l'allemand Gotthilf Hagen (1797-1884) [Hagen, 1839] et du français Jean-Louis Poiseuille (1797-1869) [Poiseuille, 1846] sur les écoulements d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique en sont des exemples.

Le concept de viscosité est introduit dans les équations d'Euler par le français Henri Navier (1785-1836) dans son mémoire qu'il présentera en 1822 [Navier, 1823]. Il introduit le terme manquant des équations d'Euler pour prendre en compte la viscosité d'un fluide (dans le cas d'un écoulement incompressible uniquement). Ce terme, c'est le tenseur des contraintes visqueuses (cf. équation B.1.21 p. 31). C'est en souhaitant modéliser les pertes d'énergie au niveau moléculaire et en s'inspirant de la loi de Jean Baptiste Fourier (1768-1830), qui fut son professeur, que H. Navier introduisit ce terme sans toutefois en comprendre réellement le sens physique : *« The irony is that although Navier had no conception of shear stress and did not set out to obtain equations that would describe motion involving friction, he nevertheless arrived at the proper form for such equations. »* [Anderson, 1999].

Les français Augustin Louis Cauchy (1789-1857) en 1828 [Cauchy, 1828] et Siméon Denis Poisson (1781-1840) en 1829 [Poisson, 1829], obtiennent également les mêmes équations dans le cadre général de la Mécanique des Milieux Continus (MMC). En 1843, Barré de Saint-Venant (1797-1886), ancien élève de H. Navier, ajoute également ce tenseur des contraintes visqueuses [Saint-Venant, 1843] de manière rigoureuse<sup>17</sup>, mais son nom n'est que rarement associé à la découverte de ces équations : *« Seven years after Navier's death, Saint-Venant re-derived Navier's equations for a viscous flow, considering the internal viscous stresses, and eschewing completely Navier's molecular approach. That 1843 paper was the first to properly identify the coefficient of viscosity and its role as a multiplying factor for the velocity gradients in the flow. He further identified those products as viscous stresses acting within the fluid because of friction. Saint-Venant got it right and recorded it. Why his name never became associated with those equations is a mystery. certainly it is a miscarriage of technical attribution. »* [Anderson, 1999].

Finalement, l'histoire retient majoritairement George Gabriel Stokes (1819-1903) comme un des pères de ces équations. Il ne les publie pourtant que deux ans après B. de Saint-Venant, c.-à-d. en 1845 [Stokes, 1845]. Dans cette dernière référence, il y explique : *« I afterwards found that Poisson had written a memoir on the same subject, and on referring to it I found that he had arrived at the same equations. The method which he employed was however so different from mine that I feel justified in laying the latter before this Society. [...] The same equations have also been obtained by Navier in the case of an incompressible fluid, but his principles differ from mine still more than do Poisson's. »*. Cependant, c'est G.G. Stokes qui pose l'hypothèse qui porte son nom<sup>18</sup>, hypothèse couramment utilisée (cf. équation B.1.23 p. 32), et réalise le premier grand cas d'application qu'il publie en 1851 [Stokes, 1851]. Ce cas lui permet de donner la première loi rigoureuse de l'effort de traînée subi par une sphère se déplaçant dans un fluide visqueux newtonien dans le cadre des écoulements rampants<sup>19</sup>. G.G. Stokes est également le premier à établir la condition aux limites d'adhérence en 1851 [Stokes, 1851], condition qui spécifie que la vitesse du fluide est nulle au niveau de la paroi d'un solide fixe. Les équations de

---

17. Il utilise la loi de comportement des fluides linéairement visqueux, c.-à-d. la loi des fluides newtoniens

18. L'hypothèse de Stokes consiste à supposer la nullité du coefficient de viscosité volumique.

19. Un écoulement rampant est un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds très faible. Les efforts visqueux y sont donc prépondérants. Ils sont également appelés écoulements de Stokes.

Navier-Stokes obtenues par une approche eulérienne<sup>20</sup> sont présentées ci-dessous en convention d'Einstein.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i^v \quad (\text{A.2.7})$$

avec dans l'ordre chronologique :

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \text{H. Navier} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad \text{A.L. Cauchy et S.D. Poisson} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad \text{B. de Saint-Venant et G.G. Stokes} \quad (\text{A.2.10})$$

Du côté expérimental cette fois-ci, ce sont les travaux de W. Froude qui vont donner une base solide à l'étude de la résistance à l'avancement d'un navire. Son hypothèse consiste à séparer la résistance d'un navire en deux composantes principales qui n'interagiraient pas entre elles : la résistance visqueuse et la résistance de vagues<sup>21</sup>. En utilisant la méthode de similitude de I. Newton, il énonce en 1869 la relation liant la résistance de vagues comme étant une fonction de la vitesse du navire et sa longueur [Froude, 1869] sans connaître les travaux du français Ferdinand Reech qui l'énonce également en 1852 [Reech, 1852]. Le nombre adimensionnel utilisé dans cette loi de similitude est appelé nombre de Froude<sup>22</sup> et est noté  $Fr$ . Soient,  $U$  et  $L$  une vitesse et une longueur de référence. Soit  $g$  l'accélération de la pesanteur, le nombre de Froude est défini par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (\text{A.2.11})$$

W. Froude construit à Torquay le premier véritable bassin de traction<sup>23</sup> en 1870 afin d'étudier de manière expérimentale la résistance à l'avancement des navires ainsi que leur stabilité en roulis. Il est composé d'un bassin de 84.7 m de long, 11 m de large et 3.05 m de profondeur [Rossell *et al.*, 1988]. Au-dessus de ce bassin se trouve un rail permettant de remorquer la maquette tout en mesurant l'effort de résistance (ce principe est toujours d'actualité). Ce bassin lui permet de vérifier son hypothèse précédemment citée mais également de donner rapidement des formules empiriques sur la résistance visqueuse des plaques planes [Froude, 1872], [Froude, 1874]. Ses travaux marquent réellement le début de l'utilisation des bassins d'essais pour prévoir les caractéristiques hydrodynamiques d'un navire au réel. D'ailleurs, ses conseils sont rapidement demandés pour la construction de bassins d'essais dans le monde entier. Ainsi, l'Italie et la Russie construisent sur le même principe leurs propres bassins d'essais respectivement à Spezia et Saint-Petersbourg en 1891 (Krylov Shipbuilding Research Institute). Puis suivront : les États-Unis d'Amérique à Washington en 1900 (Experimental Model Basin), l'Allemagne à Berlin en 1903 (Berlin Model Basin), de nouveau les États-Unis d'Amérique dans le Michigan en 1905 (Ship Hydrodynamics Laboratory) et la France à Paris en 1906 (Bassin d'essais des carènes). Depuis cette époque, toutes les grandes puissances maritimes possèdent des bassins d'essais dont les équipements se sont diversifiés : bassin de traction, bassin de houle, bassin de manœuvrabilité, tunnel hydrodynamique et tunnel de cavitation en sont des exemples. Les méthodes d'extrapolation au réel sont étudiées au sein d'une association internationale créée en 1933 à la Haye en Hollande<sup>24</sup> : l'« International Towing Tank Conference » (ITTC). De nos jours, les bassins d'essais allient couramment expertise et recherche dans les domaines expérimental et numérique de l'hydrodynamique navale.

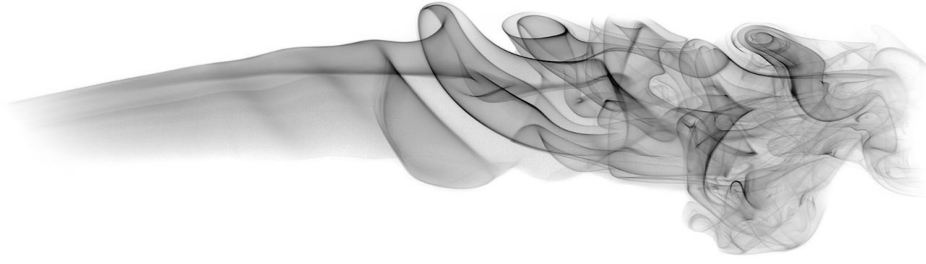
20. Le terme de diffusion visqueuse (cf. équation A.2.10) a été développé par rapport à l'équation (B.1.21) afin de respecter la forme présentée par G.G. Stokes.

21. En simplifiant, la résistance de vagues correspond à la résistance due aux vagues formées par l'avance de la carène. La résistance visqueuse est quant à elle composée des efforts de frottement et de pression visqueux.

22. Il est plus rarement appelé nombre de Reech-Froude en l'honneur du français Ferdinand Reech (1805-1880) qui l'établit plus de 20 ans avant W. Froude.

23. D'autres essais à l'échelle maquette en architecture navale sont réalisés bien auparavant mais sans fondement scientifique solide. Par exemple, J.I.R. D'Alembert réalise des essais de résistance à l'avancement en 1777 [D'Alembert *et al.*, 1777].

24. La décision de créer cette association a été prise en 1932 à Hambourg lors de l'« Hydro-mechanical Congress ».



**Figure A.2.1** : Un écoulement passant de l'état laminaire (gauche) à l'état turbulent (droite)

Comme il a déjà été énoncé précédemment, les équations de Navier-Stokes sont établies par différents scientifiques dès 1845. Elles permettent de décrire l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien. De nos jours, il est connu qu'un écoulement peut avoir un comportement partiellement instationnaire et chaotique sous certaines conditions. Malheureusement, ces conditions sont souvent réunies dans les milieux industriels ou naturels. Ces écoulements chaotiques sont qualifiés de turbulents et leur description parfaite demande l'étude de phénomènes complexes à des échelles très fines en temps et en espace. La résolution des équations de Navier-Stokes, déjà difficile, en devient presque inaccessible sur les écoulements fortement turbulents qui existent en architecture navale et dans bien d'autres domaines. Il est donc primordial de rajouter des modèles empiriques ou semi-empiriques aux équations de Navier-Stokes pour prendre en compte de manière approchée les effets de la turbulence. L'idée principale de ces modèles est de filtrer spatialement et/ou temporellement les équations de Navier-Stokes.

La prise en compte de la turbulence dans les équations de Navier-Stokes va ainsi découler de la contribution de plusieurs scientifiques, le premier étant le français Joseph Boussinesq (1842-1929). Élève de B. de Saint-Venant, il s'inspire des intuitions de son maître pour énoncer le concept de viscosité turbulente en 1877 [Boussinesq, 1877]. Ses observations l'amènent à penser que les contraintes dues à la viscosité doivent dépendre, au moins en partie, de l'intensité de la turbulence locale<sup>25</sup>. Il énonce également que pour des écoulements turbulents, il est possible de travailler avec des valeurs moyennes mais une erreur de calcul l'empêche d'établir ce que O. Reynolds réalisera plus tard [Schmitt, 2007]. L'hypothèse de J. Boussinesq peut se résumer par l'équation (A.2.12) avec  $\mu$  la viscosité du fluide (viscosité dépendant optionnellement de la température) et  $\mu_t$  la viscosité turbulente<sup>26</sup> dépendant de l'intensité turbulente locale.

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = (\mu + \mu_t) \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad (\text{A.2.12})$$

Comme il a déjà été énoncé précédemment, le nombre de Froude est un nombre important en architecture navale car il permet de caractériser une partie de l'effort de résistance. Le second nombre adimensionnel d'importance équivalente en architecture navale (et plus généralement en mécanique des fluides) est le nombre identifié expérimentalement dans une conduite par l'Irlandais Osborne Reynolds (1842-1912) en 1883 [Reynolds, 1883]. Ce nombre qui porte le nom de son « inventeur », est souvent noté  $Re$ . Il exprime le ratio entre les effets d'inertie et les effets visqueux. Suivant la valeur de ce nombre, il est possible de parler d'écoulement rampant (ou de Stokes), laminaire, de transition ou turbulent. Un écoulement turbulent est un écoulement où les petites instabilités qui prennent naissance dans le fluide ne peuvent plus s'atténuer mais, au contraire, s'amplifient jusqu'à un certain équilibre. En architecture navale, la très grande majorité des écoulements sont turbulents.

$$Re = \frac{UL}{\mu/\rho} \quad (\text{A.2.13})$$

Une fois que le comportement turbulent d'un écoulement est identifié et caractérisé de manière expérimentale, il reste à l'intégrer au sein des équations de Navier-Stokes. C'est ce que fait O. Reynolds. En partant des idées de J. Boussinesq, il réalise la décomposition des champs de vitesse et de pression en une partie moyenne et une partie fluctuante (décomposition dite de Reynolds), puis réalise une moyenne des équations de Navier-Stokes. Il obtient ainsi les équations de Reynolds (ou équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds),

<sup>25</sup>. Ce n'est donc pas une propriété du fluide mais de l'écoulement.

<sup>26</sup>. La viscosité turbulente  $\mu_t$  n'a pas de signification physique particulière et s'utilise uniquement dans le cadre d'un modèle. C'est néanmoins l'hypothèse fondatrice des modèles les plus couramment utilisés dans les applications industrielles.

équations qui modélisent statistiquement le comportement d'un fluide turbulent. Par rapport aux équations de Navier-Stokes, ce sont des quantités moyennées au sens de Reynolds qui sont étudiées (champs de vitesse et de pression moyen par exemple) et seul un terme supplémentaire apparaît dans l'équation de la quantité de mouvement : le tenseur des contraintes de Reynolds  $\mathcal{R}$ .

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mathcal{R}_{ij} \right] \quad (\text{A.2.14})$$

$$\mathcal{R}_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (\text{A.2.15})$$

L'introduction du tenseur des contraintes de Reynolds ajoute des inconnues sans apporter d'équation supplémentaire. Ce problème de fermeture est comblé par des modèles de turbulence plus ou moins complexes.

Au même moment, le français Maurice Couette (1858-1943), un des pionniers de la rhéologie, réussit les premières mesures précises de la viscosité d'un fluide en inventant un dispositif composé de deux cylindres concentriques dont celui à l'extérieur peut tourner (écoulement de Couette). Ses résultats sont présentés en 1890 dans ses travaux de thèse [Couette, 1890].

Le physicien britannique d'origine irlandaise William Thomson devenu Lord Kelvin (1824, 1907) travaille à la fin de sa vie sur une théorie décrivant les vagues créées par un navire en grande profondeur [Kelvin, 1887a] [Kelvin, 1887b]. La valeur de l'angle que forme ce champ de vagues (appelé dièdre de Kelvin) avec le navire est un résultat classique en architecture navale.

Le physicien allemand Ludwig Prandtl (1875-1953) introduit en 1904 la théorie de la couche limite<sup>27</sup> [Prandtl, 1904] en utilisant l'analyse d'échelle sur les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire établi. Son élève Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970) en donna une solution mathématique en 1908 [Blasius, 1908]. L. Prandtl dirige également la thèse de Théodore von Kármán (1881-1963) qui est connu pour ces travaux sur les couches limites turbulentes et la description des tourbillons présents dans les allées dites de Von Kármán. L. Prandtl est également l'inventeur d'un des premiers modèles de turbulence : le modèle de longueur de mélange de Prandtl (modèle à zéro équations) [Prandtl, 1925].

La présentation de l'historique des différents modèles de turbulence dépasse très largement le cadre de ce travail de thèse. De plus, il serait nécessaire de présenter dans un premier temps les multiples approches permettant d'aboutir aux différentes et nombreuses catégories auxquelles appartiennent ces modèles : RANSE (« Reynolds Averaged Navier-Stokes »), URANS (« Unsteady RANS »), DES (« Detached Eddy Simulation »), LES (« Large Eddy Simulation »), PANS (« Partially-Averaged Navier Stokes »), etc. [Bourguet, 2008]. Si seule l'approche URANS et les modèles de turbulence classiquement utilisés en ingénierie navale sont considérés, quelques travaux importants peuvent néanmoins être cités. En 1922, le mathématicien et météorologiste Lewis Richardson (1881-1953) expose sa théorie de cascade d'énergie turbulente [Richardson, 1922]. Cette théorie suppose que l'écoulement moyen produit des structures tourbillonnaires à l'échelle de cet écoulement. Ces tourbillons vont ensuite créer d'autres tourbillons de plus petite taille qui vont eux-même en créer de nouveaux d'encore plus petite taille et ainsi de suite jusqu'à ce que l'énergie soit dissipée par la viscosité du fluide au sein des plus petits tourbillons. Le mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903-1987) reprend cette théorie et réalise une analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes pour déterminer l'échelle de Kolmogorov, c.-à-d. l'échelle des plus petits tourbillons (cf. équation B.1.45 p. 35), et prévoir la forme du spectre de l'énergie turbulente d'un écoulement [Lévêque, 2004]. Afin d'obtenir ces résultats, A. Kolmogorov pose certaines hypothèses qui sont toujours utilisées pour construire les modèles de turbulence actuels. Une description plus précise, mais néanmoins toujours incomplète, des modèles de turbulence utilisés au sein de ces travaux est présentée à la section B.1.11 p. 35.

En conclusion, si les bases physiques de la mécanique des fluides sont aujourd'hui bien établies, il n'en reste pas moins que la résolution des différentes équations nécessite de passer par des méthodes numériques (il existe très peu de solutions analytiques). En outre, des modèles de turbulence sont utilisés afin de ne pas résoudre la totalité des différentes échelles spatiales et temporelles des écoulements turbulents afin de rendre les calculs abordables par les machines informatiques actuelles.

27. La couche limite est la zone où la vitesse du fluide est fortement influencée par la présence d'une paroi solide. Au sein de la couche limite, les effets dus à la viscosité sont très importants alors qu'à l'extérieur de cette zone (hors sillage visqueux) ils sont négligeables.

### A.3 Présentation et analyse du sujet

L'objectif de ce travail de thèse est de développer et de valider un outil généraliste permettant l'étude des interactions fluide-structure pour des configurations mécaniques complexes dans le domaine de l'architecture navale. Les cas d'application envisagés sont, par exemple, la modélisation de corps amarrés ou remorqués en fortes interactions avec les écoulements, la modélisation de systèmes de récupération de l'énergie des écoulements (eau et air) ou de la houle ou le contrôle de navires par des appendices actifs.

Ce qui différencie ces cas d'application avec les cas d'études rencontrés habituellement en architecture navale, c'est la complexité des systèmes mécaniques mis en jeu. À l'heure actuelle, pour résoudre ce type de problématique, une approche découplée est couramment utilisée. Cette dernière peut être divisée en deux étapes séquentielles.

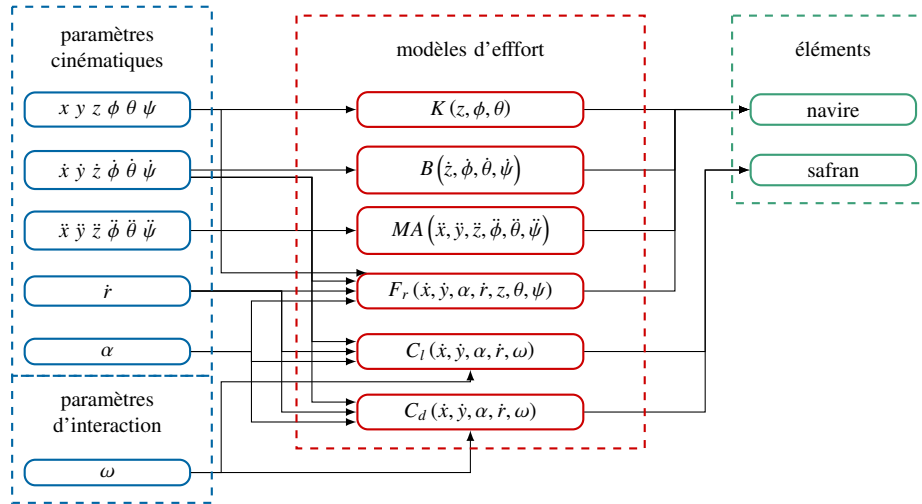
La première étape a pour objectif de construire et d'évaluer un modèle pouvant reproduire les efforts fluides s'exerçant sur le système structurel considéré. Lorsque la structure est composée de parties bien distinctes (un navire et ses appendices par exemple), plusieurs modèles élémentaires sont construits et assemblés pour former le modèle complet. Si des interactions fortes existent entre ces deux parties, il est bien entendu nécessaire de modifier ou d'enrichir les modèles élémentaires correspondants. La construction d'un modèle élémentaire passe par plusieurs étapes. Dans un premier temps, il faut lister les variables cinématiques du système mécanique. Ces variables cinématiques peuvent être absolues (cas d'un navire généralement) ou relatives (cas d'un appendice). Dans un second temps, les efforts appliqués à la carène sont modélisés par des fonctions analytiques dont les données d'entrée principales<sup>28</sup> sont les inconnues cinématiques précédemment citées ainsi que leurs dérivées temporelles. Ainsi, ces modèles essaient de représenter les efforts de raideur hydrostatique, d'amortissement et de masse ajoutée, les efforts de résistance et de dérive, les efforts de portance et de traînée, etc. De simples considérations (plan ou axe de symétrie) et les retours d'expérience permettent de diminuer le nombre des variables dont dépendent chacun des efforts modélisés. Les modèles analytiques peuvent, par exemple, se baser sur des analyses dimensionnelles, des modèles semi-empiriques ou des développements limités des variables considérées. Une fois la forme des modèles analytiques choisie, il s'agit de déterminer les différents coefficients par des essais en bassin, des simulations numériques ou des formulations analytiques basées sur des séries d'expériences. En plus des coefficients inhérents aux différents modèles, il est quelque fois nécessaire d'évaluer les coefficients d'interaction entre les différentes parties : coefficient de sillage, coefficient de succion, etc. Enfin, une fois le modèle d'effort construit et les coefficients déterminés, le problème mécanique est modélisé puis résolu par le biais d'un solveur mécanique. L'exemple d'un navire possédant un simple safran est brièvement illustré à la figure A.3.1. Cette figure se base plutôt sur une résolution temporelle du problème posé. Il est également courant que le problème soit résolu par une approche fréquentielle, auquel cas, les coefficients des modèles (et donc les fonctions) dépendent également de la fréquence d'excitation du système mécanique (fréquence de rencontre de la houle principalement). Des méthodes de transition existent pour passer de l'approche fréquentielle à l'approche temporelle [Cummins, 1962].

Cette approche séquentielle souffre de plusieurs inconvénients. Les domaines de validité des modèles sont souvent limités à des mouvements dont l'amplitude est faible. En effet, les non-linéarités sont rarement prises en compte de manière satisfaisante (exception faite de quelques mouvements élémentaires). De surcroît, la décomposition des efforts fluides en efforts élémentaires supprime les potentielles interactions entre les phénomènes. Les coefficients d'interaction ont pour objectif de modéliser certaines de ces interactions mais leur détermination précise est souvent difficile. Enfin, ce type d'approche est souvent spécifique à une problématique donnée et, par conséquent, difficile à généraliser. Néanmoins, cette approche possède l'avantage non négligeable de pouvoir déterminer l'importance relative de chacun des phénomènes lorsqu'elle est correctement appliquée. De plus, une fois que les modèles d'efforts sont correctement construits et déterminés, il est possible de simuler rapidement un grand nombre de configurations différentes sur des temps physiques relativement longs sans que les coûts de simulation soient prohibitifs.

Au sein de ces travaux de thèse, c'est une approche différente qui est adoptée. L'objectif principal est de s'affranchir des contraintes principales dont souffre l'approche séquentielle en résolvant d'une seule traite le problème couplé. Pour cela, la totalité des équations régissant le problème global est résolue en même temps. Il est bien évident que les temps de simulation peuvent être nettement supérieurs à ceux de l'approche séquentielle mais le résultat des résultats est fortement améliorée. D'une certaine façon, c'est une approche complémentaire n'ayant pas pour vocation de remplacer l'approche séquentielle. Effectivement, du point de vue de l'ingénierie,

---

28. Les données secondaires peuvent être des données géométriques par exemple.



**Figure A.3.1 :** Exemple d'une approche séquentielle de résolution d'une problématique fluide-structure – Cas simple d'un navire avec safran

cette dernière possède des avantages non négligeables vis-à-vis des temps de simulation. C'est la raison pour laquelle, l'approche séquentielle sera toujours utilisée durant les premières étapes de conception. La méthode de résolution directe permet, quant à elle, de valider l'approche séquentielle, d'obtenir des résultats plus précis mais également d'étudier des situations qui ne peuvent être correctement modélisées par l'approche séquentielle : fort couplage entre la structure et le fluide, grands mouvements, fortes non-linéarités, etc.

L'approche directe est maintenant envisageable pour différentes raisons. Tout d'abord, l'augmentation et la démocratisation des moyens de calcul au cours des dernières années permet d'utiliser des méthodes numériques de résolution autrefois trop coûteuses en temps CPU (« Central Processing Unit ») ou en mémoire. Ensuite, et c'est une des conséquences de la raison précédente, les équations pouvant être résolues numériquement sont de plus en plus à même de représenter des phénomènes physiques complexes. Ainsi, les domaines tels que la mécanique des structures, la mécanique des fluides, la thermodynamique ou l'électromagnétisme voient apparaître un nombre grandissant de solveurs adaptés à une utilisation courante dans l'industrie.

Au gré des avancées théoriques, mathématiques, numériques et informatiques, ces solveurs se sont naturellement spécialisés pour être performants dans leurs domaines d'application respectifs. La performance d'un solveur est une notion générale qui regroupe différentes notions complémentaires telles que la précision des résultats, c.-à-d. sa capacité à approximer correctement la solution, sa rapidité d'exécution, c.-à-d. sa capacité à résoudre rapidement le problème donné, ou l'étendue de son domaine d'application, c.-à-d. sa capacité à prendre en compte des modélisations complexes. Il est ainsi courant que les méthodes de résolution numérique soient différentes. Par exemple, les solveurs structure se basent en grande majorité sur une approche lagrangienne (les domaines élémentaires étudiés<sup>29</sup> suivent le mouvement des particules qu'il contient à l'état initial) car elle est bien adaptée au comportement des structures solides. En effet, une particule solide reste, sauf cas extrêmes, proche de celles qui l'entourent à l'état initial. Au contraire, dans le cas d'un écoulement fluide, il est nettement plus difficile de suivre le mouvement de chaque particule fluide car les mouvements de ces dernières sont très importants. C'est la raison pour laquelle, une approche eulérienne, approche qui consiste à étudier des domaines spatiaux élémentaires fixes<sup>30</sup>, est souvent préférée. Ces approches possèdent leur méthode de résolution numérique privilégiée car elles sont adaptées à l'approche utilisée et donc performantes. Il est notamment possible de citer les éléments finis pour l'approche lagrangienne et les volumes finis pour l'approche eulérienne.

Par conséquent, lorsque l'objectif est de résoudre un problème d'interaction fluide-structure d'un seul tenant, il n'est pas spécialement pertinent d'utiliser une unique méthode de résolution pour résoudre le problème global car, d'un point de vue pratique, aucune méthode n'est parfaitement adaptée à la résolution de chacun des problèmes élémentaires (problème fluide et problème solide). Il est vrai que certains solveurs utilisent cette

29. Mailles ou volumes de contrôle.

30. L'approche eulérienne ne permet pas de prendre en compte des modifications du domaine spatial étudié et donc, par conséquent, les problématiques d'interaction fluide-structure. En réalité, c'est une approche hybride qui est utilisée : l'approche ALE (« Arbitrary Lagrangian Eulerian method » (cf. section B.1 p. 27)).



approche (cf. section D.3.1.1 p. 116), mais les modèles utilisés sont souvent très simplifiés du côté du fluide ou de la structure. En outre, comme il a déjà été énoncé précédemment, il existe des solveurs plus ou moins généralistes qui sont adaptés à la résolution d'un des problèmes élémentaires. Il est donc tout à fait pertinent et pragmatique de vouloir les réutiliser.

L'utilisation de différents solveurs pour résoudre un problème général est une méthode de résolution qui fait partie des méthodes dite de co-simulation (simulation collaborative) ou méthode par couplage de codes [Sigrist, 2014]. Comme chaque solveur peut être adapté à la résolution de son problème élémentaire, les possibles limitations ne résultent plus du problème couplé mais uniquement des possibilités de chacun des solveurs utilisés. D'autres aspects appréciables découlent également de cette séparation : une validation et une généralisation plus aisées [Hou *et al.*, 2012]. Néanmoins, afin d'être possible et efficace, le couplage doit pouvoir s'effectuer à des endroits bien précis du processus de résolution de chacun des problèmes élémentaires. Il est donc nécessaire que les solveurs soient suffisamment « ouverts » pour satisfaire ce critère.

Au cours de ces travaux, le problème fluide et le problème structure sont résolus respectivement par le solveur ISIS-CFD et le solveur MBDyn. Le premier est dédié à la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires en moyenne de Reynolds pour des écoulements diphasiques et turbulents (cf. section B.2 p. 40). Il est fortement orienté vers les applications maritimes, d'où le choix de ce solveur. Le second est, quant à lui, un solveur dédié à la résolution de problèmes multi-physiques et plus particulièrement la mécanique des corps rigides et déformables (cf. section C.2 p. 88). C'est un solveur open-source ce qui facilite grandement son couplage avec un autre code. Au début, ce code fut principalement choisi pour ce caractère open-source. Cependant, au fil des investigations, il a été noté que ce solveur possède des caractéristiques très intéressantes en matière de modélisations complexes. Néanmoins, l'algorithme de couplage mis en place a été développé de telle sorte que ce solveur puisse être remplacé sans trop d'efforts par d'autres solveurs mécaniques développés pour des applications bien spécifiques (éoliennes flottantes par exemple).

La section suivante propose une brève présentation des problématiques liées à la mise en place d'une communication entre plusieurs solveurs. Elle présente également quelques applications des méthodes de co-simulation.

## A.4 La simulation collaborative

La co-simulation peut être utilisée pour résoudre deux catégories de problèmes. Dans le cadre de ces travaux, elle est utilisée pour résoudre un problème hydromécanique, c.-à-d. un problème multi-physique. Elle peut également être utilisée pour résoudre des problèmes multi-échelles, c.-à-d. des problèmes dont la physique est proche mais dont les échelles spatiales ou temporelles sont très variées (climatologie ou propagation de micro-fissures dans un matériau par exemple).

Il est également possible de séparer les domaines d'application en fonction du nombre de domaines spatiaux et de physiques mises en jeu. Par exemple, une application courante de la co-simulation consiste à paralléliser un code « élémentaire ». Dans ce cas, la problématique étudiée est mono-physique et multi-domaine et le couplage s'effectue par le biais des frontières des domaines. Les problématiques peuvent également être multi-physiques et mono-domaines. Dans ce cas, le couplage s'effectue couramment par le biais des termes sources des équations (problème thermo-mécanique par exemple). Enfin, les problématiques multi-physiques et multi-domaines regroupent le reste des différentes applications. Le couplage peut s'effectuer par le biais des frontières des différentes physiques considérées comme c'est le cas des interactions fluide-structure mais pas nécessairement. À titre d'exemple, lorsque des phénomènes magnétiques sont modélisés, les interactions ont lieu au niveau de la totalité du domaine spatial étudié.

Dans tous les cas, la mise au point d'un couplage de codes demande des développements informatiques importants. Ceci est d'autant plus vrai quand les problématiques sont multi-physiques et multi-domaines comme c'est le cas pour l'étude des interactions fluide-structure.

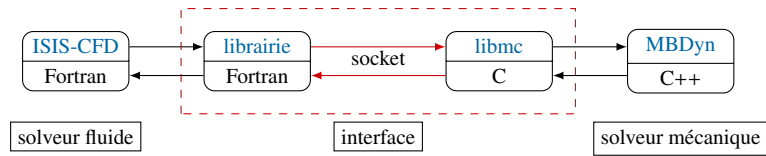
Premièrement, il est nécessaire que les codes puissent communiquer entre eux. Une méthode simple consiste à utiliser des fichiers temporaires pour transmettre les informations nécessaires. C'est notamment une solution qui est proposée au sein de MBDyn. Cependant, les performances associées aux accès disques sont loin d'être satisfaisantes lorsque les transferts d'informations s'effectuent souvent et/ou en quantité importante. Une autre méthode consiste à coupler directement les codes sources. Cette méthode n'est donc possible que si ces derniers sont disponibles, ce qui n'est pas toujours le cas. De plus, il faut vérifier l'interopérabilité des langages utilisés (Fortran, C, C++, etc.) et il faut sans cesse s'adapter aux mises à jour des solveurs (perte d'indépendance). Une autre possibilité consiste à utiliser des bibliothèques de communication dite « générales ». Il en existe un très grand nombre aux caractéristiques différentes [Jagers, 2010]. Comme le décrit cette dernière référence, il ne peut y avoir de bibliothèque générique car les besoins sont souvent différents selon l'architecture des solveurs. Cependant, dans le domaine des interactions fluide-structure, la bibliothèque MpCCI [MPCCI] peut potentiellement être un choix judicieux puisque certaines fonctions et algorithmes de couplage sont déjà implémentés. Cependant, cette bibliothèque étant payante, il est nécessaire de s'investir financièrement. Une autre possibilité intéressante consiste à détourner l'utilisation première de la bibliothèque MPI (« Message Passing Interface ») [MPI]. Effectivement, si cette bibliothèque a pour objectif de faciliter la parallélisation des codes (problématiques mono-physiques et multi-domaines), elle peut également être utilisée pour coupler différents solveurs. Cette possibilité est intéressante car cette bibliothèque est très couramment employée au sein des solveurs scientifiques. Enfin, le solveur MBDyn utilise une autre possibilité de plus bas niveau et c'est cette dernière qui est utilisée au cours de ces travaux.

Au sein de MBDyn, la communication avec un autre solveur de calcul est possible par le biais de sa propre bibliothèque de communication (bibliothèque relativement simple) qui est basée sur l'utilisation d'une « socket »<sup>31</sup>. Les « sockets » sont des interfaces permettant d'utiliser facilement les protocoles de transport réseau dont les plus connus sont TCP (« Transmission Control Protocol ») et UDP (« User Datagram Protocol »). La bibliothèque de MBDyn utilise le protocole TCP car il est considéré comme fiable (il y a un contrôle des communications et une vérification de la bonne réception des messages). Cette communication bidirectionnelle peut donc s'effectuer au travers d'un réseau informatique, mais également sur une machine unique. Elle est de plus bas niveau que celle proposée par la bibliothèque MPI car il est nécessaire de contrôler plusieurs paramètres tels que le nombre de connexions disponibles, la taille des flots d'octets (message) ou des informations de contrôle permettant aux programmes de se comprendre mutuellement.

La bibliothèque de communication de MBDyn (bibliothèque « libmc ») consiste en un ensemble de fonctions qui facilitent les communications pour se concentrer sur le transfert des informations intéressantes (efforts, cinématiques, messages de contrôle, etc.). Elle est principalement développée en langage C (format de prédilection des « sockets ») mais une version Fortran non testée était également disponible au début de ces travaux de thèse.

31. Anglicisme et nom féminin signifiant prise ou extrémité d'une connexion.

Une partie du travail a consisté à corriger les erreurs présentes dans la version Fortran de cette librairie. Du point de vue des différents développements informatiques, une autre partie du travail a consisté à créer une librairie additionnelle (codée en Fortran) utilisée par le solveur ISIS-CFD pour qu'il puisse utiliser les fonctions de la librairie proposée par MBDyn. En outre, cette librairie supplémentaire permet de mettre en place l'algorithme de couplage entre ces deux solveurs. Un simple schéma de principe est proposé à la figure A.4.1.



**Figure A.4.1 :** Schéma de principe de l'implémentation informatique





# Résolution du problème fluide

Ce chapitre présente la méthode utilisée pour résoudre le problème fluide. Dans un premier temps, les différentes étapes permettant d'aboutir aux équations résolues, c.-à-d. les équations représentatives d'un écoulement multiphasique, turbulent d'un fluide isotherme incompressible et newtonien, sont présentées. Les modèles de turbulence utilisés au sein de ces travaux se basent sur la moyenne de Reynolds. Cette approche est également introduite.

Dans un second temps, la méthode de résolution des équations est développée. Elle se base sur une discrétisation volumes finis pour la discrétisation spatiale et différences finis pour la discrétisation temporelle. Au sein de cette partie, le cas d'une équation de transport classique est présentée. Les différents schémas de discrétisation sont explicités. Le cas particulier du couplage entre la vitesse et la pression est exposé par la suite. Enfin, la méthode de résolution de l'équation de masse ajoutée est décrite.

## Contenu

<b>B.1</b>	<b>Le problème fluide en équations</b>	<b>27</b>
B.1.1	Principes généraux	27
B.1.2	Description eulérienne et lagrangienne	27
B.1.3	Notations et théorèmes mathématiques	28
B.1.3.1	Notations	28
B.1.3.2	Règle de Leibnitz	28
B.1.3.3	Formule de Green-Ostrogradski	29
B.1.3.4	Théorème de Green-Riemann en dimension 3	29
B.1.4	Condition de conservation spatiale	30
B.1.5	Bilan de masse	30
B.1.6	Fluide incompressible et isotherme	30
B.1.7	Loi de comportement des fluides newtoniens	31
B.1.8	Bilan de quantité de mouvement d'un fluide newtonien	32
B.1.9	Forme convective	33
B.1.10	Modélisation multiphasique	33
B.1.11	Modélisation de la turbulence	35
B.1.11.1	Introduction	35
B.1.11.2	Moyenne au sens de Reynolds	36
B.1.11.3	Équation de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds	36
B.1.11.4	Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST	37
B.1.12	Résumé	39
<b>B.2</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>40</b>

B.2.1	Introduction . . . . .	40
B.2.2	Méthode des volumes finis . . . . .	40
B.2.2.1	Généralités . . . . .	40
B.2.2.2	Discrétisations spatiales . . . . .	42
B.2.2.3	Discrétisation temporelle . . . . .	44
B.2.2.4	Discrétisation pseudo-stationnaire . . . . .	44
B.2.3	Équation de transport . . . . .	44
B.2.3.1	Introduction . . . . .	44
B.2.3.2	Reconstructions centrées . . . . .	46
B.2.3.2.1	Introduction . . . . .	46
B.2.3.2.2	Reconstruction des quantités aux faces . . . . .	47
B.2.3.2.2.1	Cas général . . . . .	47
B.2.3.2.2.2	Cas continu . . . . .	48
B.2.3.2.2.3	Cas discontinu . . . . .	49
B.2.3.2.3	Reconstruction du gradient normal aux faces . . . . .	50
B.2.3.2.3.1	Cas général . . . . .	50
B.2.3.2.3.2	Cas continu . . . . .	51
B.2.3.2.3.3	Cas discontinu . . . . .	52
B.2.3.2.4	Conclusion sur les reconstructions centrées . . . . .	52
B.2.3.3	Calcul du gradient au centre des cellules . . . . .	53
B.2.3.4	Reconstructions décentrées . . . . .	53
B.2.3.4.1	Diagrammes NVD . . . . .	53
B.2.3.4.2	Schémas élémentaires . . . . .	55
B.2.3.4.2.1	Schéma UDS . . . . .	55
B.2.3.4.2.2	Schéma DDS . . . . .	55
B.2.3.4.2.3	Schéma CDS . . . . .	56
B.2.3.4.2.4	Schéma QUICK . . . . .	57
B.2.3.4.2.5	Conclusion sur les schémas élémentaires . . . . .	57
B.2.3.4.3	Schémas hybrides . . . . .	57
B.2.3.4.3.1	Schéma GDS . . . . .	57
B.2.3.4.3.2	Schéma AVLSMART . . . . .	58
B.2.3.4.4	Schémas pour la fonction de présence . . . . .	59
B.2.3.4.4.1	Position du problème . . . . .	59
B.2.3.4.4.2	Schéma IGDS . . . . .	59
B.2.3.4.4.3	Schéma BICS . . . . .	60
B.2.3.4.4.4	Schéma BRICS . . . . .	61
B.2.3.4.5	Conclusion sur les schémas décentrés . . . . .	62
B.2.3.5	Conclusion sur l'équation de transport . . . . .	63
B.2.4	Couplage vitesse-pression . . . . .	64
B.2.4.1	Généralités . . . . .	64
B.2.4.2	Algorithme de résolution . . . . .	66
B.2.5	Application des conditions aux limites . . . . .	67
B.2.5.1	Conditions aux limites numériques . . . . .	67
B.2.5.1.1	Généralités . . . . .	67
B.2.5.1.2	Condition de Dirichlet . . . . .	68
B.2.5.1.3	Condition de Von Neumann . . . . .	68
B.2.5.2	Conditions aux limites physiques . . . . .	69
B.2.6	Conclusion et remarques diverses . . . . .	69
B.2.7	Équation de masse ajoutée . . . . .	70

## B.1 Le problème fluide en équations

L'objectif de cette section est de présenter les équations de la mécanique des fluides utilisées en hydrodynamique navale. Ainsi, le lecteur pourra se faire une idée des hypothèses et conditions de validité des équations présentées. Une attention particulière est portée sur la présentation de ces équations par une description en domaine mobile : la description dite ALE. Cette dernière est une généralisation des approches plus classiques que sont les approches eulérienne et lagrangienne.

### B.1.1 Principes généraux

Lorsque les variations de température sont faibles (ce qui est souvent le cas en hydrodynamique navale) la mécanique des fluides reposent sur deux principes : un principe de conservation et un principe d'évolution. Ces principes sont également appelés bilans. Le premier principe énonce que la masse se conserve en tout point et en tout temps<sup>1</sup> : c'est le bilan de masse. La deuxième loi de Newton énonce un lien d'égalité entre la variation temporelle de quantité de mouvement d'un système mécanique et les efforts extérieurs qui lui sont appliqués : c'est le bilan de quantité de mouvement. Ces lois sont appliquées sur des systèmes mécaniques élémentaires qui sont contenus dans des volumes de contrôle de petite taille afin d'appliquer les règles du calcul infinitésimal.

Dans le domaine de l'hydrodynamique navale, l'eau et l'air peuvent être considérés incompressibles et isothermes. Ces considérations amèneront à simplifier les équations. La viscosité dynamique  $\mu$  sera également considérée constante pour l'eau et l'air car les variations de température sont supposées faibles. La très grande majorité des écoulements industriels sont turbulents. Cette partie explicite brièvement la prise en compte des effets turbulents par le biais des modèles de turbulence.

### B.1.2 Description eulérienne et lagrangienne

L'utilisation du calcul infinitésimal repose sur l'utilisation de volumes de contrôle (également appelés particules fluide). Ce volume est à la fois petit pour pouvoir appliquer les règles du calcul infinitésimal mais assez grand pour pouvoir considérer le milieu comme continu. Cela suppose que les molécules qui constituent ce volume sont assez nombreuses pour ne pas observer de variations non continues des quantités caractéristiques de l'écoulement (vitesse et pression par exemple), c.-à-d. que le nombre de molécules est assez important pour que l'on puisse étudier des grandeurs statistiques représentatives (vitesse moyenne, pression moyenne, etc.).

Deux choix naturels se présentent au physicien : soit il considère que ce volume se déplace avec les particules qu'il contient, soit il le considère fixe et regarde les particules qui y sont à un instant donné. Le premier choix consiste à employer une description lagrangienne alors que le second choix consiste à employer une description eulérienne. Ces deux descriptions sont parfaitement équivalentes mais l'une est plus adaptée à l'étude des écoulements fluides alors que l'autre est plus adaptée à la mécanique des solides déformables.

En mécanique des fluides, il paraît difficile de suivre les mouvements des volumes de contrôle s'ils sont attachés aux particules qui le composent. De plus, il est également complexe d'exprimer chacune des grandeurs étudiées par rapport à une situation de référence (configuration initiale) qu'il est difficile de connaître. C'est pourquoi, la description eulérienne est souvent préférée<sup>2</sup> qui est, il est vrai, moins intuitive que son équivalente lagrangienne. La vision eulérienne permet cependant d'étudier des grandeurs caractéristiques en un endroit donné en regardant les particules qui y sont, celles qui y entrent et celles qui en sortent et cela, sans se préoccuper d'où elles viennent et où elles vont. Ainsi, en description eulérienne, les principales grandeurs étudiées sont utilisées sous forme de champs dépendants des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et du temps  $t$ . Par exemple, les composantes de la vitesse et la pression sont exprimées sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \qquad p = p(x, y, z, t) \qquad (\text{B.1.1})$$

1. Loi de Antoine Lavoisier (1743-1794) résumé souvent comme étant : « Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme ».

2. Des méthodes particulières permettent d'étudier les écoulements fluides avec une vision lagrangienne. Ces méthodes, telles que la méthode SPH (« Smoothing Particle Hydrodynamics ») ou la méthode MPS (« Moving Particle Semi-implicit ») par exemple, sont développées pour des applications très particulières où les effets de la viscosité sont négligeables. Ceci qui est rarement le cas en architecture naval.



Si une vision totalement eulérienne est adoptée, le domaine spatial étudié se doit d'être considéré comme étant fixe au cours du temps. Dans le cas des écoulements internes (écoulement à l'intérieur d'un tuyau par exemple) cette description est particulièrement bien adaptée, mais en hydrodynamique navale et dans bien d'autres domaines cela peut poser problème. Par exemple, dans le cadre de l'étude des interactions fluide-structure, le domaine fluide est modifié du fait des mouvements et/ou déformations de la structure. Il est donc nécessaire d'adopter une description mélangeant les visions eulérienne et lagrangienne : c'est la méthode dite ALE (« Arbitrary Lagrangian Eulerian »). Grâce à cette méthode, le volume de contrôle peut se déplacer (ou se déformer) au cours du temps mais n'est pas obligé de suivre le mouvement des particules fluides qui le composent.

La méthode proposée pour présenter les équations de l'hydrodynamique (il en existe bien d'autres) commence par traduire les deux bilans (bilan de masse et de quantité de mouvement) par une approche lagrangienne sous la forme intégrale (forme faible). Ensuite, ces bilans sont transformés par la règle de Leibniz pour passer à la description ALE. Après, la formule de Green-Ostrogradski (théorème de flux-divergence) est appliquée pour ramener les différents termes sous une même intégrale de volume. Finalement, les équations locales (forme forte) sont obtenues car le volume de contrôle utilisé est arbitraire. Les équations locales sont présentées sous forme eulérienne mais il est possible de les exprimer sous forme Lagrangienne ou Eulérienne par des changements de variable classique.

### B.1.3 Notations et théorèmes mathématiques

#### B.1.3.1 Notations

Les notations utilisées sont les suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| — $f$ : un scalaire (tenseur d'ordre 0) ;                          | — $F_{ij}$ : le coefficient en position $(i, j)$ de $\mathbf{F}$ ; |
| — $\mathbf{f}$ : un vecteur (tenseur d'ordre 1) ;                  | — $ope$ : un opérateur scalaire ;                                  |
| — $f_i$ : la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{f}$ ; | — $\overline{ope}$ : un opérateur vectoriel ;                      |
| — $\mathbf{F}$ : une matrice (tenseur d'ordre 2) ;                 | — $\overline{\overline{ope}}$ : un opérateur matriciel.            |

#### B.1.3.2 Règle de Leibnitz

Soient  $\Omega_a(t)$  un volume arbitraire délimité par sa surface  $\partial\Omega_a(t)$  de normale dirigée vers l'extérieur  $\mathbf{n}^a$  et de vitesse  $\mathbf{u}^a$ ,  $f$  une quantité scalaire suffisamment régulière dépendant des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et du temps  $t$ , alors la règle de Leibniz est :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} f dv = \iiint_{\Omega_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} f \mathbf{u}^a \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.2})$$

Il est important de comprendre la signification des différents termes de l'équation ci-dessus et d'explicitier les notations afin d'en faciliter la compréhension. Le terme de gauche représente la variation temporelle de l'intégrale de  $f$  qui suit le mouvement du volume arbitraire. Le premier terme de droite représente l'intégrale de la variation temporelle de  $f$  dans le volume  $\Omega_a(t)$  à l'instant  $t$ . Le deuxième terme de droite représente le flux convectif de  $f$  à travers la surface frontière du  $\Omega_a(t)$  à l'instant  $t$ . Par la suite, les notations suivantes sont utilisées :

- $\frac{\delta}{\delta t}$  correspond à la dérivée du point de vue ALE (volume de contrôle arbitraire), c.-à-d. en suivant le champ de vitesse  $\mathbf{u}^a$  ;
- $\frac{D}{Dt}$  correspond à la dérivée du point de vue lagrangien<sup>3</sup> (volume de contrôle matériel), c.-à-d. en suivant le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  ;

3. Selon les ouvrages, elle peut être appelée dérivée particulaire, dérivée lagrangienne ou dérivée matérielle et plus rarement dérivée totale.

—  $\frac{\partial}{\partial t}$  correspond à la dérivée du point de vue eulérien<sup>4</sup> (volume de contrôle fixe).

En formulation ALE, les quantités sont étudiées dans des domaines mobiles possédant des mouvements arbitraires. Cependant, les bilans de masse et de quantité de mouvement s'appliquent naturellement avec une formulation lagrangienne qui est la formulation initiale des théorèmes fondamentaux (bilan de quantité de mouvement et bilan de masse). Il est donc intéressant de faire le lien entre ces deux formulations.

Soit un volume de contrôle matériel  $\Omega_m(t)$ . Dans ce cas, la vitesse de la surface extérieure est égale à la vitesse des particules qui le composent, c.-à-d.  $\mathbf{u}^a = \mathbf{u}$ . Ainsi, la règle de Leibniz permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_m(t)} f dv = \iiint_{\Omega_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \iint_{\partial\Omega_m(t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^m ds \quad (\text{B.1.3})$$

Soit un volume de contrôle arbitraire  $\Omega_a(t)$ , coïncidant avec un volume de contrôle matériel  $\Omega_m(t)$  à l'instant  $t$ , alors à l'instant  $t$  (et uniquement à cet instant) :  $\Omega_m(t) = \Omega_a(t)$ ,  $\partial\Omega_m(t) = \partial\Omega_a(t)$ ,  $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}^a = \mathbf{u}$  et  $\mathbf{n}^m = \mathbf{n}^a$ . Ainsi, l'utilisation de cette hypothèse et la soustraction de l'équation (B.1.2) à l'équation (B.1.3), permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_m(t)} f dv = \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} f dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.4})$$

Cette équation permet de passer rapidement d'une description lagrangienne (donc intuitive) à une description ALE plus générale. La formulation eulérienne peut également se retrouver rapidement de la même façon en posant  $\mathbf{u}^a = \mathbf{0}$  :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_m(t)} f dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_a} f dv + \iint_{\partial\Omega_a} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.5})$$

### B.1.3.3 Formule de Green-Ostrogradski

Soient  $\Omega_a(t)$  un volume arbitraire délimité par sa surface  $\partial\Omega_a(t)$  de normale dirigée vers l'extérieur  $\mathbf{n}^a$ ,  $\mathbf{f}$  une quantité vectorielle suffisamment régulière dépendant des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et du temps  $t$ , alors la formule de Green-Ostrogradski est :

$$\iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}^a ds = \iiint_{\Omega_a(t)} \text{div}(\mathbf{f}) dv \quad (\text{B.1.6})$$

La formule de Green-Ostrogradski permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale de volume. Elle permet d'obtenir les équations sous forme locale à partir des équations sous forme intégrale.

### B.1.3.4 Théorème de Green-Riemann en dimension 3

Soient  $\Omega_a(t)$  un volume arbitraire délimité par sa surface  $\partial\Omega_a(t)$  de normale dirigée vers l'extérieur  $\mathbf{n}^a$ ,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  deux quantités scalaires suffisamment régulières dépendant des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , alors le théorème de Green-Riemann en dimension 3 exprime l'égalité suivante :

$$\iiint_{\Omega_a(t)} (f \Delta g - g \Delta f) dv = \iint_{\partial\Omega_a(t)} f \cdot \overline{\text{grad}}(g) \cdot \mathbf{n}^a ds - \iint_{\partial\Omega_a(t)} g \cdot \overline{\text{grad}}(f) \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.7})$$

Cette relation est couramment utilisée lorsque au moins l'un des Laplaciens est nul.

4. Elle peut être appelée dérivée eulérienne ou dérivée partielle selon les ouvrages.

### B.1.4 Condition de conservation spatiale

La condition de conservation spatiale peut facilement être énoncée à partir de l'équation (B.1.2) en posant arbitrairement  $f = 1$ . L'intégrale de surface est ensuite transformée en une intégrale de volume par le biais de la formule de Green-Ostrogradski (cf. équation B.1.6 page précédente). Ainsi, la condition de conservation spatiale peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} dv - \iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{u}^a \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad (\text{B.1.8})$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} dv - \iiint_{\Omega_a(t)} \text{div}(\mathbf{u}^a) dv = 0 \quad (\text{B.1.9})$$

### B.1.5 Bilan de masse

Soit un volume de contrôle arbitraire  $\Omega_a(t)$  coïncidant avec un volume de contrôle matériel  $\Omega_m(t)$  à l'instant  $t$ . Puisque le volume matériel contient les mêmes particules à chaque instant, alors sa masse est constante au cours du temps. Les équations décrivant le bilan de masse sont donc de la forme :

$$m = \iiint_{\Omega_m(t)} \rho dv \quad \frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_m(t)} \rho dv = 0 \quad (\text{B.1.10})$$

Pour se ramener à une description ALE, l'équation (B.1.4) est utilisée. Puis, le second terme est transformé en une intégrale de volume par la règle de Green-Ostrogradski (cf. équation B.1.6 page précédente). Soient les équations :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad (\text{B.1.11})$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho dv + \iiint_{\Omega_a(t)} \text{div}(\rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a)) dv = 0 \quad (\text{B.1.12})$$

Pour obtenir la forme locale de cette équation, les signes dérivée et intégrale du premier terme du membre de gauche sont intervertis par le biais de la formule de Leibnitz (cf. équation B.1.2 p. 28). La règle de Green-Ostrogradski est de nouveau utilisée pour transformer l'intégrale de surface restante en une intégrale de volume. Soient l'équation :

$$\iiint_{\Omega_a(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u}^a \cdot \mathbf{n}^a ds + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds = \iiint_{\Omega_a(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dv = 0 \quad (\text{B.1.13})$$

Cette équation étant valable quelque soit le volume arbitraire, le terme sous le signe intégrale est donc également nul. Soient les formes locales suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.1.14})$$

### B.1.6 Fluide incompressible et isotherme

Dans les domaines classiques de l'hydrodynamique navale, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la compressibilité du fluide ou les variations locales de température. L'eau et l'air peuvent être considérés comme des fluides incompressibles et isothermes. Par conséquent, la masse volumique du fluide est constante en temps

et en espace<sup>5</sup>. En utilisant cette hypothèse dans l'équation du bilan de masse en formulation ALE (cf. équation B.1.12 page précédente), l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} dv + \iiint_{\Omega_a(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) dv = 0 \quad (\text{B.1.15})$$

De plus, cette équation peut de nouveau se simplifier avec la condition de conservation spatiale (cf. équation B.1.9 page suivante) :

$$\iiint_{\Omega_a(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}) dv = 0 \quad (\text{B.1.16})$$

Soit en version locale :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.1.17})$$

### B.1.7 Loi de comportement des fluides newtoniens

Avant de réaliser le bilan de quantité de mouvement, il est indispensable de se demander quels sont les efforts surfaciques qui s'appliquent sur un volume de contrôle<sup>6</sup>. Dans un premier temps, ce volume est considéré comme matériel. Les efforts surfaciques sont modélisés sous la forme d'un tenseur en mécanique des milieux continus. Soit un volume matériel  $\Omega_m(t)$  de surface  $\partial\Omega_m(t)$  orientée vers l'extérieur et de normale  $\mathbf{n}^m$ . Soit  $\mathbf{T}$  le tenseur d'ordre 2 des contraintes de Cauchy. L'effort élémentaire  $d\mathbf{f}^s$  s'exerçant sur une surface  $ds$  autour d'un point appartenant à  $\partial\Omega_m(t)$  est donné par :

$$d\mathbf{f}^s = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}^m ds \quad d\mathbf{f}_i^s = T_{ij} \cdot n_j^m ds \quad (\text{B.1.18})$$

En hydrodynamique navale et dans bien des domaines, les fluides considérés sont newtoniens, c.-à-d. :

- lorsque le fluide est au repos, le tenseur des contraintes est sphérique et égale à la pression ;
- le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformations.

Le tenseur des taux de déformations  $\mathbf{S}_{ij}$  est défini par :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left( \overline{\operatorname{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\operatorname{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.1.19})$$

Mathématiquement, la loi des fluides newtoniens peut se présenter en séparant la partie sphérique et la partie déviatorique du tenseur des taux de déformations. Cette décomposition, fait intervenir les coefficients de Lamé, c.-à-d. les coefficients de viscosité dynamique  $\mu$  et de dilatation  $\lambda$ . Soient les équations :

$$\mathbf{T} = -p \cdot \mathbf{I}_d + \mathcal{T} \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij} \quad (\text{B.1.20})$$

$$\mathcal{T} = 2\mu \cdot \mathbf{S} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{I}_d \quad \mathcal{T}_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda S_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{B.1.21})$$

Les coefficients de Lamé sont reliés entre eux par le coefficient de viscosité volumique  $\kappa$  qui est défini par :

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (\text{B.1.22})$$

L'hypothèse de Stokes consiste à supposer la nullité du coefficient de viscosité volumique. En réalité, cette hypothèse n'est rigoureusement vérifiée que pour des gaz monoatomiques. Les lois de la thermodynamique

5. De manière rigoureuse, la masse volumique d'un fluide dépend de la température et de la pression. Cette relation est couramment donnée par une loi d'état (loi des gaz parfaits par exemple). En hydrodynamique navale, ce sont des fluides isothermes (non-dépendance de la masse volumique à la température) et incompressibles (non-dépendance de la masse volumique à la pression) qui sont considérés.

6. Les efforts volumiques sont principalement les efforts de gravité. Ils ne demandent donc aucun travail de modélisation particulière.

prouve uniquement que le coefficient de viscosité volumique est positif ou nul (les frottements visqueux ne peuvent pas créer de l'énergie mais uniquement en dissiper). Malgré qu'elle soit couramment utilisée, cette hypothèse ne semble pas toujours vérifiée [Gad-el Hak, 1995]. L'hypothèse de Stokes revient donc à poser :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (\text{B.1.23})$$

Heureusement, en hydrodynamique navale les fluides sont souvent considérés comme étant incompressibles<sup>7</sup>. Par conséquent, l'influence de la viscosité volumique disparaît puisque le terme  $\text{tr}(\mathbf{S})$  est nul d'après le bilan de masse (cf. équation B.1.17 page précédente). Pour un fluide newtonien incompressible, le tenseur des contraintes est donc de la forme :

$$\mathbf{T} = -p \cdot \mathbf{I}_d + \mu \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.1.24})$$

### B.1.8 Bilan de quantité de mouvement d'un fluide newtonien

Soit un volume de contrôle arbitraire  $\Omega_a(t)$  coïncidant avec un volume de contrôle matériel  $\Omega_m(t)$  à l'instant  $t$ . La seconde loi de Newton énonce que l'évolution temporelle de la quantité de mouvement du volume de contrôle matériel  $\Omega_m(t)$  est égale à la résultante des forces extérieures agissant sur ce volume et sur sa surface frontière  $\partial\Omega_m(t)$ . Soit l'équation :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \mathbf{u} dv = + \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \mathbf{f} dv + \iint_{\partial\Omega_m(t)} \mathbf{d}\mathbf{f}^s ds \quad (\text{B.1.25})$$

De la même façon que pour le bilan de masse, les différents termes sont ramenés à une description ALE<sup>8</sup> et l'intégrale du terme de diffusion est ramenée à une intégrale de volume la formule de Green-Ostrogradski (cf. équation B.1.6 p. 29). Soient les équations :

$$\underbrace{\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} dv}_{\text{inertionnariaté}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds}_{\text{convection}} = \underbrace{\iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{f} dv}_{\text{production}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}^a ds}_{\text{diffusion}} \quad (\text{B.1.26})$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds = \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{f} dv + \iiint_{\Omega_a(t)} \overline{\text{div}}(\mathbf{T}) dv \quad (\text{B.1.27})$$

Si le fluide est considéré newtonien et incompressible, le terme de diffusion peut être développé par l'équation (B.1.24). Comme les opérateurs de divergence et de gradient sont inversibles car linéaires, ce terme de diffusion peut être simplifié par l'équation de continuité (cf. équation B.1.16 page précédente). Soient les équations :

$$\overline{\text{div}}(\mathbf{T}) = -\overline{\text{grad}}(p) + \overline{\text{div}}(\mathcal{T}) \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{B.1.28})$$

$$\overline{\text{div}}(\mathcal{T}) = \mu \cdot \overline{\text{div}} \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) \quad \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{B.1.29})$$

$$\overline{\text{div}}(\mathcal{T}) = \mu \cdot \overline{\text{div}} \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right) \quad \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{B.1.30})$$

Il est important de remarquer que ces simplifications ne sont valables que dans le cas d'un fluide monophasique incompressible et isotherme. Dans le cas d'une modélisation multiphasique utilisant une méthode VOF par

7. Il existe néanmoins le cas particulier des écoulements cavitants. Dans ce cas, il y a bien conservation de la masse mais la divergence de la vitesse n'est pas nulle.

8. Il est rappelé qu'à l'instant  $t$  et uniquement à cet instant, les volumes  $\Omega_m(t)$  et  $\Omega_a(t)$  sont identiques, c.-à-d. :  $\Omega_m(t) = \Omega_a(t)$ ,  $\partial\Omega_m(t) = \partial\Omega_a(t)$ ,  $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}^a = \mathbf{u}$  et  $\mathbf{n}^m = \mathbf{n}^a$ .

exemple, ces opérations ne sont plus valables car la viscosité dynamique possède une dépendance spatiale (cf. section B.1.10). Finalement, l'équation de quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible monophasique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} d\mathbf{v} + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds = \iiint_{\Omega_a(t)} \left[ -\overline{\text{grad}}(p) + \mu \cdot \overline{\text{div}} \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right) + \rho \mathbf{f}^v \right] d\mathbf{v} \quad (\text{B.1.31})$$

De manière identique à l'équation de continuité, le terme de convection est ramené à une intégrale de volume par l'équation (B.1.6)<sup>9</sup> et les signes dérivée et intégrale sont intervertis par la règle de Leibnitz pour mettre la totalité des termes sous une même intégrale de volume. Finalement, en convention d'Einstein, l'équation locale de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible newtonien s'écrit en formulation eulérienne :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \rho f_i^v \quad (\text{B.1.32})$$

### B.1.9 Forme convective

Les équations de Navier-Stokes peuvent également sous une autre forme dite convective. Cette écriture est intéressante du fait que la masse volumique du fluide est sorti du terme instationnaire et du terme de convection. Pour cela, il faut remarquer que, d'après l'équation (B.1.14) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.1.33})$$

Ainsi, le membre de gauche du bilan de quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes avec une formulation eulérienne peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \quad (\text{B.1.34})$$

$$= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{équation (B.1.33)}=0} \quad (\text{B.1.35})$$

$$= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{B.1.36})$$

Soit pour résumer :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{B.1.37})$$

La forme convective est également valable dans le cadre d'un écoulement multiphasique (cf. section B.1.10) et/ou turbulent (cf. section B.1.11 p. 35).

### B.1.10 Modélisation multiphasique

La modélisation multiphasique utilisée pour modéliser la surface libre repose sur une méthode dite de capture. Les deux phases non-miscibles (l'air et l'eau) sont vues comme un fluide unique dont les propriétés (masse volumique et viscosité) varient avec une fonction de présence  $c_i$ . Différentes simplifications réalisées aux sections précédentes ne sont donc plus valables. Les propriétés de chacune des phases restent, quant à elles,

9. Il faut au préalable remarquer que  $\rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] = [\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a)^c] \cdot \mathbf{n}^a$ .

indépendante du temps et de l'espace. Les propriétés du fluide « numérique » sont données par les équations ci-dessous <sup>10</sup>.

$$\sum_i c_i = 1 \quad \rho = \sum_i c_i \rho_i \quad \mu = \sum_i c_i \mu_i \quad (\text{B.1.38})$$

La fonction de présence est traitée comme une quantité lagrangienne. Elle respecte donc l'équation suivante :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} c_i dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} c_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad (\text{B.1.39})$$

La première étape consiste à dériver une nouvelle équation de continuité. Pour cela, les équations suivantes sont obtenues pour isoler la masse volumique d'une phase arbitraire (masse volumique considérée non-nulle) :

$$c_j = 1 - \sum_{i \neq j} c_i \quad (\text{B.1.40})$$

$$\rho = c_j \rho_j + \sum_{i \neq j} c_i \rho_i = \rho_j \left( 1 - \sum_{i \neq j} c_i \right) + \sum_{i \neq j} c_i \rho_i = \rho_j + \sum_{i \neq j} c_i (\rho_i - \rho_j) \quad (\text{B.1.41})$$

En utilisant les équations (B.1.41) et (B.1.39) dans l'équation de continuité (cf. équation B.1.11 p. 30), une nouvelle équation de continuité qui est équivalente à celle obtenue dans le cas d'un écoulement monophasique est obtenue :

$$0 = \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.42a})$$

$$= \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \left( \rho_j + \sum_{i \neq j} c_i (\rho_i - \rho_j) \right) dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \left( \rho_j + \sum_{i \neq j} c_i (\rho_i - \rho_j) \right) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.42b})$$

$$= \rho_j \left[ \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds \right] + \sum_{i \neq j} (\rho_i - \rho_j) \underbrace{\left[ \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} c_i dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} c_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a ds \right]}_{\text{équation (B.1.39)=0}} \quad (\text{B.1.42c})$$

$$= \rho_j \left[ \underbrace{\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} dv - \iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{u}^a \cdot \mathbf{n}^a ds}_{\text{équation (B.1.8)=0}} + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds \right] = \rho_j \iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds \quad (\text{B.1.42d})$$

Soit pour résumer :

$$\iint_{\partial\Omega_a(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad (\text{B.1.43})$$

Ainsi, de manière identique au cas monophasique <sup>11</sup> le champ de vitesse est de nouveau à divergence nulle. La partie sphérique du tenseur des taux de déformations est donc également nulle. L'hypothèse de Stokes n'est donc pas nécessaire. Cependant, au contraire du cas monophasique, la viscosité dynamique possède une dépendance spatiale <sup>12</sup>. Par conséquent, la transposée du gradient de vitesse ne peut plus être simplifiée. Au final,

10. Dans le cas d'un écoulement monophasique,  $i = 1$ .

11. c.-à-d. en utilisant la formule de Green-Ostrogradski et en faisant tendre le volume arbitraire vers 0

12. Ce ci est également vrai lorsque l'écoulement est turbulent (cf. section B.1.11.3 p. 36).

le bilan de quantité de mouvement peut s'exprimer sous forme intégrale par l'équation ci-dessous.

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} d\mathbf{v} + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] d\mathbf{s} = \iiint_{\Omega_a(t)} \left[ -\overline{\text{grad}}(p) + \cdot \overline{\text{div}} \left( \mu \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) \right) + \rho \mathbf{f}^v \right] d\mathbf{v} \quad (\text{B.1.44})$$

## B.1.11 Modélisation de la turbulence

### B.1.11.1 Introduction

En hydrodynamique navale, tout comme dans la majorité des écoulements industriels ou naturels, les écoulements sont dits turbulents. Un écoulement turbulent est le siège de phénomènes complexes qu'on peut qualifier d'instationnaires, non-linéaires, dissipatifs, tridimensionnels, rotationnels, diffusifs, bruyants et imprédictibles. Ils apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense par rapport aux forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. Le niveau de turbulence d'un écoulement est caractérisé par le nombre de Reynolds.

Au sein d'un écoulement turbulent, l'observation expérimentale a montré que les quantités macroscopiques (vitesse, pression, etc.) possèdent des fluctuations chaotiques. Ces fluctuations chaotiques possèdent des répartitions spectrales continues en fréquence et nombre d'onde. La résolution numérique de la totalité de ces deux spectres est l'objectif des méthodes DNS (« Direct Numerical Simulation »).

D'un point de vue industriel, il n'est pas nécessaire de résoudre la totalité de ces spectres mais uniquement ceux qui sont pertinents (ou bien plus souvent, ceux qu'on peut modéliser grâce aux moyens informatiques disponibles). Par exemple, les grandes échelles peuvent être résolues par des modèles LES (« Large Eddy Simulation »). Ces modèles appliquent un filtre spatial et temporel à ces spectres continus. En dessous des fréquences de coupure de ces filtres, un modèle de turbulence de « sous-maille » est utilisé. Ces modèles étant encore coûteux à l'heure actuelle, les principales études industrielles utilisent plutôt des modèles de type RANSE (« Reynolds Averaged Navier Stokes Equations ») qui ont pour objectif de représenter l'action de la turbulence sur l'écoulement moyen par une approche statistique nettement moins coûteuse. Des approches couplées entre RANSE, lorsque l'on est proche d'une paroi, et LES, dans le cas contraire, sont regroupées sous l'acronyme DES (« Detached Eddy Simulation ») et permettent d'étendre les méthodes LES à des écoulements pariétaux. Elles restent néanmoins très coûteuses par rapport aux modèles RANSE qui demeurent, à l'heure actuelle, les modèles de référence au niveau industriel.

Avant de passer à la présentation des modèles RANS, il est possible de s'intéresser à un cas simple pour fixer les idées sur la difficulté d'utiliser des modélisations turbulentes autres que les modèles RANS. Les plus grandes échelles spatiales sont de l'ordre de la taille de l'obstacle (et ceci quel que soit le nombre de Reynolds). Les plus petites structures tourbillonnaires sont, quant à elles, données par l'échelle de Kolmogorov (ou échelle de dissipation visqueuse) et dépendent directement du nombre de Reynolds. L'échelle de Kolmogorov, notée  $\eta$ , est donnée par :

$$\frac{L}{\eta} = Re^{\frac{3}{4}} \quad (\text{B.1.45})$$

À partir de cette échelle, le nombre minimum de mailles pour un domaine spatiale de volume égal à  $L^3$  peut être donné par l'estimation de Landau :

$$N \approx Re^{\frac{9}{4}} \quad (\text{B.1.46})$$

Par exemple, un écoulement autour d'un bateau de 25 m avançant à une vitesse de 10 nœuds est caractérisé par un nombre de Reynolds de l'ordre de  $10^8$  et donc, d'après Kolmogorov, la taille des plus petites structures tourbillonnaires est de l'ordre de 5 micromètres et le nombre minimum de volumes de contrôle est de l'ordre de  $10^{18}$ . Cet exemple montre bien qu'il serait impossible de décrire parfaitement un écoulement turbulent autour d'un bateau car le nombre de volumes de contrôle nécessaire est trop important pour pouvoir être appréhendé



avec les moyens informatiques actuels. La simulation directe ne peut être utilisée que pour des nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à  $10^4$ . Dans le cas d'une résolution par une méthode LES ou DES, le nombre de mailles nécessaire dépend fortement de la fréquence de coupure des filtres spatiaux et temporels utilisés.

L'étude des propriétés turbulentes d'un écoulement est une discipline spécifique et complexe de la mécanique des fluides comme peut le suggérer la précédente analyse. Cette section a pour objectif d'introduire la base des méthodes RANS et les équations du modèle de turbulence utilisé au cours de ces travaux. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux nombreux ouvrages qui existent sur le sujet [Wilcox, 1993], [Chassaing, 2000].

### B.1.11.2 Moyenne au sens de Reynolds

Les modèles de turbulences RANS reposent sur une décomposition des variables (vitesse et pression) en une partie moyenne et en une partie fluctuante. Cette décomposition se nomme décomposition de Reynolds. La partie moyenne et la partie fluctuante de la vitesse sont respectivement notées  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{u}'$  (idem pour la pression). Ainsi, la décomposition de Reynolds est définie par :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad \text{et} \quad p = \bar{p} + p' \quad (\text{B.1.47})$$

La moyenne utilisée est appelée moyenne d'ensemble ou moyenne de Reynolds. Elle consiste à réaliser  $N$  expériences indépendantes sur un écoulement dont les conditions initiales et aux limites sont identiques pour en extraire des quantités moyennes. Par exemple, pour une quantité macroscopique  $f$  dépendant du temps  $t$  et de la position  $\mathbf{x}$ , la moyenne de Reynolds est définie par :

$$\overline{f(\mathbf{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.1.48})$$

Soient  $f$  et  $g$  deux propriétés macroscopiques et  $\lambda$  un scalaire. La moyenne de Reynolds possède les propriétés suivantes (règles de Reynolds) :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f} & \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} & \overline{\lambda \cdot f} &= \lambda \cdot \bar{f} \\ \overline{f \cdot g} &= \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} & \overline{\bar{f} \cdot g} &= \bar{f} \cdot \bar{g} & \overline{\partial f / \partial t} &= \partial \bar{f} / \partial t \\ \overline{\partial f / \partial x} &= \partial \bar{f} / \partial x & \overline{\int f \cdot dt} &= \int \bar{f} \cdot dt & \overline{\int f \cdot dx} &= \int \bar{f} \cdot dx \end{aligned} \quad (\text{B.1.49})$$

### B.1.11.3 Équation de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds

Dans cette partie, la décomposition de Reynolds est appliquée à la vitesse et à la pression au sein des bilans de masse (cf. équation B.1.43 p. 34) et de quantité de mouvement (cf. équation B.1.44 page précédente) obtenus dans le cadre d'un écoulement multiphasique. La modélisation de l'écoulement moyen étant l'objectif, la moyenne de Reynolds est appliquée aux équations obtenues. Du fait des règles de Reynolds présentées précédemment, seuls les termes moyens et les produits des parties fluctuantes restent. L'équation de continuité ainsi obtenue est donnée par l'équation (B.1.50). L'équation de quantité de mouvement correspondante est donnée par l'équation (B.1.51). Afin de ne pas alourdir les notations, seules les parties fluctuantes gardent leur notation spécifique. Les autres quantités (vitesses et pression) sont considérées comme étant moyennées au sens de Reynolds.

$$\iint_{\partial \Omega_a(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad (\text{B.1.50})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} dv + \iint_{\partial \Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds = \\ \iiint_{\Omega_a(t)} \left[ -\overline{\text{grad}}(p) + \overline{\text{div}} \left( \mu \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)' \right) - \rho \mathcal{R} \right) + \rho \mathbf{f}^v \right] dv \end{aligned} \quad (\text{B.1.51})$$

Le tenseur d'ordre 2 supplémentaire qui apparaît dans le bilan de quantité de mouvement est appelé tenseur des contraintes de Reynolds. Il est défini par :

$$\mathcal{R}_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (\text{B.1.52})$$

Ce tenseur domine généralement le tenseur des contraintes visqueuses. Cependant, au sein des couches limites, les effets visqueux deviennent prépondérants. Le tenseur des contraintes de Reynolds étant symétrique, il apporte 6 nouvelles inconnues. Par conséquent, il est nécessaire de trouver six nouvelles équations pour fermer le système (problème de fermeture).

Le modèle de turbulence  $k - \omega$  SST (modèle principal utilisé lors de ces travaux) est un modèle dit du premier ordre, c.-à-d. qu'il relie algébriquement le tenseur de Reynolds aux grandeurs physiques moyennes. L'hypothèse de fermeture utilisée est l'hypothèse de Boussinesq. Cette hypothèse suppose que le tenseur de Reynolds se comporte de manière identique au tenseur des contraintes des fluides newtoniens (cf. section B.1.7 p. 31) et utilise le concept de viscosité turbulente  $\mu_t$ . Soit l'équation suivante :

$$\mathcal{R}_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (\text{B.1.53})$$

Au sein de l'équation précédente,  $k$  est l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes par unité de masse. Elle est définie par :

$$k = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (\text{B.1.54})$$

En lieu et place des six équations nécessaires à l'origine, il reste à trouver deux équations supplémentaires (une pour  $k$  et une pour  $\mu_t$ ). L'équation de quantité de mouvement devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} dv + \iint_{\partial\Omega_a(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds = \\ \iiint_{\Omega_a(t)} \left[ -\overline{\text{grad}}(p) + \overline{\text{div}} \left( (\mu + \mu_t) \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I}_d \right) + \rho \mathbf{f}^v \right] dv \end{aligned} \quad (\text{B.1.55})$$

La viscosité turbulente est déterminée par une approche dimensionnelle. Le modèle  $k - \omega$  SST utilise l'énergie cinétique des fluctuations et une fréquence caractéristique de ces fluctuations :  $\omega$ . La viscosité turbulente est ainsi définie par :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (\text{B.1.56})$$

Une équation de transport pour les composantes du tenseur des Reynolds peut être obtenue en prenant la différence de l'équation de Navier-Stokes avec cette même équation moyennée. Des opérations mathématiques et la modélisation de certains termes sont ensuite nécessaires pour obtenir une équation de transport pour  $k$ . L'établissement d'une équation de transport pour  $\omega$  est un peu plus empirique [Wilcox, 1993]. L'établissement des équations correspondantes n'est pas présentée car les opérations mathématiques sont assez longues.

#### B.1.11.4 Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST

De manière rapide, le modèle  $k - \omega$  SST (« Shear Stress Transport ») [Menter, 1994] modifie légèrement l'expression de la viscosité turbulente du modèle  $k - \omega$  BSL (« BaSeLine ») [Menter, 1993] qui lui même réalise une transition entre le modèle  $k - \omega$  original [Wilcox, 1988] utilisé en proche paroi et un des modèles  $k - \epsilon$  au loin [Launder et Sharma, 1974] ( $\epsilon$  représente le taux de dissipation de l'énergie des fluctuations). La viscosité turbulente est définie par :

$$\mu_t = \frac{\rho k / \omega}{\max(1, \Omega F_2 / (a_1 \omega))} \quad (\text{B.1.57})$$

Au sein de l'équation précédente,  $a_1$  est une constante valant 0.31,  $\Omega$  représente la vorticité et la fonction auxiliaire  $F_2$  est définie à partir de la distance à la paroi  $d$  :

$$F_2 = \tanh \left( \left[ \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{0.09d\omega}, \frac{500\mu}{\rho d^2 \omega} \right) \right]^2 \right) \quad (\text{B.1.58})$$

L'équation de transport de  $\omega$  inclue une fonction auxiliaire  $F_1$  réalisant la transition entre le modèle original et le modèle basé sur la variable  $\epsilon$ . Les équations de transport des deux quantités turbulentes  $k$  et  $\omega$  sont :

$$\frac{\delta \rho k}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j k - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \mathcal{R}_{ij} \mathcal{S}_{ij} - \beta^* \rho \omega k \quad (\text{B.1.59})$$

$$\frac{\delta \rho \omega}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_j \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \gamma \rho \Omega^2 - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (\text{B.1.60})$$

Le tenseur de Reynolds  $\mathcal{R}$  est évalué par l'hypothèse de Boussinesq (cf. équation B.1.53 page précédente). Il est rappelé que  $\mathcal{S}$  est le tenseur des taux de déformations (cf. équation B.1.19 p. 31). Le rôle de la fonction auxiliaire est de réaliser une transition des coefficients entre le modèle original dans la couche limite et le modèle  $k - \epsilon$  modifié dans les zones de cisaillement et les zones externes. Elle est définie par :

$$F_1 = \tanh \left( \left[ \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09d\omega}, \frac{500\mu}{\rho d^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right) \right]^4 \right) \quad (\text{B.1.61})$$

avec :

$$CD_{k\omega} = \max \left( \frac{2\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (\text{B.1.62})$$

Les constantes utilisées sont :

$$a_1 = 0.31 \quad \beta^* = 0.09 \quad \kappa = 0.41 \quad (\text{B.1.63})$$

Les coefficients  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\omega$  se définissent par une transition entre les coefficients du modèle original, (indice 1) et le modèle  $k - \epsilon$  modifié (indice 2).

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad \phi = \{\beta, \gamma, \sigma_k, \sigma_\omega\} \quad (\text{B.1.64})$$

Les coefficients  $\gamma_i$  et les constantes des différents modèles sont donnés par les équations suivantes :

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta} - \frac{\sigma_{\omega i} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (\text{B.1.65})$$

$$\sigma_{k1} = 0.85 \quad \sigma_{\omega 1} = 0.500 \quad \beta_1 = 0.0750 \quad \gamma_1 = 0.553 \quad (\text{B.1.66})$$

$$\sigma_{k2} = 1.00 \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856 \quad \beta_2 = 0.0828 \quad \gamma_2 = 0.440 \quad (\text{B.1.67})$$

Au niveau des parois, l'énergie cinétique des fluctuations  $k$  est nulle puisque il y a adhérence des particules fluides. Une analyse asymptotique à proximité de la paroi permet de déterminer une condition aux limites pour  $\omega$ . En notant  $\Delta y$  la distance entre le premier point de calcul et la paroi, les conditions suivantes sont utilisées :

$$k = 0 \quad \omega = 10 \frac{6\mu}{\beta \rho (\Delta y)^2} \quad (\text{B.1.68})$$

En ce qui concerne les conditions aux limites à l'infini, les relations suivantes sont préconisées [Wilcox, 1988] :

$$\omega_\infty = \lambda \frac{u_{\text{ref}}}{L_{\text{ref}}} \quad \mu_{t\infty} = 10^{-3} \mu \quad k_\infty = \frac{\mu_{t\infty} \omega_\infty}{\rho} \quad (\text{B.1.69})$$

$L_{\text{ref}}$  et  $u_{\text{ref}}$  sont des grandeurs de référence et  $\lambda$  peut varier entre 1 et 10.

### B.1.12 Résumé

Cette section rappelle les différentes équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds d'un écoulement multiphasique lorsque le fluide est isotherme, incompressible et newtonien. De plus, l'hypothèse de Boussinesq est supposée vérifiée. Le bilan de masse peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\oint_{\partial\Omega_d(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^a ds = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.1.70})$$

Le bilan de quantité de mouvement peut, quant à lui, s'écrire sous la forme suivante (formulation ALE) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \iiint_{\Omega_d(t)} \rho \mathbf{u} dv + \oint_{\partial\Omega_d(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}^a) \cdot \mathbf{n}^a] ds = \\ \iiint_{\Omega_d(t)} \left[ -\overline{\text{grad}}(p) + \overline{\text{div}} \left( (\mu + \mu_t) \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) + \left( \overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) \right)^t \right) - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I}_d \right) + \rho \mathbf{f}^v \right] dv \end{aligned} \quad (\text{B.1.71})$$

Avec une formulation eulérienne, cette dernière équation peut s'écrire sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] + \rho f_i^v \quad (\text{B.1.72})$$

Il est important de rappeler que, du fait de la modélisation multiphasique, la masse volumique  $\rho$  et la viscosité dynamique  $\mu$  possèdent une dépendance spatiale et temporelle dans le cas des formulations eulérienne et ALE. En outre, du fait des modèles de turbulence utilisés, la viscosité turbulente  $\mu_t$  possède également une dépendance spatiale et temporelle (toutes formulations). De plus, dans certains cas il est préférable de s'appuyer sur la forme convective pour obtenir certaines équations plus facilement (cf. section B.1.9 p. 33).

## B.2 Résolution numérique

L'objectif de cette section est de présenter les méthodes numériques employées au sein du code ISIS-CFD développé au sein de l'équipe DSPM<sup>13</sup> (Dynamique des Systèmes Propulsifs Marins) afin de résoudre les équations de Navier-Stokes exprimées en moyenne de Reynolds pour un écoulement incompressible, isotherme, turbulent et diphasique. Ces méthodes n'ont bien sûr pas été développées dans ce travail de thèse mais résultent de nombreuses années de recherche réalisées par cette équipe. Il est cependant important d'en comprendre le fonctionnement précis afin de mettre en place un algorithme de couplage fluide-structure efficace. La très grande majorité des remarques et notations sont tirées de nombreuses thèses ou publications [Leroy, 2004], [Queutey et Visonneau, 2007] et [Wackers *et al.*, 2011].

### B.2.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds sont discrétisées temporellement par différences finies et spatialement par la méthode des volumes finis. Ces discrétisations ont pour objectif de former des systèmes linéaires de type ( $\mathbf{x}$  représentant les inconnues recherchées) :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{B.2.1})$$

De manière simplifiée, les non-linéarités ainsi que le couplage vitesse-pressure sont pris en compte de manière itérative, c.-à-d. qu'il est nécessaire d'itérer sur  $i$  jusqu'à convergence des systèmes de type :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{b}(\mathbf{x}^i) \quad (\text{B.2.2})$$

Ce processus itératif est appelé méthode du point fixe. Une itération est appelée boucle de résolution linéaire. Ces systèmes linéaires sont obtenus après discrétisation et linéarisation des équations. Des conditions initiales et aux limites doivent également être spécifiées afin que les systèmes linéaires soient inversibles, c.-à-d. puissent être résolus.

Cette section présente les étapes de la construction des systèmes linéaires, les algorithmes liant les différents systèmes et les méthodes numériques de résolution de ces systèmes.

### B.2.2 Méthode des volumes finis

#### B.2.2.1 Généralités

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser l'espace spatial fluide  $\bar{\Omega}^f$  par des volumes de contrôle  $\Omega_m$  tel que l'ensemble des volumes de contrôle remplit l'espace et qu'aucun volume de contrôle n'en intersecte un autre<sup>14</sup> :

$$\bar{\Omega}^f = \bigcup_{i=1}^m \Omega_m \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \{\emptyset\} \quad (\text{B.2.3})$$

Ces volumes de contrôle sont délimités par un certain nombre de faces planes et peuvent être amenés à évoluer au cours du temps (déplacement rigide, déformation, etc.). Ce sont donc les versions discrètes des volumes arbitraires utilisés lors de l'introduction des équations de la mécanique des fluides (cf. section B.1.2 p. 27). La méthode des volumes finis se base donc sur les formes intégrales des équations de Navier-Stokes. Par la suite, les notations suivantes sont utilisées (cf. figure B.2.1 page suivante) :

—  $c$  : le centre barycentrique du volume de contrôle ;

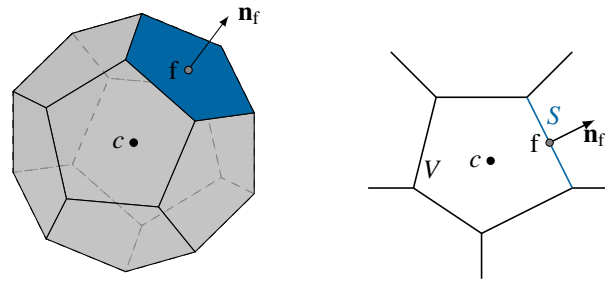
13. ex. Équipe Modélisation Numérique (E.M.N.).

14. Cette deuxième condition n'est pas obligatoirement respectée dans le cas de maillage chimère (« overset grid method ») [Steger *et al.*, 1983] qui est une méthode très particulière demandant des développements importants. À l'heure actuelle, ce type de maillage n'est pas pris en compte par le solveur ISIS-CFD.

- $V$  : indifféremment le volume de contrôle et sa valeur numérique ;
- $f$  : le centre barycentrique d'une face ;
- $S$  : la surface de la face ;
- $\mathbf{n}_f$  : la normale unitaire de la face pointant vers l'extérieur du volume de contrôle ;
- $\mathbf{u}^d$  : le champ de vitesse du domaine spatial ;
- $i$  : l'index des itérations de Picard,  $i + 1$  représentant l'itération courante ;
- $t$  : le temps ;
- $\Delta t$  : le pas de temps.

Les positions du centre barycentrique d'une face et d'un volume de contrôle, notées respectivement  $\mathbf{x}_f$  et  $\mathbf{x}_c$ , sont définies par les équations ci-dessous.

$$\oint_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) d\mathbf{s} = \mathbf{0} \qquad \iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) d\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (\text{B.2.4})$$



**Figure B.2.1 :** Un volume de contrôle – Vues 3D et 2D et notations

Il y a peu d'hypothèses réalisées sur la forme des volumes de contrôle et des faces qui les constituent afin de pouvoir traiter facilement des géométries complexes. La possibilité d'utiliser des maillages (ensembles des volumes de contrôle) non structurés rend le solveur ISIS-CFD fonctionnel d'un point de vue industriel. Du fait de cette discrétisation, les matrices des systèmes linéaires sont principalement creuses<sup>15</sup> ce qui nécessite des méthodes de résolution et des méthodes de stockage spécifiques.

Les inconnues (vitesse, pression, quantités turbulentes, etc.) sont toutes stockées au centre des volumes de contrôles (arrangement « cell-centered collocatif »). Il existe d'autres méthodes (stockage au centre des faces, stockage aux nœuds, stockage hybride au centre des faces et des volumes de contrôle, etc.), chacune ayant ses avantages et inconvénients. Le choix réalisé ici possède trois avantages principaux. En effet, cette méthode permet un stockage des variables moins coûteux et facile à mettre en place. De plus, les variables étant placées aux mêmes endroits, les méthodes de reconstruction sont identiques pour chaque quantité et certains coefficients peuvent être réutilisés pour l'ensemble des variables (coefficients géométriques). D'un point de vue informatique, ce choix est donc totalement justifié. Elle est également connue pour permettre un traitement des conditions aux limites relativement simple. Le principal défaut de cette méthode est qu'il est nécessaire de traiter de manière particulière le couplage vitesse-pression au sein de l'équation de quantité de mouvement discrète (cf. section B.2.4.2 p. 66). C'est pour cette raison, que l'approche opposée (arrangement « staggered »), qui consiste à stocker les variables de vitesse et de pression en différents endroits était principalement utilisée jusqu'au début des années 1980 malgré des difficultés supplémentaires [Ferziger et Peric, 1999].

La résolution des équations est réalisée de manière séquentielle. En particulier, l'équation de quantité de mouvement et de celle de continuité ne sont pas résolues en même temps, (« Segregated method » ou « Decoupled method »). Ainsi, au sein d'une itération non-linéaire, la fonction de présence et les quantités turbulentes sont résolues dans un premier temps<sup>16</sup> avec le champ de vitesse de l'itération non-linéaire précédente. S'en suit la prédiction d'un champ de vitesse à l'aide du champ de pression connu (de l'itération précédente) et des quantités évaluées précédemment. Cette prédiction utilise uniquement l'équation de quantité de mouvement mais pas

15. Pour des maillages structurés, les matrices sont multidimensionnelles par bloc.

16. Pour le modèle  $k - \omega$  SST qui comporte deux équations couplées en  $k$  et  $\omega$  (cf. section B.1.11.4 p. 37), la résolution est également séquentielle. L'équation de transport de  $k$  est résolue avant celle de  $\omega$ .

l'équation de continuité. Ce champ de vitesse peut ainsi ne pas respecter cette dernière équation et il est donc nécessaire de le corriger dans un second temps. Il reste également à évaluer le nouveau champ de pression. Or, il n'existe pas d'équation propre à la pression (dans le cas d'un fluide incompressible isotherme) et la pression n'intervient que par le biais de son gradient dans l'équation de continuité. Une équation de pression est donc déduite de l'équation de continuité et résolue. Ce nouveau champ de pression, évalué à partir de l'équation de continuité transformée, permet d'évaluer la correction nécessaire pour que le champ de vitesse respecte l'équation de continuité. Cette méthode de prédiction-corrrection est appelée SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [Patankar et Spalding, 1972]. Le champ de vitesse étant modifié, ces opérations sont de nouveau réalisées séquentiellement (résolution des non linéarités, du couplage vitesse pression et des couplages secondaires) jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. Une fois le critère satisfait, il est possible de passer à l'instant suivant.

Les étapes d'une boucle de résolution sont rapidement présentées à la figure B.2.2. Il est possible de remarquer que la réévaluation des métriques n'est nécessaire que si le domaine fluide ou sa discrétisation (raffinement de maillage) sont modifiés en cours de simulation. Ceci est généralement le cas lors des simulations d'interactions fluide-structure instationnaires. Cette étape consiste à évaluer les volumes, les surfaces, les normales, les coefficients géométriques des systèmes linéaires et le terme de vitesse du domaine qui intervient dans les termes de convection. De même, l'évaluation des quantités turbulentes et des fonctions de présence n'est respectivement nécessaire qu'en cas de modélisation de la turbulence et de modélisation d'écoulement diphasique.

Un critère de convergence souvent employé se base sur l'évaluation des résidus. Les résidus sont définis comme étant la norme de la différence entre le vecteur source et le produit de la matrice avec le vecteur inconnu de l'itération précédente, et ceci, avant la résolution du système.

$$\text{Res}^{i+1} = \left\| A(x^i) \cdot x^i - b(x^i) \right\| \quad (\text{B.2.5})$$

Certains termes des équations de transport sont évalués de manière explicite au sein du processus itératif de Picard afin de simplifier le processus de résolution numérique (linéarisation spatiale des équations) et/ou améliorer les propriétés de la matrice à inverser. La boucle de résolution non-linéaire est donc nécessaire pour à la fois :

- résoudre le couplage vitesse-pression ;
- résoudre les non-linéarités spatiales ;
- résoudre les couplages secondaires :
  - fonction de présence ;
  - quantités turbulentes ;
  - etc.

### B.2.2.2 Discrétisations spatiales

Les intégrales de volume et de surface, sont évaluées selon des approximations précises à l'ordre 2 ce qui correspond, dans le cadre des volumes finis, à l'intégration d'un polynôme linéaire. Il est ainsi dit qu'une précision à l'ordre 2 est obtenue lorsque l'erreur de troncature est bornée par la norme au carré de la distance, c.-à-d. que les approximations sont exactes pour un problème linéaire. Soit  $Q$  une quantité dépendant de l'espace. Le développement de Taylor linéaire de cette quantité est de la forme :

$$Q(x) = Q(x_c) + (x - x_c) \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_c + O(\|x - x_c\|^2) \quad (\text{B.2.6})$$

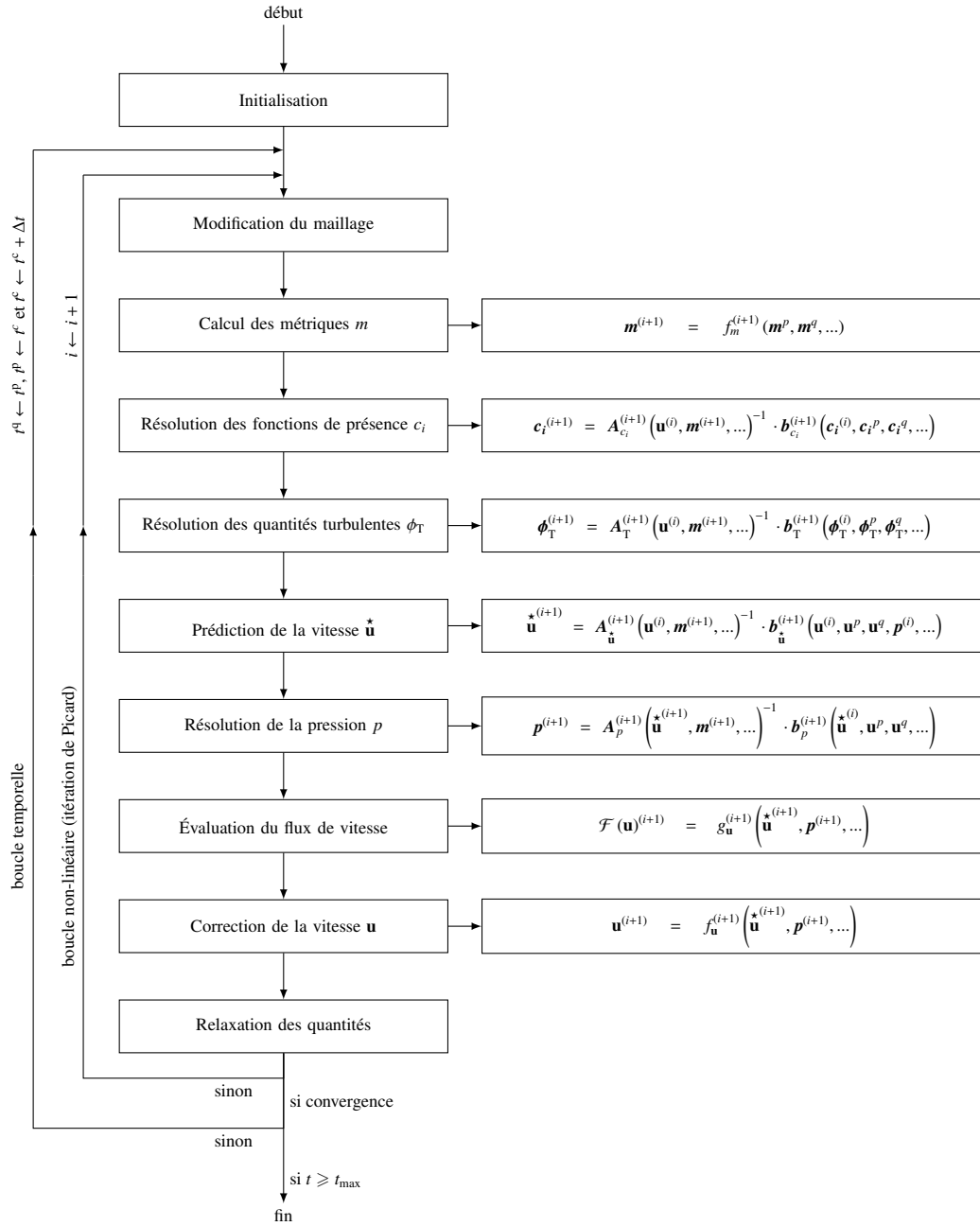


Figure B.2.2 : Boucle de résolution du problème fluide – Approche découplée

Par la suite, le terme de troncature est négligé. L'intégrale volumique exacte d'un problème linéaire est donc donnée par l'équation suivante :

$$\iiint_V Q(\mathbf{x}) \, dv \approx \iiint_V Q(\mathbf{x}_c) \, dv + \overline{\text{grad}(Q)}_c \cdot \overbrace{\iiint_V (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \, dv}^{\text{équation (B.2.4)=0}} \quad (\text{B.2.7})$$

$$= Q(\mathbf{x}_c) \cdot \iiint_V dv \quad (\text{B.2.8})$$

$$= Q(\mathbf{x}_c) \cdot V \quad (\text{B.2.9})$$



Afin de simplifier les notations, les quantités  $Q(\mathbf{x}_c)$  et  $Q(\mathbf{x}_f)$  sont respectivement notées  $Q_c$  et  $Q_f$ . De manière identique, il est possible de montrer que les approximations suivantes sont également du même ordre :

$$\iint_S Q(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_f \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_f S_f \cdot Q_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (\text{B.2.10})$$

$$\iiint_V Q(\mathbf{x}) \cdot R(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{v} \approx Q_c \cdot R_c \cdot V \quad (\text{B.2.11})$$

$$\iiint_V \frac{Q(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})} \cdot d\mathbf{v} \approx \frac{Q_c}{R_c} \cdot V \quad (\text{B.2.12})$$

### B.2.2.3 Discrétisation temporelle

Les dérivées temporelles sont évaluées par une approximation décentrée du second ordre<sup>17</sup> correspondant à l'intégration d'un polynôme d'ordre 2. Cette approximation permet d'écrire une loi de la forme :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} \approx e^c Q^c + e^p Q^p + e^q Q^q \quad (\text{B.2.13})$$

L'indice  $e^c$  fait référence à l'instant courant  $t_{n+1}$ , les indices  $e^p$  et  $e^q$  font respectivement référence aux instants précédents  $t_n$  et  $t_{n-1}$ . Par exemple, lorsque le pas de temps  $\Delta t$  est constant au cours du temps, les coefficients sont donnés par :

$$e^c = \frac{3}{2\Delta t} \quad \text{et} \quad e^p = \frac{-2}{\Delta t} \quad \text{et} \quad e^q = \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{B.2.14})$$

### B.2.2.4 Discrétisation pseudo-stationnaire

Un terme de dérivation supplémentaire est ajouté dans les équations de Navier-Stokes afin de stabiliser le processus de résolution pour des études stationnaires (pas de dérivée temporelle) ou augmenter les coefficients diagonaux de la matrice pour les simulations instationnaires afin d'accélérer la résolution des systèmes linéaires. Ce terme est appelé dérivation pseudo-stationnaire et est évalué par l'équation (B.2.15). La quantité  $Q^i$  est l'estimation de la quantité  $Q^c$  à l'itération précédente du point de vue du processus itératif de Picard. Ce terme devient naturellement nul lorsque la convergence est atteinte.

$$\frac{\delta Q}{\delta \tau} \approx \frac{1}{\Delta \tau_c} (Q^c - Q^i) \quad (\text{B.2.15})$$

L'évaluation de  $\Delta \tau$  est locale et est réalisée de telle sorte que les coefficients diagonaux soient supérieurs à la somme des valeurs absolues des coefficients extra-diagonaux correspondants. La valeur par défaut résulte d'expériences numériques et vaut 50%.

## B.2.3 Équation de transport

### B.2.3.1 Introduction

Cette section a pour objectif d'introduire la discrétisation des équations du problème fluide par l'étude d'une équation de transport classique. Les cas des équations de quantité de mouvement et de continuité seront traités ultérieurement. Soit  $Q$  une quantité scalaire quelconque (quantité turbulente, fonction de présence, etc.). Les équations de transport correspondantes peuvent être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \iiint_V \rho Q \cdot d\mathbf{v} + \oint_S \rho \cdot Q (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot d\mathbf{s} = \\ \iiint_V \text{div} (\Gamma^Q \cdot \overline{\text{grad}}(Q)) d\mathbf{v} + \iiint_V \mathbf{f}^v \cdot Q \cdot d\mathbf{v} + \oint_S \mathbf{f}^s \cdot Q \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{B.2.16})$$

17. Schéma BDF (Backward Differentiation Formula) d'ordre 2.

Les termes du membre de gauche sont le terme de dérivée temporelle et le terme de convection. Les termes du membre de droite sont le terme de diffusion, le terme de production volumique et le terme de production surfacique. Les termes de production surfacique apparaissent notamment pour certains modèles de turbulence. Le terme de production volumique est très souvent lié aux efforts de gravité. Cette équation est du second ordre puisque le terme de diffusion inclut des dérivations secondes en espace.

Un terme de dérivation pseudo-stationnaire purement numérique est ajouté dans le membre de gauche pour les versions discrètes de ces équations. Ce terme est sous forme non-discrétisée :

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \iiint_V \rho Q \cdot dv \quad (\text{B.2.17})$$

Les termes de l'équation (B.2.16) sont approximés par les équations ci-dessous. Le terme de diffusion est ramené à une intégrale de surface par la formule de Green-Ostrogradski (cf. équation B.1.6 p. 29). Soient :

le terme de dérivation temporelle :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_V \rho Q \cdot dv \cong \frac{\delta}{\delta t} (\rho_c Q_c V) \quad (\text{B.2.18})$$

$$\cong e^c \rho_c^c Q_c^c V_c^c + e^p \rho_c^p Q_c^p V_c^p + e^q \rho_c^q Q_c^q V_c^q \quad (\text{B.2.19})$$

le terme de dérivation pseudo-stationnaire :

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \iiint_V \rho Q \cdot dv \cong \frac{\delta}{\delta \tau} (\rho_c Q_c V) \quad (\text{B.2.20})$$

$$\cong \frac{1}{\Delta \tau_c} (\rho_c^c Q_c^c V_c^c - \rho_c^i Q_c^i V_c^i) \quad (\text{B.2.21})$$

le terme de convection :

$$\oiint_S \rho \cdot Q (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot ds \cong \sum_f \rho_f \cdot Q_f \cdot [(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^d) \cdot \mathbf{n}_f] \cdot S_f \quad (\text{B.2.22})$$

le terme de diffusion :

$$\iiint_V \text{div} (\Gamma^Q \cdot \overline{\text{grad}}(Q)) dv = \oiint_S \Gamma^Q \cdot [\overline{\text{grad}}(Q) \cdot \mathbf{n}_f] \cdot ds \quad (\text{B.2.23})$$

$$\cong \sum_f \Gamma_f^Q \cdot [\overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f] \cdot S_f \quad (\text{B.2.24})$$

et les termes de production :

$$\iiint_V f^{v,Q} \cdot dv \cong f_c^{v,Q} \cdot V \quad (\text{B.2.25})$$

$$\oiint_S f^{s,Q} \cdot ds \cong \sum_f f_f^{s,Q} \cdot S_f \quad (\text{B.2.26})$$

L'analyse de ces approximations d'ordre 2 montre que pour résoudre cette équation de transport, il est nécessaire de reconstruire au centre des faces la valeur de la quantité et la projection sur la normale extérieur de son gradient, c.-à-d. les termes  $Q_f$  et  $\overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f$ . Ces reconstructions doivent également être du deuxième ordre pour que la reconstruction totale soit d'ordre deux. De manière générale, des reconstructions centrées d'ordre 2 sont utilisées (cf. section B.2.3.2 page suivante).

La reconstruction du terme de convection (cf. équation B.2.22) est différente. La valeur aux faces de la quantité convectée  $Q_f$  est reconstruite par des schémas décentrés (cf. section B.2.3.4 p. 53) pour stabiliser l'algorithme de résolution. Le flux de vitesse  $[(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^d) \cdot \mathbf{n}_f] \cdot S_f$  est évalué lors de la résolution de l'équation de continuité

(cf. section B.2.4 p. 64) et la détermination des vitesses de déplacement. En ce qui concerne la masse volumique, elle est connue dans le cas d'un écoulement monophasique ou évaluée par le biais de la résolution de la fonction de présence lorsque l'écoulement est diphasique. La fonction de présence doit être traitée de manière spécifique pour respecter le caractère discontinu de cette dernière et éviter sa diffusion numérique. Des schémas décentrés particuliers sont donc utilisés (cf. section B.2.3.4.4 p. 59).

Il est généralement complexe de connaître en un point des informations provenant de points spatialement éloignés. Ceci est d'autant plus vrai lorsque des maillages non structurés contenant des volumes de contrôle de forme quelconque sont utilisés. Les reconstructions des valeurs aux faces ne sont donc réalisées qu'à partir des informations contenues par les deux volumes de contrôle liés à cette face. Les centres de ces deux volumes de contrôle sont respectivement notés L et R (cf. figure B.2.3).

### B.2.3.2 Reconstructions centrées

#### B.2.3.2.1 Introduction

Comme il a été vu précédemment, la présence d'intégrales de surface nécessite de reconstruire aux centres des faces la valeur des quantités et la projection normale du gradient. Les notations utilisées sont données ci-dessous et présentées à la figure B.2.3 :

- $f$  : le centre de la face ;
- $L$  : le centre du premier volume de contrôle lié à la face ;
- $R$  : le centre du second volume de contrôle lié à la face ;
- $\mathbf{n}_f$  : le vecteur unitaire normal de la face dirigé vers l'extérieur du premier volume de contrôle ;
- $f^-$  : le centre de la face du côté du premier volume de contrôle ;
- $f^+$  : le centre de la face du côté du second volume de contrôle ;
- $\mathbf{l}$  : le vecteur unitaire de  $\vec{Lf}$  ;
- $\beta^- \mathbf{l}$  : la partie orthogonale de  $\mathbf{l}$  ;
- $\mathbf{e}^-$  : la partie tangentielle de  $\mathbf{l}$  ;
- $\mathbf{r}$  : le vecteur unitaire de  $\vec{fR}$  ;
- $\beta^+ \mathbf{r}$  : la partie orthogonale de  $\mathbf{r}$  ;
- $\mathbf{e}^+$  : la partie tangentielle de  $\mathbf{r}$  ;
- $[\cdot]_f$  : une discontinuité au niveau de  $f$ .

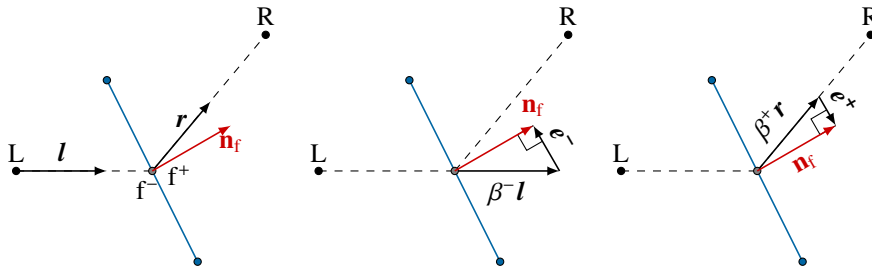


Figure B.2.3 : Reconstruction – Notations – Vue 2D

Pour commencer, la valeur de la quantité et son gradient au centre des volumes de contrôle sont supposés connus (cf. section B.2.3.3 p. 53). De plus, cette quantité et son gradient sont supposés discontinus au niveau des faces. La méthode des volumes finis utilisée ne permet pas de connaître de manière plus précise la position d'une éventuelle discontinuité car le stockage des variables n'est réalisées qu'au centre des cellules. Ces discontinuités sont notées de la manière suivante ( $[\cdot]_f$  représente une éventuelle discontinuité aux faces) :

$$[Q]_f \approx Q_{f^+} - Q_{f^-} = a \quad (\text{B.2.27})$$

$$\left[ c \cdot \overline{\text{grad}}(Q) \right]_f \approx c_{f^+} \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} - c_{f^-} \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} = b \quad (\text{B.2.28})$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont supposés connus. Le scalaire  $c$  est considéré constant dans chacun des volumes de contrôle mais peut être discontinu au niveau de la face. Suivant la valeur de ces paramètres, il est possible de traiter des cas continus et discontinus. Théoriquement, les discontinuités peuvent s'appliquer à la valeur et/ou au gradient de la quantité  $Q$ . Cette approche permet d'appréhender un large panel de situation. La connaissance, à priori, du gradient de  $Q$  au niveau de la face permet d'exprimer la valeur de cette quantité au centre des cellules par les équations suivantes :

$$Q_L \approx Q_{f^-} - \vec{L}f \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \quad (\text{B.2.29})$$

$$Q_R \approx Q_{f^+} + \vec{f}R \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \quad (\text{B.2.30})$$

Les vecteurs  $\vec{L}f$  et  $\vec{f}R$ , dont les parties unitaires sont respectivement  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$ , sont décomposés en une partie normale et en une partie tangentielle afin de faire apparaître la projection normale du gradient. Soient les équations suivantes :

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\beta^-} (\mathbf{n}_f - \mathbf{e}^-) \quad \text{avec} \quad \beta^- = \frac{1}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{l}} \quad (\text{B.2.31})$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\beta^+} (\mathbf{n}_f - \mathbf{e}^+) \quad \text{avec} \quad \beta^+ = \frac{1}{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{B.2.32})$$

Les coefficients  $\beta^-$  et  $\beta^+$  peuvent être supérieurs à 1 pour des maillages arbitraires, c'est pour cette raison que cette décomposition est parfois appelée décomposition sur-relaxée. Cette décomposition possède des propriétés de convergence supérieures par rapport aux deux autres décompositions classiques que sont la décomposition de correction minimum et la décomposition orthogonale [Jasak, 1996]. Pour simplifier l'écriture, les coefficients géométriques suivants sont utilisés :

$$h^- = \vec{L}f \cdot \mathbf{n}_f \quad h^+ = \vec{f}R \cdot \mathbf{n}_f \quad h = h^- + h^+ \quad (\text{B.2.33})$$

Ces coefficients représentent la projection des vecteurs distances  $\vec{L}f$  et  $\vec{f}R$  sur la normale de la face. Ils s'utilisent notamment en tant que facteur pondérateur des reconstructions. Les équations (B.2.29) et (B.2.30) sont reformulées en utilisant cette décomposition. Soient les équations :

$$Q_L \approx Q_{f^-} - h^- \left( \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{n}_f - \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{e}^- \right) \quad (\text{B.2.34})$$

$$Q_R \approx Q_{f^+} + h^+ \left( \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{n}_f - \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{e}^+ \right) \quad (\text{B.2.35})$$

Il est important de noter que les vecteurs  $\mathbf{e}^-$  et  $\mathbf{e}^+$  sont nuls si les volumes de contrôle sont orthogonaux (c.-à-d. quand  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$  sont alignés avec  $\mathbf{n}_f$ ). Les parties correspondantes agissent donc en tant que correction des non-orthogonalités et sont souvent faibles par rapport aux autres membres de droite. Il est donc cohérent de les traiter différemment afin de simplifier grandement le processus de résolution [Jasak, 1996] (cf. section B.2.3.2.2.2 page suivante).

### B.2.3.2.2 Reconstruction des quantités aux faces

#### B.2.3.2.2.1 Cas général

L'objectif de cette section est d'explicitier la méthode de calcul de  $Q_{f^-}$  et  $Q_{f^+}$  à partir des développements précédents. Le gradient de la quantité  $Q$  étant inconnu aux faces, il est nécessaire de l'exprimer en fonction des discontinuités qui sont, quant à elles, connues. Pour cela, la discontinuité du gradient est décomposée en une partie normale et une partie tangentielle. Les notations suivantes sont utilisées :

$$b^n = \left[ c \cdot \overline{\text{grad}}(Q) \cdot \mathbf{n}_f \right]_f \quad (\text{B.2.36})$$

$$b^e = \left[ c \cdot \overline{\text{grad}}(Q) \cdot \mathbf{e} \right]_f \quad (\text{B.2.37})$$

La somme des équations (B.2.34) et (B.2.35) respectivement pondérées par  $c_{f^-}/h^-$  et  $c_{f^+}/h^+$  permet de remplacer les gradients normaux par la valeur de la discontinuité correspondante :

$$\begin{aligned} \frac{c_{f^-}}{h^-} Q_L + \frac{c_{f^+}}{h^+} Q_R &= \frac{c_{f^-}}{h^-} Q_{f^-} + \frac{c_{f^+}}{h^+} Q_{f^+} \\ &\quad + \left( c_{f^+} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} - c_{f^-} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \right) \cdot \mathbf{n}_f \\ &\quad - \left( c_{f^+} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} - c_{f^-} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \right) \cdot \mathbf{e} \\ &= \frac{c_{f^-}}{h^-} Q_{f^-} + \frac{c_{f^+}}{h^+} Q_{f^+} + b^n - b^e \end{aligned} \quad (\text{B.2.38})$$

La connaissance de  $Q_{f^-}$  et  $Q_{f^+}$  s'obtient en résolvant un système linéaire d'ordre 2 composé des équations (B.2.38) et (B.2.27). Les solutions de ce système sont :

$$Q_{f^-} = \frac{1}{\alpha} (\alpha_{f^-} Q_L + \alpha_{f^+} Q_R - b^n + b^e) - \frac{\alpha_{f^-}}{\alpha} a \quad (\text{B.2.39})$$

$$Q_{f^+} = \frac{1}{\alpha} (\alpha_{f^-} Q_L + \alpha_{f^+} Q_R - b^n + b^e) + \frac{\alpha_{f^+}}{\alpha} a \quad (\text{B.2.40})$$

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\alpha_{f^-}$  et  $\alpha_{f^+}$  sont composés des coefficients géométriques et des coefficients de discontinuité. Leurs définitions sont :

$$\alpha_{f^-} = \frac{c_{f^-}}{h^-} \quad \alpha_{f^+} = \frac{c_{f^+}}{h^+} \quad \alpha = \alpha_{f^-} + \alpha_{f^+} \quad (\text{B.2.41})$$

#### B.2.3.2.2.2 Cas continu

Si la quantité  $Q$  et son gradient sont continus, alors :

$$Q_{f^-} = Q_{f^+} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad (\text{B.2.42})$$

$$\overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} = \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad c_{f^-} = c_{f^+} = 1 \quad (\text{B.2.43})$$

Les quantités aux faces  $Q_{f^-}$  et  $Q_{f^+}$  sont donc égales et peuvent être déduites des équations (B.2.39) ou (B.2.40). Elles sont regroupées sous le terme  $Q_f$ .

$$Q_f = \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R + \frac{h^- h^+}{h} \left[ \overline{\text{grad}}(Q) \cdot \mathbf{e} \right]_f \quad (\text{B.2.44})$$

Cette reconstruction est du second ordre. Les deux premiers termes de l'équation (B.2.44) fournissent une reconstruction de la quantité au premier ordre uniquement. L'opérateur de reconstruction linéaire d'une quantité continue est défini par l'opérateur suivant :

$$\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C} : Q_f \longrightarrow \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R \quad (\text{B.2.45})$$

Cet opérateur pondère les valeurs aux centres des volumes de contrôle par le vecteur distance projeté sur la normale de la face. Le gradient de  $Q$  étant continu, le terme discontinu se transforme en une discontinuité purement géométrique :

$$\left[ \overline{\text{grad}}(Q) \cdot \mathbf{e} \right]_f = \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot [\mathbf{e}]_f = \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-)$$

Le gradient de  $Q$  étant inconnu aux faces, mais supposé connu aux centres des volumes de contrôle, il est possible de le reconstruire à partir de l'opérateur linéaire. Ainsi l'équation (B.2.44) devient :

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R + \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \\ &= \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R + \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C} \left( \overline{\text{grad}}(Q)_f \right) \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \\ &= \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R + \left[ \frac{h^+}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_L + \frac{h^-}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_R \right] \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \end{aligned} \quad (\text{B.2.46})$$

L'opérateur de reconstruction linéaire d'ordre 2 d'une quantité continue peut donc être défini par l'équation suivante :

$$\mathcal{R}\mathcal{L} : Q_f \longrightarrow \frac{h^+}{h} Q_L + \frac{h^-}{h} Q_R + \left[ \frac{h^+}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_L + \frac{h^-}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_R \right] \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \quad (\text{B.2.47})$$

Il est possible de remarquer que le dernier terme du membre de droite est nul lorsque les volumes de contrôle sont orthogonaux. Ce dernier terme nécessite de connaître le gradient de la quantité  $Q$  aux centres des volumes de contrôles liés à la face. Cette information est inconnue mais peut être calculée par une méthode de Gauss (cf. section B.2.3.3 p. 53). Cependant, cette méthode de Gauss utilise les variables reconstruites aux niveaux des faces qui sont justement les inconnues qu'on cherche à déterminer. Ces gradients sont donc évalués de manière explicite au sens du processus de résolution itératif de Picard. Ils deviennent donc des termes sources et sont notés  $\bar{S}_f^f$ . L'opérateur précédent peut ainsi se décomposer en une partie implicite et explicite. Soit la forme compacte suivante :

$$\mathcal{R}\mathcal{L} : Q_f |^{i+1} \longrightarrow \bar{F}_L^f \cdot Q_L |^{i+1} + \bar{F}_R^f \cdot Q_R |^{i+1} + \bar{S}_f^f |^i \quad (\text{B.2.48})$$

avec <sup>18</sup> :

$$\bar{F}_L^f = \frac{h^+}{h} \quad \bar{F}_R^f = \frac{h^-}{h} \quad (\text{B.2.49})$$

$$\bar{S}_f^f |^i = \left[ \frac{h^+}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_L |^i + \frac{h^-}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_R |^i \right] \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \quad (\text{B.2.50})$$

### B.2.3.2.3 Cas discontinu

L'exemple d'une discontinuité de type hydrostatique est présenté dans cette section. La quantité  $Q$  peut ainsi être assimilée à la pression <sup>19</sup>. Si le vecteur  $\mathbf{g}$  est le vecteur gravité, alors :

$$\left. \begin{array}{l} Q_{f^-} = Q_{f^+} \\ \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} = \rho_{f^-} \cdot \mathbf{g} \\ \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} = \rho_{f^+} \cdot \mathbf{g} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} [Q]_f = 0 \implies a = 0 \\ \left[ \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right]_f = \mathbf{0} \implies \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ et } c = \frac{1}{\rho} \end{array} \right. \quad (\text{B.2.51})$$

La discontinuité hydrostatique est visible uniquement par le fait que la masse volumique  $\rho$  est discontinue. Les quantités aux faces  $Q_{f^-}$  et  $Q_{f^+}$  sont donc égales et peuvent être déduites des équations (B.2.39) ou (B.2.40). Elles sont regroupées sous le terme  $Q_f$ .

$$Q_f = \frac{1}{h^+ \rho_{f^+} + h^- \rho_{f^-}} \left( h^+ \rho_{f^+} Q_L + h^- \rho_{f^-} Q_R + (h^+ \rho_{f^+} h^- \rho_{f^-}) \left[ \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \cdot \mathbf{e} \right]_f \right) \quad (\text{B.2.52})$$

Le terme  $\overline{\text{grad}}(Q)/\rho$  étant continu, la discontinuité se transforme de nouveau en une discontinuité purement géométrique. De manière identique au cas continu, la partie continue est reconstruite à partir de l'opérateur de reconstruction linéaire d'une quantité continue. Soient les équations :

$$\left[ \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \cdot \mathbf{e} \right]_f = \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_f \cdot [\mathbf{e}]_f = \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_f \cdot (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) \quad (\text{B.2.53})$$

18. (cf. section B.2.3.3 p. 53) pour le calcul des gradients.

19. Si dans le cas monophasique,  $p$  représente la pression statique uniquement, ici,  $p$  représente la somme de la pression statique et la pression potentielle soit la pression piézométrique. Il n'y a donc pas de terme de type  $\rho g z$  à ajouter.

$$\begin{aligned}
 Q_f &= \frac{h^+ \rho_{f^+}}{h\hat{\rho}} Q_L + \frac{h^- \rho_{f^-}}{h\hat{\rho}} Q_R + (h^+ \rho_{f^+} h^- \rho_{f^-}) \cdot \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C} \left( \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_f \right) \cdot (e^+ - e^-) \\
 &= \frac{h^+ \rho_{f^+}}{h\hat{\rho}} Q_L + \frac{h^- \rho_{f^-}}{h\hat{\rho}} Q_R \\
 &\quad + \frac{h^+ \rho_{f^+} h^- \rho_{f^-}}{h\hat{\rho}} \left[ \frac{h^+}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_L + \frac{h^-}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_R \right] \cdot (e^+ - e^-)
 \end{aligned} \tag{B.2.54}$$

La quantité  $\hat{\rho}$  est homogène à  $\rho$  et est définie par :

$$\hat{\rho} = \frac{h^+ \rho_{f^+} + h^- \rho_{f^-}}{h} \tag{B.2.55}$$

Comme pour le cas continu, les termes de gradient au centre des volumes de contrôle agissent en tant que correcteur des non-orthogonalités et sont déterminés de manière explicite au sens du processus itératif de Picard. L'opérateur précédent peut donc également être séparé en une partie explicite et implicite. L'opérateur de reconstruction linéaire d'ordre 2 d'une quantité discontinue est noté  $\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{D}$  et est défini sous forme compacte par :

$$\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{D} : Q_f \Big| \longrightarrow \check{F}_L^f \cdot Q_L \Big|^{i+1} + \check{F}_R^f \cdot Q_R \Big|^{i+1} + \check{S}_f^f \Big| \tag{B.2.56}$$

avec<sup>18</sup> :

$$\check{F}_L^f = \frac{h^+ \rho_{f^+}}{h\hat{\rho}} \qquad \check{F}_R^f = \frac{h^- \rho_{f^-}}{h\hat{\rho}} \tag{B.2.57}$$

$$\check{S}_f^f \Big| = \frac{h^+ \rho_{f^+} h^- \rho_{f^-}}{h\hat{\rho}} \left[ \frac{h^+}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_L \Big| + \frac{h^-}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_R \Big| \right] \cdot (e^+ - e^-) \tag{B.2.58}$$

Les quantités  $\rho_{f^+}$  et  $\rho_{f^-}$  sont respectivement assimilées à  $\rho_L$  et  $\rho_R$ .

### B.2.3.2.3 Reconstruction du gradient normal aux faces

#### B.2.3.2.3.1 Cas général

La connaissance du gradient de la quantité sur une face est nécessaire pour discrétiser certains des termes de diffusion (cf. section B.2.3.1 p. 44) mais également dans le cadre de l'équation de pression (cf. section B.2.4.2 p. 66). Plus précisément, c'est uniquement la projection normale du gradient qu'il est nécessaire d'évaluer. Cette section a pour objectif d'explicitier la méthode de calcul de ces termes.

La méthode est identique à celle utilisée pour la reconstruction des quantités aux faces. La soustraction des équations (B.2.34) et (B.2.35) permet d'éliminer les termes  $Q_{f^-}$  et  $Q_{f^+}$  au profit de la valeur de la discontinuité  $a$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
 Q_R - Q_L &= a + h^+ \left( \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{n}_f - \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot e^+ \right) \\
 &\quad + h^- \left( \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{n}_f - \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot e^- \right)
 \end{aligned} \tag{B.2.59}$$

La partie tangente est notée  $E$  et est donnée par l'équation suivante :

$$E = h^+ e^+ \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} + h^- e^- \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \tag{B.2.60}$$

Ainsi, l'équation (B.2.59) peut se réécrire de telle sorte à mettre en avant les discontinuités normales :

$$Q_R - Q_L = a + \frac{h^+}{c_{f^+}} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{n}_f + \frac{h^-}{c_{f^-}} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{n}_f - E \tag{B.2.61}$$

La connaissance de  $c_{f^+} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{n}_f$  et  $c_{f^-} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{n}_f$  s'obtient en résolvant un système linéaire d'ordre 2 composé des équations (B.2.61) et (B.2.28). Les solutions de ce système sont :

$$c_{f^+} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} \cdot \mathbf{n}_f = \hat{c} \left( \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{E}{h} + \frac{b^n \beta_{f^-} - a}{h} \right) \quad (\text{B.2.62})$$

$$c_{f^-} \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \cdot \mathbf{n}_f = \hat{c} \left( \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{E}{h} - \frac{b^n \beta_{f^+} + a}{h} \right) \quad (\text{B.2.63})$$

avec :

$$\hat{c} = \frac{c_{f^-} c_{f^+}}{\frac{h^+}{h} c_{f^-} + \frac{h^-}{h} c_{f^+}} \quad \beta_{f^-} = \frac{h^-}{c_{f^-}} \quad \beta_{f^+} = \frac{h^+}{c_{f^+}} \quad (\text{B.2.64})$$

La quantité  $\hat{c}$  est homogène à  $c$ . De surcroît, son dénominateur correspond à une reconstruction sur la face pondérée par les distances normales. Les premiers termes des membres de gauche des équations (B.2.62) et (B.2.63) sont équivalents à un gradient de la quantité  $Q$  projeté selon  $\vec{\text{LR}}$  sans l'hypothèse de discontinuité. De nouveau, le terme  $E$  (partie tangente ou partie explicite) est nul pour des volumes de contrôle orthogonaux.

### B.2.3.2.3.2 Cas continu

Dans cette section, la quantité  $Q$  et son gradient sont supposés continus, c.-à-d.  $a = 0$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  et  $c_{f^-} = c_{f^+} = 1$ . La projection normale du gradient est donc continue et peut être déduite des équations (B.2.62) ou (B.2.63). Elle est regroupée sous le terme  $\overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f$ . De plus, sous ces conditions la quantité  $\hat{c}$  est égale à un.

$$\overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f = \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{E}{h} \quad (\text{B.2.65})$$

De nouveau, le terme de gradient est continu. Par conséquent, le terme tangentiel se réduit à une discontinuité géométrique :

$$E = \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot (h^+ \mathbf{e}^+ + h^- \mathbf{e}^-) \quad (\text{B.2.66})$$

Le gradient de  $Q$  étant inconnu aux faces, mais supposé connu aux centres des volumes de contrôle, il est possible de le reconstruire à partir de l'opérateur de reconstruction linéaire d'une quantité continue  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C}$ . L'équation (B.2.65) devient donc :

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f &= \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{h^+ \mathbf{e}^+ + h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_f \\ &= \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{h^+ \mathbf{e}^+ + h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C}(\overline{\text{grad}}(Q)_f) \\ &= \frac{Q_R - Q_L}{h} + \frac{h^+ \mathbf{e}^+ + h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \left( \frac{h^+}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_L + \frac{h^-}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_R \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.67})$$

De nouveau, le dernier terme du membre de droite est nul lorsque les volumes de contrôle sont orthogonaux. En outre, il est traité explicitement au sens du processus de résolution de Picard car il fait intervenir les gradients au centre des volumes de contrôle. L'opérateur de reconstruction linéaire de la projection normale du gradient d'une quantité continue est noté  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C}$  et est présenté sous forme compacte ci-dessous. L'évaluation du gradient au centre des volumes de contrôle n'est pas explicité mais est identique aux cas précédents<sup>18</sup>.

$$\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C} : \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f \longrightarrow \bar{G}_L^f \cdot Q_L \big|^{i+1} + \bar{G}_R^f \cdot Q_R \big|^{i+1} + \bar{S}_g^f \big|^i \quad (\text{B.2.68})$$

avec :

$$\bar{G}_L^f = -\frac{1}{h} \quad \bar{G}_R^f = \frac{1}{h} \quad (\text{B.2.69})$$

$$\bar{S}_g^f \big|^i = \frac{h^+ \mathbf{e}^+ + h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \left( \frac{h^+}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_L \big|^i + \frac{h^-}{h} \overline{\text{grad}}(Q)_R \big|^i \right) \quad (\text{B.2.70})$$



### B.2.3.2.3.3 Cas discontinu

Dans cette section, une discontinuité de type hydrostatique est supposée, c.-à-d.  $a = 0$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  et  $c = 1/\rho$ . La projection normale du gradient de  $Q$  normalisé par  $\rho$  est donc continue et peut être déduite des équations (B.2.62) ou (B.2.63).

$$\left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \cdot \mathbf{n}_f \right)_f = \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{Q_R}{h} - \frac{Q_L}{h} + \frac{E}{h} \right) \quad (\text{B.2.71})$$

Le terme tangent  $E$  peut être reformulé par la partie continue :

$$\begin{aligned} E &= h^+ \mathbf{e}^+ \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^+} + h^- \mathbf{e}^- \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_{f^-} \\ &= \rho_{f^+} h^+ \mathbf{e}^+ \cdot \frac{\overline{\text{grad}}(Q)_{f^+}}{\rho_{f^+}} + \rho_{f^-} h^- \mathbf{e}^- \cdot \frac{\overline{\text{grad}}(Q)_{f^-}}{\rho_{f^-}} \\ &= (\rho_{f^+} h^+ \mathbf{e}^+ + \rho_{f^-} h^- \mathbf{e}^-) \cdot \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_f \end{aligned} \quad (\text{B.2.72})$$

De manière identique à précédemment, l'opérateur  $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{C}$  permet de reconstruire aux centres des faces le gradient continu de la quantité  $\overline{\text{grad}}(Q)/\rho$ . L'équation (B.2.71) devient donc :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \cdot \mathbf{n}_f \right)_f &= \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{Q_R}{h} - \frac{Q_L}{h} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{\rho_{f^+} h^+ \mathbf{e}^+ + \rho_{f^-} h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \left[ \frac{h^+}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_L + \frac{h^-}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_R \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.73})$$

De nouveau, le dernier terme du membre de droite est nul lorsque les volumes de contrôle sont orthogonaux. De plus, il est traité explicitement car il fait intervenir les gradients<sup>18</sup> au centre des volumes de contrôle. L'opérateur de reconstruction linéaire discontinu de la projection normale du gradient est noté  $\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{D}$  et est défini sous forme compacte par :

$$\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{D} : \frac{\overline{\text{grad}}(Q)_f}{\rho_f} \cdot \mathbf{n}_f \longrightarrow \check{G}_L^f \cdot Q_L \big|^{i+1} + \check{G}_R^f \cdot Q_R \big|^{i+1} + \check{S}_g^f \big| ^i \quad (\text{B.2.74})$$

avec :

$$\check{G}_L^f = -\frac{1}{\hat{\rho}h} \quad \check{G}_R^f = \frac{1}{\hat{\rho}h} \quad (\text{B.2.75})$$

$$\check{S}_g^f \big| ^i = \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{\rho_{f^+} h^+ \mathbf{e}^+ + \rho_{f^-} h^- \mathbf{e}^-}{h} \cdot \left[ \frac{h^+}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_L \big|^i + \frac{h^-}{h} \left( \frac{\overline{\text{grad}}(Q)}{\rho} \right)_R \big|^i \right] \right) \quad (\text{B.2.76})$$

### B.2.3.2.4 Conclusion sur les reconstructions centrées

De manière générale, c.-à-d. que ce soit dans le cas continu ou discontinu et que ce soit pour la valeur ou la projection normale du gradient, les reconstructions aux centres des faces sont composées de deux termes implicites et d'un terme explicite. Les termes implicites contiennent les valeurs aux centres des volumes de contrôle pondérées par des coefficients géométriques et, si la quantité est discontinue, par des coefficients physiques. Le terme explicite, qui est donc traité en tant que terme source, fait intervenir les gradients évalués aux centres des volumes de contrôle. Ces gradients sont évalués par une méthode de Gauss et font intervenir les reconstructions aux centres des faces de l'itération précédente.

### B.2.3.3 Calcul du gradient au centre des cellules

La reconstruction des valeurs et de la projection normale des gradients au niveau des centres des faces nécessite de connaître, non-seulement la valeur au centre des cellules, mais également le gradient de ces variables en ce même point ( $\overline{\text{grad}}(Q)_L$  et  $\overline{\text{grad}}(Q)_R$ ). Pour calculer ces gradients, une méthode de Gauss est utilisée :

$$\iiint_V \overline{\text{grad}}(Q) dv = \iint_S Q \cdot \mathbf{n}_f \cdot ds \quad (\text{B.2.77})$$

La version discrétisée de l'équation précédente permet d'évaluer le gradient au centre du volume de contrôle :

$$\overline{\text{grad}}(Q)_c = \frac{1}{V_c} \sum_f S_f \cdot Q_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (\text{B.2.78})$$

La valeur de la quantité  $Q$  sur les faces est reconstruite à partir des reconstructions linéaires d'ordre 2 présentées précédemment (cf. équations B.2.48 p. 49 et B.2.56 p. 50). Cependant, ces reconstructions nécessitent de connaître le gradient au centre des cellules liées aux faces considérées. Ne les connaissant pas encore à l'heure actuelle (c'est ce qu'on cherche à déterminer), il est nécessaire d'utiliser le gradient de l'itération précédente. Dans le cas continu par exemple, si  $i$  est l'itération non-linéaire précédente, le gradient se calcul par l'équation suivante

$$\overline{\text{grad}}(Q)_c|^i = \frac{1}{V_c|^i} \sum_f S_f|^i \cdot Q_f|^i \cdot \mathbf{n}_f|^i \quad (\text{B.2.79})$$

avec :

$$Q_f|^i = \bar{F}_L^f \cdot Q_L|^i + \bar{F}_R^f \cdot Q_R|^i + \bar{S}_f^f|^i \quad (\text{B.2.80})$$

où  $\bar{S}_f^f|^i$  est un terme faisant intervenir le gradient évalué à l'itération précédente. Ce gradient, exprimé au centre des cellules, est une variable stockée et actualisée au même titre que la valeur au centre des cellules. La difficulté principale réside dans son initialisation à la toute première itération. C'est notamment l'une des raisons pour laquelle il est courant d'obtenir des « overshoots » aux premiers instants de la simulation et ceci, qu'elle soit stationnaire ou instationnaire.

### B.2.3.4 Reconstructions décentrées

De manière à renforcer la stabilité du schéma numérique et éviter l'apparition d'oscillations non physiques dans la solution, des reconstructions décentrées plus sophistiquées sont utilisées pour le traitement des termes de convection. L'ordre de précision de ces reconstructions est compris entre 1 et 2 mais ne peut pas être spécifié de manière générale puisqu'il dépend à la fois de la forme des volumes de contrôle et de la quantité reconstruite.

La présentation d'un schéma décentré d'ordre élevé « High Resolution Schemes » (HRS) nécessite d'introduire dans un premier temps les schémas plus simples dont il est issu. C'est ce qui est réalisé dans un premier temps. Les schémas sont également présentés de manière graphique grâce à un diagramme en variables normalisées communément appelé diagramme NVD (« Normalized Variable Diagram »). Cet outil d'analyse graphique a initialement été introduit pour des volumes de contrôle unidimensionnels et structurés [Leonard, 1988]. L'extension de cette méthode au cas tridimensionnel non-structuré nécessite quelques aménagements qui sont décrits dans la section suivante.

#### B.2.3.4.1 Diagrammes NVD

Le diagramme NVD repose sur la connaissance de la quantité  $Q$  en trois points notés U (« Upwind »), C (« Central ») et D (« Downwind »). Ces points sont positionnés selon la direction de convection. L'objectif est de reconstruire la quantité  $Q$  sur une face située entre C et D (cf. figure B.2.4 page suivante).

Les points C et D correspondent aux centres des volumes de contrôle liés à la face  $f$  (c.-à-d. les points L et R des schémas de reconstruction centrée). Dans le cadre de volumes de contrôle tridimensionnels non structurés,

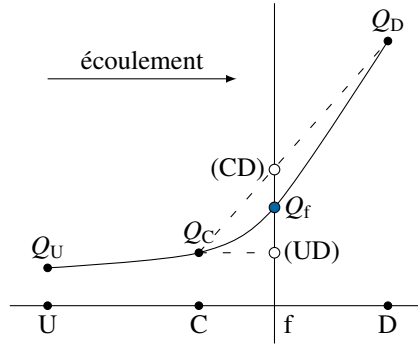


Figure B.2.4 : Variation de  $Q$  dans la direction de l'écoulement

le point U est inconnu. La quantité  $Q_U$  est évaluée classiquement par projection du gradient dans la direction  $\overrightarrow{CU}$ , projection qui est définie comme étant l'opposée de  $\overrightarrow{CD}$  (cf. figure B.2.5) :

$$Q_U = Q_C + \overrightarrow{CU} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(Q)_C = Q_C - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(Q)_C \quad (\text{B.2.81})$$

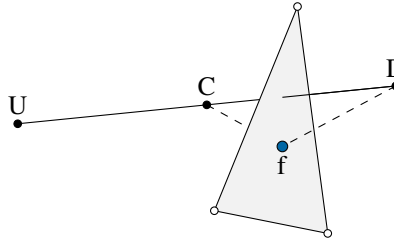


Figure B.2.5 : Construction du point imaginaire U

De plus, un développement de Taylor à l'ordre un donne :

$$Q_D = Q_C + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(Q)_C \quad (\text{B.2.82})$$

Le centre de la face  $f$  peut potentiellement ne pas être à la même distance des centres C et D. Un facteur de pondération géométrique est ainsi défini (cf. équation B.2.83). Ce facteur est égal à 0.5 si les volumes de contrôle sont réguliers.

$$f_x = \frac{\|\overrightarrow{fD}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|} \quad (\text{B.2.83})$$

Les diagrammes de type NVD reposent des variables normalisées, notées  $\tilde{Q}$  et définies par :

$$\tilde{Q} = \frac{Q - Q_U}{Q_D - Q_U} \quad (\text{B.2.84})$$

Ainsi, selon les équations (B.2.81) et (B.2.82) :

$$\tilde{Q}_C = 1 - \frac{Q_D - Q_C}{2 \overrightarrow{\text{grad}}(Q)_C \cdot \overrightarrow{CD}} \quad (\text{B.2.85})$$

Cette définition étant mal posée lorsque la quantité  $Q$  est constante sur le domaine, deux conditions supplémentaires basées sur la règle de L'Hôpital<sup>20</sup> sont utilisées :

$$\tilde{Q}_C = \begin{cases} 0.5 & \text{si } |Q_D - Q_C| \leq 10^{-6} |Q_{\text{ref}}| \\ 0.5 & \text{si } |\overrightarrow{\text{grad}}(Q)_C \cdot \overrightarrow{CD}| \leq 10^{-6} |Q_{\text{ref}}| \end{cases} \quad (\text{B.2.86})$$

20. Utilisation de la dérivée afin de déterminer des limites.

Les diagrammes de type NVD consistent à tracer la variable normalisée reconstruite  $\tilde{Q}_f$  en fonction de  $\tilde{Q}_C$ . Il est ainsi possible de visualiser rapidement le respect de conditions particulières rassemblées sous le terme « Convection Boundedness Criterion » (CBC) [Jasak *et al.*, 1999] et introduites dans [Leonard, 1988] et [Gaskell et Lau, 1988] :

- il est nécessaire que  $Q_C$  soit bornée entre  $\min(Q_U, Q_D)$  et  $\max(Q_U, Q_D)$  afin d'éviter les oscillations non physiques<sup>21</sup> ;
- il est nécessaire que la reconstruction  $Q_f$  soit également bornée par  $\max(Q_C, Q_D)$  et  $\max(Q_C, Q_D)$  pour les mêmes raisons ;
- la reconstruction doit être monotone.

En variables normalisées, les deux premières conditions se traduisent respectivement par :

$$0 \leq \tilde{Q}_C \leq 1 \quad \begin{cases} \tilde{Q}_f = \tilde{Q}_C & \text{si } \tilde{Q}_C < 0 \\ \tilde{Q}_C \leq \tilde{Q}_f \leq 1 & \text{si } 0 \leq \tilde{Q}_C \leq 1 \\ \tilde{Q}_f = \tilde{Q}_C & \text{si } 1 < \tilde{Q}_C \end{cases} \quad (\text{B.2.87})$$

Ces deux conditions sont respectées dans la zone grisée (diagonale incluse) de la figure B.2.6.

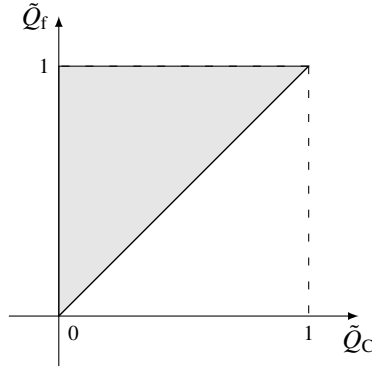


Figure B.2.6 : Diagramme NVD – Critères

#### B.2.3.4.2 Schémas élémentaires

##### B.2.3.4.2.1 Schéma UDS

Le schéma décentré amont du premier ordre UDS (« Upwind Differencing Scheme ») est défini par :

$$\tilde{Q}_f = \tilde{Q}_C \quad (\text{B.2.88})$$

Ce schéma est inconditionnellement borné et très stable mais n'est précis qu'à l'ordre 1. Ainsi, il peut fortement diffuser la solution, notamment si les volumes de contrôle ne sont pas alignés avec le sens de l'écoulement.

##### B.2.3.4.2.2 Schéma DDS

Le schéma décentré aval du premier ordre DDS (« Downwind Differencing Scheme ») pose :

$$\tilde{Q}_f = 1 \quad (\text{B.2.89})$$

21. Ce n'est pas réellement un critère mais une supposition car les quantités  $Q_C$ ,  $Q_U$  et  $Q_D$  sont connues ou évaluées (cas des maillages complexes). En réalité cette supposition n'est pas obligatoirement vérifiée.

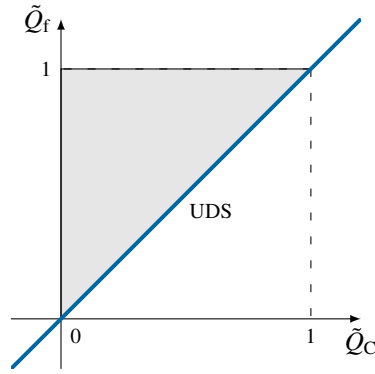


Figure B.2.7 : Diagramme NVD – Schéma UDS

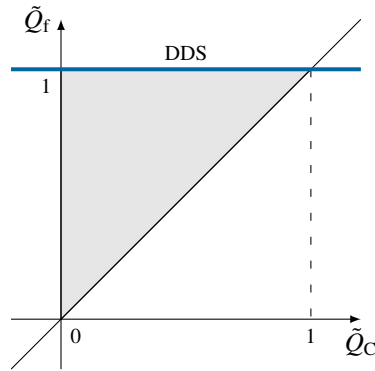


Figure B.2.8 : Diagramme NVD – Schéma DDS

Ce schéma est également précis à l'ordre 1. De part son caractère « aval », il possède des propriétés compressives intéressantes pour le traitement des discontinuités. Cependant, sa stabilité dépend très fortement du nombre de Courant.

#### B.2.3.4.2.3 Schéma CDS

Le schéma centré du second ordre CDS (« Central Differencing Scheme ») est défini par :

$$\tilde{Q}_f = f_x \cdot \tilde{Q}_C + (1 - f_x) \quad (\text{B.2.90})$$

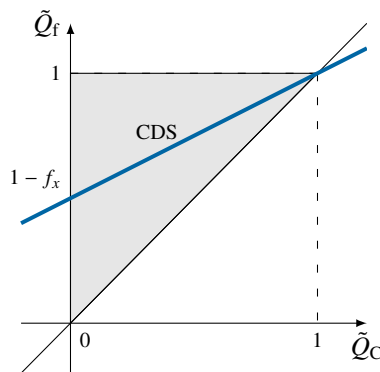


Figure B.2.9 : Diagramme NVD – Schéma CDS

Ce schéma est précis à l'ordre 2 mais n'est pas borné dans le domaine  $\tilde{Q}_C \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ . Par conséquent, des oscillations numériques peuvent apparaître dans les zones où les phénomènes de convection sont prépon-

dérants. Ce schéma doit donc être utilisé avec des nombres de Courant très faibles afin que les phénomènes de diffusion soient prépondérants devant les phénomènes de convection.

#### B.2.3.4.2.4 Schéma QUICK

Le schéma QUICK (« Quadratic Upstream interpolation for Convective Kinetics ») [Leonard, 1979] est un schéma basé sur une interpolation quadratique des valeurs de  $\tilde{Q}$  aux points U, C et D. C'est un schéma précis à l'ordre 3 peu diffusif [Versteeg et Malalasekera, 1995] couramment utilisé. En variables normalisées, il est défini par :

$$\tilde{Q}_f = (1 - f_x^2) \tilde{Q}_C + \frac{f_x}{2} (1 + f_x) \quad (\text{B.2.91})$$

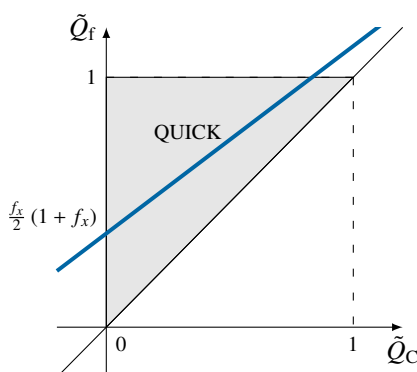


Figure B.2.10 : Diagramme NVD – Schéma QUICK

Ce schéma n'est cependant pas borné pour  $\tilde{Q}_C \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ . Il peut donc poser des problèmes de stabilité. Il est donc courant de voir des formulations différentes [Versteeg et Malalasekera, 1995] afin d'agrandir son domaine de validité.

#### B.2.3.4.2.5 Conclusion sur les schémas élémentaires

Ces quatre schémas élémentaires peuvent présenter des caractéristiques intéressantes (précision, stabilité, compressibilité) suivant la valeur de  $\tilde{Q}_C$ . Il est donc naturel de vouloir utiliser des schémas dit hybrides afin d'exploiter pleinement ces caractéristiques.

#### B.2.3.4.3 Schémas hybrides

Au contraire des schémas précédents, les schémas hybrides présentés dans cette section ne sont pas linéaires. Des méthodes de résolution particulières doivent donc être employées (cf. section B.2.3.4.5 p. 62).

##### B.2.3.4.3.1 Schéma GDS

Le schéma GDS (« Gamma Differencing Scheme ») [Jasak, 1996] est le premier schéma hybride implémenté dans ISIS-CFD. Ce schéma consiste à établir une transition continue entre le schéma CDS (précision à l'ordre 2) et le schéma UDS (inconditionnellement stable). La transition continue s'effectue sur l'intervalle  $[0, \beta_m]$  où  $\beta_m$  vaut généralement 1/6. Dans le solveur ISIS-CFD, la valeur de ce coefficient est fixé à 0.1 afin d'être précis à l'ordre 2 sur une grande plage de  $\tilde{Q}_C$ . Sur cet intervalle, le coefficient de transition,  $\gamma$ , évolue linéairement pour atteindre 1 en  $\beta_m$ . Il est donc défini par :

$$\gamma = \frac{\tilde{Q}_C}{\beta_m} \quad (\text{B.2.92})$$

En variables normalisées, le schéma GDS est défini par :

$$\tilde{Q}_f = \begin{cases} \tilde{Q}_C & \text{si } \tilde{Q}_C \leq 0 & \text{(UDS)} \\ \gamma [f_x \cdot \tilde{Q}_C + (1 - f_x)] + (1 - \gamma) \cdot \tilde{Q}_C & \text{si } 0 < \tilde{Q}_C < \beta_m & \text{(transition)} \\ f_x \cdot \tilde{Q}_C + (1 - f_x) & \text{si } \beta_m \leq \tilde{Q}_C < 1 & \text{(CDS)} \\ \tilde{Q}_C & \text{si } 1 \leq \tilde{Q}_C & \text{(UDS)} \end{cases} \quad (\text{B.2.93})$$

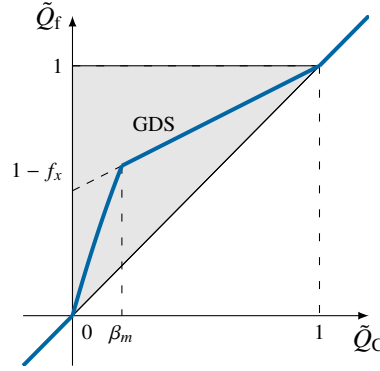


Figure B.2.11 : Diagramme NVD – Schéma GDS

#### B.2.3.4.3.2 Schéma AVLSMART

Le schéma AVLSMART (« AVL Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport »)<sup>22</sup> [Gaskell et Lau, 1988] repose sur le même principe que le schéma GDS mais la partie centrale est le schéma QUICK (précis à l'ordre 3) au lieu du schéma CDS (précis à l'ordre 2). Il a été démontré que ce schéma possède des propriétés de convergence supérieures au schéma GDS sans perte de précision et dans de nombreuses situations [Ng *et al.*, 2007]. Il est caractérisé par deux zones de transitions qui sont délimitées par le couple de valeur  $(\beta_{m1}, \beta_{m2})$ . Les valeurs numériques de ces coefficients sont respectivement 1/4 et 3/4. Les zones de transition sont modélisées par deux polynômes linéaires<sup>23</sup> en variables normalisées. Les coefficients sont déterminés par une condition de continuité. Le schéma AVLSMART est ainsi défini par :

$$\tilde{Q}_f = \begin{cases} \tilde{Q}_C & \text{si } \tilde{Q}_C < 0 & \text{(UDS)} \\ a_1 \cdot \tilde{Q}_C + b_1 & \text{si } 0 \leq \tilde{Q}_C < \beta_{m1} & \text{(transition)} \\ (1 - f_x^2) \tilde{Q}_C + \frac{f_x}{2} (1 + f_x) & \text{si } \beta_{m1} \leq \tilde{Q}_C < \beta_{m2} & \text{(QUICK)} \\ a_2 \cdot \tilde{Q}_C + b_2 & \text{si } \beta_{m2} \leq \tilde{Q}_C < 1 & \text{(transition)} \\ \tilde{Q}_C & \text{si } 1 \leq \tilde{Q}_C & \text{(UDS)} \end{cases} \quad (\text{B.2.94})$$

avec :

$$a_1 = (1 - f_x^2) + \frac{f_x}{2\beta_{m2}} (1 + f_x) \quad b_1 = 0 \quad (\text{B.2.95})$$

$$a_2 = \frac{(1 - f_x^2)\beta_{m2} + \frac{f_x}{2} (1 + f_x) - 1}{\beta_{m2} - 1} \quad b_2 = \frac{f_x^2 (\beta_{m2} - \frac{1}{2}) - \frac{f_x}{2}}{\beta_{m2} - 1} \quad (\text{B.2.96})$$

Si les volumes de contrôle sont réguliers, c.-à-d.  $f_x = 1/2$  alors :

$$a_1 = \frac{9}{4} \quad b_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad b_2 = \frac{3}{4} \quad (\text{B.2.97})$$

Ce schéma est utilisé par défaut pour les termes de convection dans ISIS-CFD.

22. AVL est une société de conseil dans le domaine de l'automobile et un centre de recherche indépendant. Elle développe notamment des outils de simulation.

23. La transition du schéma GDS est quadratique, ce qui nécessite un traitement particulier (cf. section B.2.3.4.5 p. 62). Le choix d'une transition linéaire est donc basé sur une volonté de simplifier le processus de résolution.

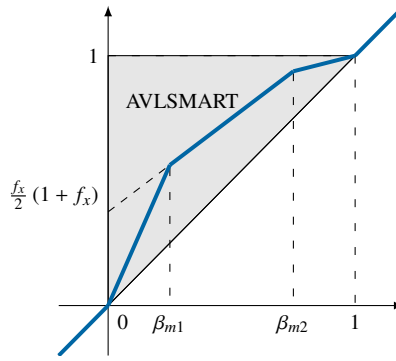


Figure B.2.12 : Diagramme NVD – Schéma AVLSMART

#### B.2.3.4.4 Schémas pour la fonction de présence

##### B.2.3.4.4.1 Position du problème

Dans le cas d'un écoulement diphasique, le traitement du terme de convection de l'équation d'une fonction de présence doit être le plus compressif possible, c.-à-d. transformer les gradients en discontinuité, afin de limiter la diffusion numérique de la surface libre. Les schémas classiques ont tendance à « lisser » la solution ce qui ne permet pas de représenter correctement le phénomène physique. En outre, le caractère borné de la solution est également un élément important à prendre en compte puisque, par construction, la fonction de présence est comprise entre 0 et 1.

La surface libre étant, par définition un espace présentant de fortes discontinuités, il est nécessaire d'utiliser des volumes de contrôle relativement petits afin de modéliser correctement la solution. Il est donc nécessaire que les limitations dues aux nombres de Courant doivent également au maximum être minimisées afin de pouvoir simuler le comportement d'un écoulement diphasique avec des pas de temps raisonnables. De nombreux schémas ont été développés dans ce sens [Wackers *et al.*, 2011]. Cette section a pour objectif de présenter en particulier le schéma BICS (« Blended Interface Capturing Scheme ») et son extension, le schéma BRICS (« Blended Reconstructed Interface Capturing Scheme »). Ces schémas ont tous deux été développés par l'équipe de développement de ISIS-CFD.

Le schéma GDS a la particularité de ne pas avoir de restriction au niveau du nombre de Courant mais l'utilisation de termes « amonts » présents dans le schéma CDS ne permet pas de traiter correctement les discontinuités de la fonction de présence (diffusion numérique). En même temps, le schéma décentré aval du premier ordre DDS possède des caractéristiques compressives très intéressantes mais sa stabilité dépend fortement du nombre de Courant. L'idée principale est donc de mettre en place une transition entre ces deux schémas. Plus précisément, le schéma BICS établit une transition entre le schéma GDS et le schéma IGDS (« Inter-Gamma Differencing Scheme ») qui est basé sur le schéma DDS pour ses propriétés compressives [Jasak, 1995].

##### B.2.3.4.4.2 Schéma IGDS

Le schéma IGDS repose sur le même principe que le schéma GDS mais la partie centrale est le schéma DDS, schéma utilisé ici pour ses propriétés compressives. Cette fois la transition est effectuée pour  $\tilde{Q}_C \in [0, \beta_m]$  où  $\beta_m = 1/2$ . L'expression du coefficient de transition  $\gamma$  est identique (cf. équation B.2.92 p. 57). En variables normalisées, le schéma IGDS est défini par :

$$\tilde{Q}_f = \begin{cases} \tilde{Q}_C & \text{si } \tilde{Q}_C \leq 0 & \text{(UDS)} \\ \gamma + (1 - \gamma) \cdot \tilde{Q}_C & \text{si } 0 < \tilde{Q}_C < \beta_m & \text{(transition)} \\ 1 & \text{si } \beta_m \leq \tilde{Q}_C < 1 & \text{(DDS)} \\ \tilde{Q}_C & \text{si } 1 \leq \tilde{Q}_C & \text{(UDS)} \end{cases} \quad (\text{B.2.98})$$



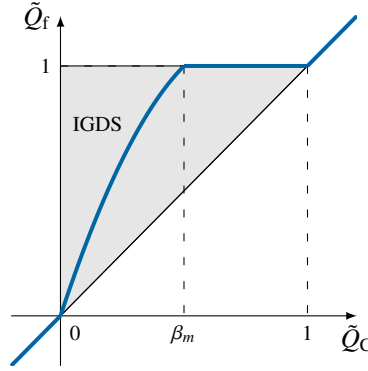


Figure B.2.13 : Diagramme NVD – Schéma IGDS

Malgré ses propriétés compressives, ce schéma n'est pas stable dès que le nombre de Courant dépasse 0.3 pour des volumes de contrôle tridimensionnels.

#### B.2.3.4.4.3 Schéma BICS

Le schéma BICS établit une transition entre le schéma IGDS (bonnes propriétés compressives) et le schéma GDS (indépendance au nombre de Courant). Un point de transition noté  $P$  et de coordonnées  $(\beta_m, v_m)$  est défini (cf. figure B.2.14 page suivante). À droite de ce point, un comportement linéaire est utilisé. À gauche de ce point, une transition quadratique est utilisée dans l'esprit du schéma GDS<sup>24</sup>. Pour les faibles nombres de Courant, ce point de transition est proche du point de transition du schéma IGDS (coordonnées (0.5, 1), point  $P_1$ ). Au contraire, pour les nombres de Courant élevés, ce point est proche du point de transition du schéma GDS (coordonnées (0.1,  $1 - 0.9f_x$ ), point  $P_2$ ).

De manière plus précise, le nombre de Courant local est noté  $Co$  et un coefficient de transition exponentiel  $\alpha_p$  est défini de la façon suivante :

$$\alpha_p(Co) = \begin{cases} 1 & \text{si } Co \leq 0.3 \\ \frac{Co - 0.3}{e^{(Co-0.3)} - 1} & \text{si } 0.3 < Co \end{cases} \quad (\text{B.2.99})$$

La pente de la partie linéaire, notée  $p$ , dépend linéairement de ce coefficient de transition. La pente des schémas GDS et IGDS sont respectivement notées  $p_{\text{GDS}}$  et  $p_{\text{IGDS}}$ . La pente de la partie linéaire est définie par :

$$p(Co) = \alpha_p(Co) \cdot p_{\text{IGDS}} + (1 - \alpha_p(Co)) \cdot p_{\text{GDS}} \quad (\text{B.2.100})$$

avec :

$$p_{\text{GDS}} = f_x \quad p_{\text{IGDS}} = 0 \quad (\text{B.2.101})$$

L'abscisse du point de transition dépend linéairement de la pente. Soit l'équation :

$$\beta_m(p) = a_0 + a_1 \cdot p(Co) \quad (\text{B.2.102})$$

avec :

$$a_1 = \frac{\beta_{\text{GDS}} - \beta_{\text{IGDS}}}{p_{\text{GDS}} - p_{\text{IGDS}}} \quad a_0 = \beta_{\text{IGDS}} - a_1 \cdot p_{\text{IGDS}} \quad \beta_{\text{GDS}} = 0.1 \quad \beta_{\text{IGDS}} = \frac{1}{2} \quad (\text{B.2.103})$$

24. Le schéma GDS utilise une variation linéaire du coefficient de transition ce qui rend la transition quadratique mais ne force en aucun cas la dérivée à être continue. Pour le schéma BICS, une transition quadratique est également utilisée mais les coefficients du polynôme d'ordre 2 sont évalués par deux conditions de continuité (en 0 et  $\beta_m$ ) et une condition de tangence en  $\beta_m$ .

Le schéma BICS est ainsi défini par :

$$\tilde{Q}_f = \begin{cases} \tilde{Q}_C & \text{si } \tilde{Q}_C \leq 0 & \text{(UDS)} \\ -\frac{1-p}{\beta_m^2} \tilde{Q}_C^2 + \left(p + \frac{2(1-p)}{\beta_m}\right) \tilde{Q}_C & \text{si } 0 < \tilde{Q}_C < \beta_m & \text{(transition quadratique)} \\ p \cdot \tilde{Q}_C + (1-p) & \text{si } \beta_m \leq \tilde{Q}_C < 1 & \text{(linéaire)} \\ \tilde{Q}_C & \text{si } 1 \leq \tilde{Q}_C & \text{(UDS)} \end{cases} \quad (\text{B.2.104})$$

Le diagramme NVD du schéma BICS est présenté à la figure B.2.14 pour plusieurs nombres de Courant. Un cas particulier apparaît quand l'interface (la face f) est alignée avec la direction de l'écoulement. À ce moment, la compression de l'interface devient inutile et doit être limitée afin d'éviter l'apparition d'oscillations numériques. Ainsi, une correction notée  $C_{\theta_f}$  est ajoutée afin que la discrétisation dépende de l'angle entre la direction de l'écoulement et la normale à la face. Cet angle est noté  $\theta_f$ . Une correction d'angle classique [Muzaferija et Peric, 1999] est ainsi utilisée :

$$\tilde{Q}_f = C_{\theta_f} \cdot \tilde{Q}_f (\text{BICS}) + (1 - C_{\theta_f}) \cdot \tilde{Q}_f (\text{GDS}) \quad (\text{B.2.105})$$

avec :

$$C_{\theta_f} = \sqrt{|\cos(\theta_f)|} \quad \theta_f = \frac{\overline{\text{grad}}(Q)_C \cdot \overrightarrow{\text{CD}}}{\|\overline{\text{grad}}(Q)_C\| \cdot \|\overrightarrow{\text{CD}}\|} \quad (\text{B.2.106})$$

Par conséquent, le schéma BICS est réduit au schéma GDS quand l'interface est parallèle à la direction de l'écoulement.

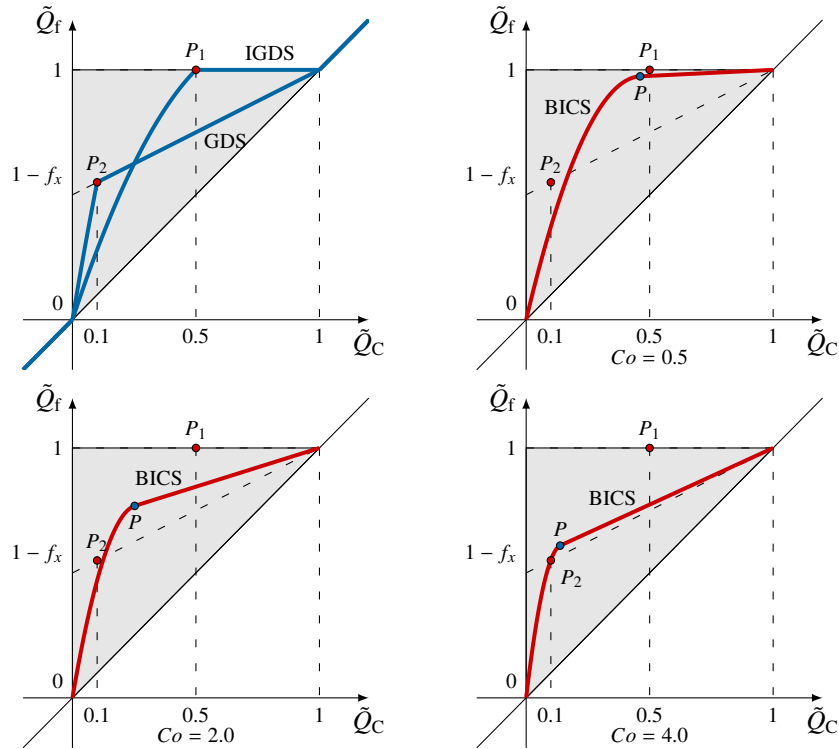


Figure B.2.14 : Diagramme NVD – Schéma BICS pour plusieurs nombres de Courant

#### B.2.3.4.4 Schéma BRICS

Le schéma BRICS est presque identique au schéma BICS. Seul le traitement du point U est modifié. Classiquement, la valeur de la quantité  $Q$  en ce point est évaluée par la reconstruction du gradient au point C

(cf. équation B.2.81 p. 54). Par définition, le gradient est mal défini pour un problème (quasi) discontinu. Par conséquent, il peut arriver que la construction de la valeur au point U soit extérieure à l'intervalle  $[0, 1]$ <sup>25</sup>.

L'objectif du schéma BRICS est donc de reconstruire la quantité  $Q$  au point U sans utiliser de gradient. Pour cela, la première étape consiste à rechercher le volume de contrôle contenant le point géométrique U par un algorithme rapide [Wackers *et al.*, 2011]. Le centre de ce volume de contrôle est noté UU (cf. figure B.2.15) et ses voisins UU<sub>p</sub>. La valeur de la quantité  $Q$  au point U est évaluée par une interpolation pondérée de ces différents points :

$$Q_U = \frac{\sum_{N=UU, UU_p} \frac{Q_N}{\|\vec{NU}\|}}{\sum_{N=UU, UU_{\text{voisin}}} \frac{1}{\|\vec{NU}\|}} \quad (\text{B.2.107})$$

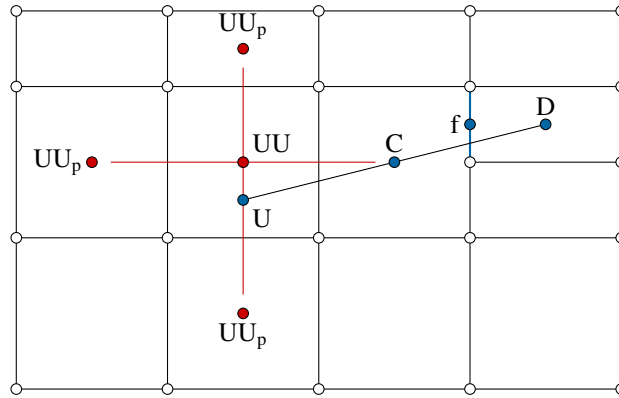


Figure B.2.15 : Schéma BRICS – Reconstruction de la valeur au point U

#### B.2.3.4.5 Conclusion sur les schémas décentrés

Les schémas décentrés présentés ci-dessus sont nécessaires afin de stabiliser le processus de calcul vis-à-vis du traitement des termes convectifs. Ils nécessitent de construire la valeur de la quantité convectée en un point amont U. La valeur en ce point est évaluée, soit par construction du gradient au centre du volume de contrôle (cas général, cf. équation B.2.85 p. 54), soit par pondération des volumes de contrôle proches (schéma BRICS, cf. équation B.2.107). Dans les deux cas, la contribution de cette valeur est évaluée explicitement au sens du processus itératif de Picard.

À l'exception du schéma UDS, ces schémas décentrés peuvent créer des termes diagonaux nuls ou négatifs, ce qui rend difficile la résolution [Jasak, 1996]. Un traitement particulier doit donc leur être appliqué. La méthode employée est couramment utilisée et se nomme correction différée [Khosla et Rubin, 1974]. Elle consiste à exprimer le schéma de reconstruction sous la forme :

$$Q_f|^{i+1} = f_1(Q_C|^{i+1}, Q_D|^{i+1}) + f_2(Q_C|^i, Q_D|^i) \quad (\text{B.2.108})$$

où  $f_1$  est une fonction linéaire et  $f_2$  représente la différence entre le schéma décentré utilisé et la fonction  $f_1$ . La fonction  $f_1$  est traitée implicitement et contient uniquement le terme central (c.-à-d. le terme correspondant à  $Q_C$ ) dans la majorité des cas. La différence, c.-à-d. la fonction  $f_2$ , est, quant à elle, traitée explicitement et incorporée dans le terme source. Il est possible de remarquer que, en plus d'améliorer les termes diagonaux de la matrice, cette méthode permet également de traiter des schémas possédant localement un comportement quadratique (schémas GDS, IGDS, BICS et BRICS) en les linéarisant.

Il est donc cohérent de définir des opérateurs de reconstruction des termes de convection dans le cas général (cf. équation B.2.109 page suivante) et le cas de la fonction de présence (cf. équation B.2.110 page suivante) sous

<sup>25</sup>. la fonction de présence est définie entre 0 et 1 (cf. section B.1.10 p. 33).

des formes compactes identiques aux schémas centrés (il est rappelé que les points C et D sont respectivement les points L et R des schémas centrés) :

$$\mathcal{R}\mathcal{Z}\mathcal{C}\mathcal{C} : Q_f \longrightarrow \bar{C}_C^f \cdot Q_C \Big|^{i+1} + \bar{C}_D^f \cdot Q_D \Big|^{i+1} + \bar{S}_c^f \Big|^i \quad (\text{B.2.109})$$

$$\mathcal{R}\mathcal{Z}\mathcal{C}\mathcal{D} : Q_f \longrightarrow \check{C}_C^f \cdot Q_C \Big|^{i+1} + \check{C}_D^f \cdot Q_D \Big|^{i+1} + \check{S}_c^f \Big|^i \quad (\text{B.2.110})$$

Les coefficients dépendent du schéma utilisé. Par défaut, les termes de convection sont discrétisés selon le schéma BRICS pour la fonction de présence et le schéma AVLSMART sinon.

Il est important de remarquer que les non-orthogonalités des volumes de contrôle ne sont pas prises en compte de la même façon que pour les schémas centrés. Une attention particulière sur la qualité de ces volumes doit donc être portée dans les zones où les phénomènes de convection sont prépondérants.

### B.2.3.5 Conclusion sur l'équation de transport

Les précédentes sections ont explicité les opérateurs de reconstruction aux faces. Il est maintenant possible d'appliquer ces opérateurs sur l'équation de transport présentée à la section B.2.3.1 p. 44. Il est rappelé que, pour un volume de contrôle donné, l'équation de transport discrétisée peut être mise sous la forme (cf. section B.2.3.1 p. 44) :

$$\begin{aligned} \left( e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c} \right) \rho_c^c Q_c^c V_c^c + e^p \rho_c^p Q_c^p V_c^p + e^q \rho_c^q Q_c^q V_c^q - \frac{\rho_c^i Q_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c} \\ + \sum_f \rho_f \cdot Q_f \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f = \\ \sum_f \Gamma_f^Q \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \\ + f_c^{v,Q} \cdot V + \sum_f f_f^{s,Q} \cdot S_f \quad (\text{B.2.111}) \end{aligned}$$

Les quantités connues sont :

- les métriques :  $V$ ,  $S_f$  et  $\mathbf{n}_f$  ;
- la vitesse de flux :  $(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^d)$  ;
- les termes sources volumiques :  $f_f^{s,Q}$  ;
- les quantités aux instants précédents : instants p et q ;
- les quantités à l'itération précédente : itération i ;
- les coefficients temporels :  $e^c$ ,  $e^p$  et  $e^q$  ;
- le pseudo pas de temps :  $\Delta\tau_c$  ;
- les coefficients de la dérivation temporelle :  $e^c$ ,  $e^p$  et  $e^q$ .

Les termes reconstruits aux centres des faces à partir des quantités aux centres des volumes de contrôle par les opérateurs présentés précédemment sont :

- les coefficients physiques :  $\rho_f$  et  $\Gamma_f^Q$  ;
- les termes sources surfaciques :  $f_f^{s,Q}$  ;
- le terme  $Q_f$  du terme de convection (2<sup>ème</sup> ligne) ;
- le terme  $\overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f$  du terme de diffusion (3<sup>ème</sup> ligne).

Les coefficients physiques et les termes sources surfaciques sont évalués à partir de l'opérateur  $\mathcal{RQ}$  (cf. section B.2.3.2.2 p. 48). La reconstruction du terme de convection est donnée par l'opérateur  $\mathcal{RQC}$  dans le cas de la fonction de présence et l'opérateur  $\mathcal{RQC}$  dans les autres cas (cf. section B.2.3.4.5 p. 62). Le terme de diffusion est, quant à lui, donné par l'opérateur  $\mathcal{RQC}$  (cf. section B.2.3.2.3.2 p. 51). Il est rappelé que la quantité  $Q$  est différente de la vitesse ou la pression dans le cas présent car un traitement particulier doit leur être porté.

Les différents opérateurs de reconstruction font apparaître : la valeur de la quantité au centre du volume de contrôle considéré, la valeur de cette même quantité aux centres des volumes de contrôle voisins (indiqués p par la suite) et un terme source contenant les non-linéarités éventuelles (et donc actualisé au cours du processus itératif de Picard). La valeur au centre du volume de contrôle considéré et celles aux centres des volumes voisins apparaissent donc sous forme linéaire. Les coefficients physiques et les termes sources surfaciques sont évalués dans un premier temps puisqu'ils ne nécessitent pas d'informations supplémentaires. Au final, l'équation précédente peut se mettre sous une forme discrétisée qui introduit la mise en place du système linéaire :

$$\left(e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c}\right)\rho_c^c Q_c^c + \frac{1}{V_c^c} \left(a_c Q_c^c + \sum_p a_p Q_p^c\right) = \frac{1}{V_c^c} \left(-S_c^c - e^p \rho_c^p Q_c^p V_c^p - e^q \rho_c^q Q_c^q V_c^q + \frac{\rho_c^i Q_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c}\right) \quad (\text{B.2.112})$$

où :

- $a_c$  et  $a_p$  représentent l'ensemble des coefficients des termes traités implicitement provenant des opérateurs de reconstruction avec en particulier :
  - $a_c$  les termes diagonaux (liés au volume de contrôle considéré) ;
  - $a_p$  les termes extra-diagonaux (liés au voisin) ;
- $S_c^c$  regroupe l'ensemble des termes sources surfaciques, volumiques et les termes explicites des différents opérateurs de reconstruction.

L'équation précédente est bien sous la forme d'un système linéaire de type (cf. section B.2.1 p. 40) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}^i) \quad (\text{B.2.113})$$

où :

$$x_c = Q_c^c \quad b_c = \frac{1}{V_c^c} \left(-S_c^c - e^p \rho_c^p Q_c^p V_c^p - e^q \rho_c^q Q_c^q V_c^q + \frac{\rho_c^i Q_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c}\right) \quad (\text{B.2.114})$$

$$A_{cc} = \left(e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c}\right)\rho_c^c + \frac{a_c}{V_c^c} \quad A_{cp} = \frac{a_p}{V_c^c} \quad \forall c \neq p \quad (\text{B.2.115})$$

Pour résoudre ce système, il est nécessaire de spécifier des conditions initiales et aux limites. La spécification des conditions initiales consiste à initialiser la quantité  $Q$  et son gradient à la première itération non-linéaire de la première boucle temporelle. La spécification des conditions aux limites dépend du problème physique (cf. section B.2.5 p. 67).

## B.2.4 Couplage vitesse-pression

### B.2.4.1 Généralités

Lorsque une méthode de résolution de type découplée est utilisée (cf. section B.2.2.1 p. 40), le couplage vitesse-pression est résolu de la même façon que les non-linéarités, c.-à-d. par une méthode itérative. Il existe différentes méthodes itératives de résolution du couplage vitesse-pression. Celle utilisée au sein du solveur ISIS-CFD est une variante de la méthode la plus populaire qu'est la méthode SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [Patankar et Spalding, 1972]. Cette variante diffère principalement de la méthode originale par la mise en place d'une équation de pression en lieu et place d'une formulation en correction de pression.

Les principales étapes de la méthode employée sont décrites dans cette section. Tout d'abord, un champ de pression initial (provenant de l'itération précédente ici) est injecté dans les équations de quantité de mouvement discrétisées. Ce système linéarisé, c.-à-d. l'équation (B.2.117), est ensuite résolu afin d'évaluer un champ de vitesse intermédiaire noté  $\hat{\mathbf{u}}^c$ . Ce champ de vitesse n'est pas physique car il ne respecte pas l'équation de continuité. De plus, la pression n'est toujours pas résolue. Une équation pour la pression est obtenue à partir de l'équation de continuité. Cette équation est résolue à partir du champ de vitesse intermédiaire. Une fois le champ de pression déterminé, les flux de vitesse sont évalués et la vitesse est corrigée. Ce cycle de prédiction-correction est itéré jusqu'à ce que la convergence de l'algorithme soit réalisée. Il est important de remarquer que, du fait de leur construction, les flux de vitesse sont conservatifs.

L'équipe de développement n'a pas choisi de s'orienter vers des méthodes utilisant des sous-boucles itératives pour résoudre le couplage vitesse-pression (type PISO « Pressure Implicit with Split Operator » par exemple [Issa, 1986]) car les non-linéarités sont également résolues de manière itérative. Ainsi, la résolution du couplage vitesse-pression est réalisée en même temps que celle des non-linéarités. Une itération non-linéaire est ainsi considérée comme étant l'itération élémentaire de résolution des non-linéarités, du couplage vitesse-pression et des couplages secondaires (fonction de présence, quantités turbulentes, etc.).

L'équation de quantité de mouvement diffère principalement d'une équation de transport classique du fait de la présence du gradient de pression (cf. section B.1.8 p. 32). C'est une particularité fondamentale à deux niveaux : la pression n'agit que par le biais de son gradient et il n'existe pas d'équation spécifique pour la pression. Ces équations sont donc faiblement couplées.

Un traitement particulier doit donc être mis en œuvre pour obtenir une équation dont la variable est la pression (et non pas son gradient). Le terme lié au gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement est semi-discrétisé sous la forme suivante :

$$\iiint_V -\overline{\text{grad}}(p) dv \approx -\overline{\text{grad}}(p)_c \cdot V_c \quad (\text{B.2.116})$$

Avant d'écrire la forme semi-discrète de l'équation de quantité de mouvement, il est important de remarquer que, dans le cas d'écoulement turbulent et/ou diphasique, la transposée du gradient de vitesse ne peut être négligée du fait que la viscosité dynamique effective<sup>26</sup> possède une dépendance spatiale (cf. section B.1.10 p. 33). Ce terme est reconstruit aux faces par les opérateurs de reconstruction et inclus dans le terme source  $S_c^c$  afin d'être traité explicitement. Au final, l'équation de quantité de mouvement est sous forme semi-discrétisée :

$$\left(e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c}\right)\rho_c^c \mathbf{u}_c^c + \frac{1}{V_c^c} \left(a_c \mathbf{u}_c^c + \sum_p a_p \mathbf{u}_p^c\right) = -\overline{\text{grad}}(p)_c + \frac{1}{V_c^c} \left(-S_c^c - e^p \rho_c^p \mathbf{u}_c^p V_c^p - e^q \rho_c^q \mathbf{u}_c^q V_c^q + \frac{\rho_c^i \mathbf{u}_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c}\right) \quad (\text{B.2.117})$$

Cette équation peut également être mise sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{u}_c^c = -C_c \left(\hat{\mathbf{u}}_c^c + \overline{\text{grad}}(p)_c\right) + \frac{C_c}{V_c^c} \left(\frac{\rho_c^i \mathbf{u}_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c}\right) - \frac{C_c}{V_c^c} \left(e^p \rho_c^p \mathbf{u}_c^p V_c^p + e^q \rho_c^q \mathbf{u}_c^q V_c^q\right) \quad (\text{B.2.118})$$

avec :

$$C_c = \frac{1}{\left(e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c}\right) + \frac{a_c}{V_c^c}} \quad \hat{\mathbf{u}}_c^c = \frac{1}{V_c^c} \left(\sum_p a_p \mathbf{u}_p^c + S_c^c\right) \quad (\text{B.2.119})$$

Le terme  $C_c$  représente l'inverse des coefficients diagonaux de la matrice (terme  $A_{cc}$ ). Le vecteur  $\hat{\mathbf{u}}_c^c$  contient les termes extra-diagonaux et le terme source global. Comme il a été déjà énoncé précédemment, l'établissement d'une équation pour la pression repose sur une transformation de l'équation de continuité qui est la seule et unique équation pouvant fixer le champ de vitesse au travers de cette contrainte d'incompressibilité. Cette idée est à relier au rôle que joue physiquement la pression dans les équations de Navier-Stokes. En effet, il existe une infinité de champ de vitesse qui satisfont l'équation de quantité de mouvement. Le gradient de pression

26. La viscosité dynamique effective est la somme de la viscosité dynamique et la viscosité turbulente.

va permettre de fixer l'unique solution qui vérifie également l'équation de continuité. L'équation de continuité peut être présentée sous la forme discrétisée suivante :

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f ds \approx \sum_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f = 0 \quad (\text{B.2.120})$$

#### B.2.4.2 Algorithme de résolution

De la même façon que pour une équation de transport classique, l'équation de quantité de mouvement est résolue dans un premier temps avec le champ de pression de l'itération précédente (cf. équation B.2.122). Par conséquent, ce champ de pression est introduit dans le terme source afin d'évaluer une prédiction du champ de vitesse  $\hat{\mathbf{u}}^*$  :

$$\left( e^c + \frac{1}{\Delta\tau_c} \right) \rho_c^c \hat{\mathbf{u}}_c^c |^{i+1} + \frac{1}{V_c^c} \left( a_c \hat{\mathbf{u}}_c^c |^{i+1} + \sum_p a_p \hat{\mathbf{u}}_p^c |^{i+1} \right) = - \overline{\text{grad}}(\hat{p})_c |^{i+1} + \frac{1}{V_c^c} \left( -S_c^c - e^p \rho_c^p \mathbf{u}_c^p V_c^p - e^q \rho_c^q \mathbf{u}_c^q V_c^q + \frac{\rho_c^i \mathbf{u}_c^i V_c^i}{\Delta\tau_c} \right) \quad (\text{B.2.121})$$

avec :

$$\overline{\text{grad}}(\hat{p})_c |^{i+1} = \overline{\text{grad}}(p)_c |^i \quad (\text{B.2.122})$$

Le terme  $\hat{\mathbf{u}}_c^c$ , terme homogène à un gradient de pression, est évalué à partir de ce champ de vitesse prédit.

$$\hat{\mathbf{u}}_c^c |^{i+1} = \frac{1}{V_c^c} \left( \sum_p a_p \hat{\mathbf{u}}_p^c |^{i+1} + S_c^c |^i \right) \quad (\text{B.2.123})$$

L'équation de continuité nécessite d'évaluer le champ de vitesse aux centres des faces. L'équation (B.2.118) est donc reconstruite aux faces en interpolant simplement chacun des termes par les opérateurs présentés précédemment. Afin d'éviter le problème du damier<sup>27</sup> (« checker-board » ou « red black problem »), le terme du gradient de pression n'est discrétisé qu'après cette interpolation [Rhie et Chow, 1983].

$$\mathbf{u}_f^c = -C_f \left( \hat{\mathbf{u}}_f^c + \overline{\text{grad}}(p)_f \right) + \frac{C_f}{V_f^c} \left( \frac{\rho_f^i \mathbf{u}_f^i V_f^i}{\Delta\tau_f} \right) - \frac{C_f}{V_f^c} \left( e^p \rho_f^p \mathbf{u}_f^p V_f^p + e^q \rho_f^q \mathbf{u}_f^q V_f^q \right) \quad (\text{B.2.124})$$

Cette équation semi-discrétisée est ensuite introduite dans l'équation de continuité discrétisée afin d'obtenir une équation pour le flux du gradient de pression.

$$\begin{aligned} \sum_f C_f \cdot \overline{\text{grad}}(p)_f |^{i+1} \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f &= - \sum_f C_f \left( \hat{\mathbf{u}}_f^c |^{i+1} \right) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \\ &+ \sum_f \frac{C_f}{V_f^c} \left( \frac{\rho_f^i \mathbf{u}_f^i V_f^i}{\Delta\tau_f} \right) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \\ &- \sum_f \frac{C_f}{V_f^c} \left( e^p \rho_f^p \mathbf{u}_f^p V_f^p + e^q \rho_f^q \mathbf{u}_f^q V_f^q \right) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \end{aligned} \quad (\text{B.2.125})$$

Les termes des deux dernières lignes, c.-à-d. les termes correspondant à la dérivation pseudo-stationnaire et à une partie de la dérivation temporelle, ne sont pas introduits dans le terme de pseudo-vitesse afin que le champ de pression ne dépendent pas de ces derniers [Choi, 1999]. Effectivement, ces termes possèdent une dépendance locale et temporelle spécifiques et ne peuvent donc pas être rassemblés sous un terme global avant l'interpolation aux faces [Yu *et al.*, 2002].

27. Si le gradient de pression est discrétisé avant l'étape d'interpolation aux faces et qu'une reconstruction centrée est utilisée pour la pression, la pression n'intervient qu'une cellule sur deux. Il est donc possible d'observer des oscillations spatiales de la pression car numériquement, deux champs de pression découplés spatialement peuvent exister.

Le terme de gradient de pression de l'équation (B.2.125) est ensuite discrétisé selon l'opérateur  $\mathcal{R2G}$  (cf. équation B.2.68 p. 51) dans le cas monophasique et l'opérateur  $\mathcal{R2GD}$  (cf. équation B.2.74 p. 52) dans le cas diphasique. Ces opérateurs font intervenir la valeur de la pression aux centres des cellules et un terme de correction explicite. Un système d'équations est ainsi obtenu pour la pression car tous les termes du membre de droite de l'équation précédente sont connus.

Une fois que le champ de pression aux centres des cellules est connu, le flux de vitesse  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$  (cf. équation B.2.126) est évalué. Le terme de vitesse aux centres des faces est évalué par l'équation (B.2.124) où le terme de gradient de pression est reconstruit par le même opérateur que celui utilisé pour résoudre l'équation (B.2.125). Comme le gradient de pression a été reconstruit par le même opérateur, le flux de vitesse est obligatoirement conservatif. Cette quantité est ensuite sauvegardée et utilisée à la prochaine itération pour évaluer les termes de convection des équations de transport.

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \quad (\text{B.2.126})$$

La dernière étape consiste à corriger le champ de vitesse aux centres des cellules, pour cela, l'équation (B.2.118) est utilisée. Au sein de cette équation, le terme de pression correspond au nouveau champ de pression. Par contre, le terme  $\hat{\mathbf{u}}_c^c$  n'est pas recalculé pour éviter de devoir résoudre un système d'équations supplémentaire. C'est en ce sens que la méthode de résolution utilisée ressemble à la méthode SIMPLE classique. En effet, lorsque cette dernière est employée, ce terme est également négligé lors de l'étape de correction de vitesse. Une réactualisation partielle ou complète de ce terme reviendrait à s'orienter vers des méthodes itératives de résolution du couplage vitesse-pression. Cependant, il est important de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de résoudre parfaitement ce couplage puisque les non-linéarités et les autres couplages doivent également être résolus.

## B.2.5 Application des conditions aux limites

Le maillage, c.-à-d. l'ensemble des volumes de contrôle, possède plusieurs frontières spatiales. Ces frontières peuvent être physiques (la limite d'un corps) ou représenter une limite du domaine spatial étudié (plan de symétrie, limites lointaines, etc.).

Les conditions aux limites sont principalement divisées en deux catégories principales : les conditions aux limites de Dirichlet et les conditions aux limites de Von Neumann. La première catégorie regroupe les conditions aux limites où la quantité  $Q$  est imposée. La deuxième catégorie regroupe celles où c'est la projection normale du gradient de  $Q$  qui est fixée. Ces conditions aux limites sont appliquées aux faces qui ne sont liées qu'à un seul volume de contrôle.

Cette section a pour objectif de montrer la manière dont sont utilisées ces conditions aux limites numériques pour former des conditions aux limites physiques. Seules les principales conditions aux limites sont présentées.

### B.2.5.1 Conditions aux limites numériques

#### B.2.5.1.1 Généralités

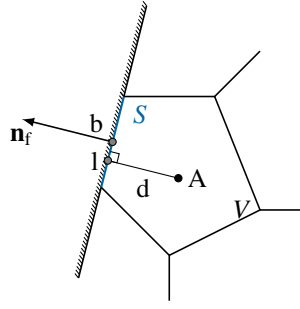
Soit une face frontière  $b$  liée à un unique volume de contrôle de centre  $A$ . Une condition aux limites est supposée valide sur la totalité de cette face. Il est donc intéressant de chercher la projection orthogonale du centre du volume de contrôle sur la face frontière afin de s'affranchir des problèmes de non-orthogonalités. Cette projection est notée  $l$  (cf. figure B.2.16 page suivante) et est définie par :

$$\vec{Al} = (\vec{Af} \cdot \mathbf{n}_f) \cdot \mathbf{n}_f \quad (\text{B.2.127})$$

La norme de  $\vec{Al}$  est notée  $d$ . Un développement de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$\frac{Q_b - Q_A}{d} = \overline{\text{grad}}(Q)_b \cdot \mathbf{n}_f \quad (\text{B.2.128})$$





**Figure B.2.16 :** Une face frontière – Vue 2D et notations

Les reconstructions aux faces interviennent principalement dans les termes de convection et de diffusion. Les conditions aux limites sont donc principalement appliquées sur ces termes. Il est rappelé que ces termes peuvent être présentés sous forme discrétisée de la façon suivante (cf. section B.2.3.1 p. 44) :

$$\sum_f \rho_f \cdot Q_f \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \quad (\text{B.2.129})$$

$$\sum_f \Gamma_f^Q \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_f \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f \quad (\text{B.2.130})$$

#### B.2.5.1.2 Condition de Dirichlet

Une condition de Dirichlet consiste à imposer la valeur de la quantité  $Q$  sur la face  $b$ . Ainsi, le terme  $Q_b$  est connu. Le terme de convection correspondant devient donc :

$$\rho_b \cdot Q_b \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_b \quad (\text{B.2.131})$$

Le terme de diffusion correspondant est évalué à partir de l'équation (B.2.128) et devient :

$$\Gamma_b^Q \cdot \overline{\text{grad}}(Q)_b \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_b = \Gamma_b^Q \cdot \frac{Q_b - Q_A}{d} \cdot S_b \quad (\text{B.2.132})$$

#### B.2.5.1.3 Condition de Von Neumann

Une condition de Von Neumann consiste à imposer la projection normale du gradient de la quantité  $Q$  sur la face  $b$ . La valeur au niveau de cette face est notée  $g_b$ . Le terme suivant est donc connu :

$$\overline{\text{grad}}(Q)_b \cdot \mathbf{n}_f = g_b \quad (\text{B.2.133})$$

Le terme de convection correspondant est évalué à partir de l'équation (B.2.128) et devient :

$$\rho_b \cdot Q_b \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_b = \rho_b \cdot (Q_A + d \cdot g_b) \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^d) \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_b \quad (\text{B.2.134})$$

Le terme de diffusion correspondant vaut, quant à lui, :

$$\Gamma_b^Q \cdot g_b \cdot S_b \quad (\text{B.2.135})$$

### B.2.5.2 Conditions aux limites physiques

Pour les écoulements incompressibles, isothermes, turbulents, diphasiques et externes, il est nécessaire de spécifier des conditions aux limites pour la vitesse, la pression, les quantités turbulentes et la fonction de présence.

Généralement, la vitesse et la fonction de présence sont imposées en amont du domaine. En sortie, la fonction de présence et la pression (ou son gradient) sont imposées. La pression hydrostatique est imposée sur les parties inférieures et supérieures du domaine. Sur les corps, la vitesse est fixée égale à la vitesse locale de ce dernier et un gradient de pression nul est imposé. Les quantités turbulentes sont imposées selon le modèle de turbulence utilisé. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer au manuel utilisateur [NUMECA, 2012].

### B.2.6 Conclusion et remarques diverses

Cette section avait pour but de présenter les étapes de résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent diphasique d'un fluide incompressible et isotherme. Dans un premier temps, l'exemple d'une équation de transport classique a permis d'introduire la discrétisation spatiale et temporelle des différents termes. En particulier, les opérateurs d'interpolation aux faces et la discrétisation des termes de convection ont été introduits. Dans un second temps, la problématique du couplage vitesse-pression a été présentée. Enfin, la méthode de résolution générale a été résumée.

Comme il a déjà été énoncé en introduction, la méthode de résolution est séquentielle et itérative (cf. figure B.2.2 p. 43). Ainsi, au sein d'une itération de résolution de la méthode de Picard et après avoir modifié le maillage et calculé les métriques si nécessaire, la fonction de présence et les quantités turbulentes sont résolues. Ensuite, une variante de l'algorithme SIMPLE est utilisée pour résoudre les champs de vitesse et de pression. Cet algorithme consiste à prédire un champ de vitesse puis à évaluer le champ de pression adéquat pour respecter l'équation de continuité. Le champ de vitesse est par la suite corrigé en appliquant une équation de correction. En même temps, le flux de vitesse est sauvegardé pour être utilisé à la prochaine itération. Néanmoins, il reste une dernière étape avant de passer à l'itération suivante du processus de résolution de Picard.

La dernière étape consiste à relaxer les différents champs pour stabiliser l'algorithme de couplage. Les coefficients utilisés sont par défaut de 0.5 pour la vitesse et 0.3 pour la pression pour les cas tridimensionnels complexes. La correction de vitesse est relaxée de manière identique à la vitesse. En ce qui concerne les quantités turbulentes et la fonction de présence, des facteurs de relaxation respectifs de 0.2 et 0.5 sont utilisés. Le flux de vitesse n'est, quant à lui, pas relaxé.

Maintenant, il reste à énoncer quelques dernières remarques pour appréhender correctement le solveur ISIS-CFD. La méthode de résolution des systèmes linéaires des équations de quantité de mouvement, des quantités turbulentes et de la fonction de présence est une méthode de type Gauss-Seidel par blocs. Grâce à la méthode du pseudo pas de temps (cf. section B.2.2.4 p. 44), une vingtaine d'itérations est souvent suffisante pour atteindre un état convergé.

L'efficacité de cette méthode de résolution est nettement réduite lorsqu'il s'agit de résoudre l'équation de pression. En effet, seul le gradient pression est clairement défini et le système linéaire correspondant est mal-conditionné pour des volumes de contrôle très étirés. Ce sont les raisons pour lesquelles un solveur BiCGSTAB (« BiConjugate Gradient STABilized method ») et un préconditionneur  $LU(k)$  incomplet à un niveau ( $k = 1$ ) sont utilisés.

Dans tous les cas, le système de stockage des systèmes linéaires est le CSR (« Compressed Sparse Row »). La résolution de l'équation de pression est l'étape la plus coûteuse d'une itération de résolution non-linéaire.

Le code ISIS-CFD peut également être lancé sur des machines parallèles. L'ensemble des volumes de contrôle (le maillage) est divisé en sous-ensembles possédant approximativement le même nombre de volumes de contrôle. Ce partitionnement est réalisé à l'aide de MeTiS [MeTiS]. La communication entre les différents ensembles est réalisée selon le standard MPI [MPI].

Pour terminer cette partie, le cas particulier de l'équation de masse ajoutée est présenté à la section suivante.

## B.2.7 Équation de masse ajoutée

L'effet de masse ajoutée peut provoquer de fortes instabilités dans les algorithmes de couplage fluide-structure (cf. section D.5 p. 141 pour une description plus détaillée). L'équation de masse ajoutée et les conditions aux limites appliquées sur le corps considéré sont simplement présentées ci-dessous (cf. section D.5.1.6 p. 145 :) )

$$-\iint_{\partial\Omega_a} \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}}(\tilde{p}) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (\text{B.2.136})$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}}(\tilde{p}) \cdot \mathbf{n} = \left[ \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{dt} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \right] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (\text{B.2.137})$$

où  $\tilde{p}$  est le champ de pression artificiel,  $\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}$  sont les vitesses artificielles linéaires et angulaires du corps rigide,  $\mathbf{x}$  est le vecteur position et  $\mathbf{x}_G$  la position du centre de gravité du corps rigide considéré. La matrice de masse ajoutée est définie par l'équation (B.2.138) et évaluée par l'équation (B.2.139).

$$\mathbf{f}_{m_a} = -\mathbf{MA} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}} \quad \text{où} \quad \ddot{\boldsymbol{\delta}}_j = \begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{v}_j & \text{pour } j = 1, 2, 3 \\ \frac{d}{dt} \tilde{w}_{j-3} & \text{pour } j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (\text{B.2.138})$$

$$-\mathbf{MA}_{ij} = \begin{cases} -\left( \iint_S \tilde{p}_{/j} \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{e}_i & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ -\left( \iint_S \tilde{p}_{/j} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{e}_{i-3} & \text{pour } i = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (\text{B.2.139})$$

avec  $\tilde{p}_{/j}$  le champ de pression artificiel obtenu lorsque le degré de liberté  $j$  du corps rigide subit une accélération unitaire  $\ddot{\delta}_j$ . L'équation (B.2.136) est discrétisée de manière identique à une équation de pression. Soit l'équation :

$$\sum_f -\frac{1}{\rho_f} \cdot \overline{\text{grad}}(\tilde{p}_{/j})_f \cdot \mathbf{n}_f \cdot S_f = 0 \quad (\text{B.2.140})$$

Les termes de gradients aux faces (potentiellement discontinus pour prendre en compte les simulations diphasiques) sont évalués par l'opérateur  $\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{D}$  (cf. équation B.2.74 p. 52). L'équation discrétisée finale est donc la suivante :

$$\sum_f -\left[ \check{G}_L^f \cdot \tilde{p}_{/jL} \right]^{i+1} + \check{G}_R^f \cdot \tilde{p}_{/jR} \left]^{i+1} + \check{S}_g^f \left] ^i \right] S_f = 0 \quad (\text{B.2.141})$$

Le terme traité explicitement est initialisé comme étant nul puisque les gradients sont inconnus. La première itération consiste donc en une évaluation sans correction des non-orthogonalités du maillage.

Si la face appartient au corps considéré, la condition aux limites est donnée par l'équation (B.2.137) (condition de Neumann). Si elle appartient à un autre corps, la même condition est utilisée avec une accélération nulle (corps fixe). Pour les conditions de symétrie, la projection normale du gradient de pression est également nulle (un plan de symétrie agit donc comme un mur glissant fixe). Au loin, une condition de Neumann à gradient normal nul est utilisée lorsque la vitesse est imposée pour le calcul fluide. Lorsque c'est la pression qui est fixée, une condition de Dirichlet à valeur nulle est utilisée.

La résolution du système matriciel est réalisée par un solveur BiCGSTAB comme pour l'équation de pression. Un gain de 2 ordres sur le résidu linéaire est demandé par défaut.

Des cas de validation sont proposés à la section D.5.2 p. 149.





# Résolution du problème solide

Ce chapitre présente la méthode utilisée pour résoudre le problème de la mécanique du solide et des corps flexibles de type poutre. Dans un premier temps, les équations importantes du problème sont présentées. Notamment, la prise en compte de contraintes aboutit à un système d'équations différentielles algébriques.

Du fait de leurs caractéristiques, ces systèmes d'équations nécessitent des méthodes de résolution particulières. Ces méthodes sont donc présentées dans un second temps. Un exemple d'illustration est également proposé et analysé tout au long de cette partie afin de faciliter la présentation et la compréhension des différentes étapes.

## Contenu

<b>C.1</b>	<b>Le problème de la mécanique du solide en équation</b>	<b>75</b>
C.1.1	Principes généraux	75
C.1.2	Bilan de quantité de mouvement pour un corps rigide	75
C.1.3	Paramétrisation des corps rigides	77
C.1.4	Contraintes	79
C.1.5	Introduction à la théorie des poutres	80
C.1.5.1	Introduction	80
C.1.5.2	Cinématique des poutres et déformations	80
C.1.5.2.1	Généralités	80
C.1.5.2.2	Évaluation simplifiée des déformations	82
C.1.5.2.3	Évaluation générale des déformations	83
C.1.5.3	Loi de comportement élastique	84
C.1.5.4	Équations d'équilibre des poutres	85
C.1.5.5	Conclusion et remarques diverses	86
<b>C.2</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>88</b>
C.2.1	Introduction	88
C.2.2	Généralités	88
C.2.3	Traitement des rotations	89
C.2.3.1	Paramétrisation en fonction du pas de temps précédent	89
C.2.3.2	Paramétrisation en fonction de la prédiction	90
C.2.4	Exemple d'illustration	91
C.2.5	Algorithmes de résolution des EDA	92
C.2.6	Intégration temporelle	94
C.2.7	Initialisation	97
C.2.7.1	Introduction	97
C.2.7.2	Vérification initiale	98

C.2.7.3	Détermination des dérivées temporelles restantes . . . . .	100
C.2.7.4	Le respect des deuxièmes dérivées temporelles des équations de contrainte .	101
C.2.7.5	Première intégration temporelle . . . . .	102
C.2.8	Problématique des poutres . . . . .	102
C.2.8.1	Rappel . . . . .	102
C.2.8.2	Modèle élémentaire . . . . .	103
C.2.8.3	Évaluation des efforts internes aux points d'évaluation . . . . .	103
C.2.8.4	Remarques . . . . .	104
C.2.9	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	104
C.2.10	Résultats de l'exemple d'illustration . . . . .	105
C.2.11	Conclusion et remarques diverses . . . . .	105

## C.1 Le problème de la mécanique du solide en équation

L'objectif de cette section est de présenter les équations des problèmes mécaniques étudiés. Par conséquent, l'approche multi-corps utilisée pour la résolution de problèmes structures avec corps rigides et/ou éléments déformables de type poutre est introduite dans cette partie.

### C.1.1 Principes généraux

Le point de départ de la mécanique des structures rigides ou déformables est bien évidemment proche de l'une des équations élémentaires de la mécanique des fluides. En effet, le bilan de quantité de mouvement doit également être respecté. Cependant, à l'opposé de la mécanique des fluides, la mécanique des structures rigides ou déformables se présente couramment sous forme lagrangienne puisque qu'elle est particulièrement bien adaptée lorsque les éléments considérés ne se déforment pas de façon importante.

Les problèmes multi-corps peuvent être approchés selon deux points de vue différents. Ces derniers possèdent une influence non négligeable sur la méthode de résolution. Sans entrer dans les détails, il est intéressant de les introduire et de les comparer dès à présent car les équations résolues ne sont pas totalement identiques dans les deux cas.

Le premier point de vue consiste à adopter une vision globale du problème, c.-à-d. que le problème multi-corps est défini par le nombre minimum de degrés de liberté nécessaire à sa description totale. Les interactions entre les corps (qu'ils soient rigides ou déformables) sont prises en compte dès l'écriture des équations. Afin de clarifier ce point de vue, il est préférable d'utiliser un exemple. Ainsi, si un système mécanique est composé de deux corps rigides, ce système possède initialement 12 degrés de liberté physiques (2 corps rigides avec 6 degrés de liberté chacun). Si maintenant, ces deux corps rigides sont liés par une liaison rotule, le système possède 9 degrés de liberté physiques. L'approche globale consiste à résoudre uniquement les équations régissant ces 9 degrés de liberté. Cette approche, qui consiste donc à diminuer le nombre de degrés de liberté pour prendre en compte les contraintes cinématiques d'un système mécanique, se nomme « Reduced Coordinate Set ». La principale difficulté de cette méthode réside dans l'automatisation de la réduction du nombre de degrés de liberté. Par contre, cette méthode possède de bonnes caractéristiques numériques. Effectivement, la taille du système d'équations est réduite et des méthodes numériques d'intégration explicite efficaces peuvent être employées [Masarati, 1999].

Le deuxième point de vue, consiste à diviser le problème global en sous-systèmes élémentaires auxquels des inconnues supplémentaires sont ajoutées afin de prendre en compte les relations cinématiques entre les éléments. Ces inconnues supplémentaires représentent les efforts de liaison et agissent de manière identique à des multiplicateurs de Lagrange (contraintes). Ainsi, dans l'exemple précédant, ce n'est plus 9 ou 12 degrés de liberté globaux qui sont résolus mais 15 (2 corps rigides avec 6 degrés de liberté chacun, plus les 3 inconnues de liaison). Cette approche se nomme « Redundant Coordinate Set » [Masarati, 1999]. Cette approche facilite l'implémentation par la décomposition en sous-systèmes élémentaires mais demande des algorithmes de résolution numérique particuliers. Par exemple, les algorithmes de résolution explicite ne sont plus adaptés car ils ne sont pas assez stables (cf. annexe G.2 p. 334) [Chéze et Yakoubsohn].

En conclusion, les deux précédents paragraphes montrent que les équations régissant le comportement d'un système mécanique multi-corps sont différentes selon le point de vue adopté. Dans le premier cas, il faut chercher à réduire le nombre de degrés de liberté alors que dans l'autre cas, toutes les équations caractéristiques d'un sous-système (un corps rigide par exemple) sont résolues, et ceci, même si elles sont redondantes avec d'autres équations. C'est cette dernière approche qui est employée dans le solveur MBDyn. Par conséquent, les équations des sous-systèmes élémentaires sont d'abord présentées (cf. section C.1.2). Ensuite, la formulation analytique des interactions (contraintes) est explicitée (cf. section C.1.4 p. 79). Finalement, la méthode de résolution générale est décrite (cf. section C.2 p. 88).

### C.1.2 Bilan de quantité de mouvement pour un corps rigide

La mécanique des corps rigides est une discipline bien documentée. Seuls quelques résultats principaux sont proposés ici. Quelques détails sont également fournis en annexe (cf. annexe G.1.1 p. 318). La présente des-



cription est adaptée aux caractéristiques du solveur structure utilisé. En effet, les équations sont présentées en termes de quantités de mouvement exprimées en un point arbitraire du corps rigide considéré et non pas en termes de vitesses ou d'accélération au centre de gravité comme cela peut se faire habituellement. L'expression en termes de quantités de mouvement permet de prendre en compte facilement des corps à masse variable, et ceci, que ce soit dans le temps ou dans l'espace (fusée, définition d'un corps rigide à partir d'un assemblage de plusieurs sous-corps, etc.). Dans cette section,  $S$  est un corps rigide et les notations utilisées sont les suivantes :

- $R_0$  : le repère galiléen de référence ;
- $G$  : le centre de gravité de  $S$  ;
- $R_g$  : le repère lié à  $S$  ;
- $m$  : la masse de  $S$  ;
- $\mathbf{j}$  : le moment d'inertie du premier ordre de  $S$  ;
- $\mathbf{I}$  : le moment d'inertie du second ordre de  $S$  ;
- $\bar{\Omega}$  : le domaine spatial occupé par  $S$  ;
- $A$  : le point matériel appartenant à  $S$  servant à l'expression des torseurs ;
- $P$  : un point matériel quelconque appartenant à  $S$  ;
- $\mathbf{x}$  : la position ;
- $\mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)}$  : la matrice d'orientation de  $S$  ;
- $\mathbf{v}$  : la vitesse linéaire ;
- $\boldsymbol{\omega}$  : la vitesse angulaire ;
- $\dot{\mathbf{v}}$  : l'accélération linéaire ;
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  : l'accélération angulaire ;
- $\mathbf{f}$  : la résultante en effort des actions extérieures à  $S$  ;
- $\mathbf{m}$  : la résultante en moment des actions extérieures à  $S$  ;
- $\boldsymbol{\beta}$  : la quantité de mouvement linéaire de  $S$  (ou moment cinétique linéaire) ;
- $\boldsymbol{\sigma}$  : la quantité de mouvement angulaire de  $S$  (ou moment cinétique angulaire).

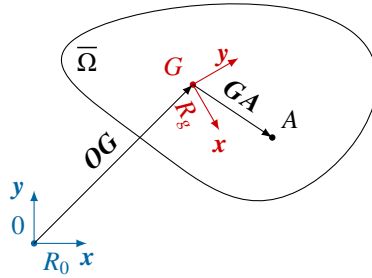


Figure C.1.1 : Corps rigide – Notations

Les quantités de mouvement linéaire et angulaire sont données par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_{(G,S/R_0)} = m \cdot \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{(A,S/R_0)} = \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

Le bilan de quantité de mouvement peut, quant à lui, se traduire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}_{(G,S/R_0)} = \mathbf{f}_{(G,S/R_0)} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \boldsymbol{\beta}_{(G,S/R_0)} = \mathbf{m}_{(A,S/R_0)} \end{cases} \quad (\text{C.1.2})$$

Les moments d'inertie du premier et du second ordre sont définis par :

$$\mathbf{j}_{(A,S/R_0)} = m \cdot \mathbf{AG}_{/R_0} = m \cdot \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)} \cdot \mathbf{AG}_{/R_g} \quad \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.3})$$

avec :

$$A = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \cdot dm \quad B = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \cdot dm \quad C = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot dm \quad (C.1.4)$$

$$D = \iiint_{\Omega} yz \cdot dm \quad E = \iiint_{\Omega} xz \cdot dm \quad F = \iiint_{\Omega} xy \cdot dm \quad (C.1.5)$$

et  $\mathbf{AG}_{/R_g}$  est le vecteur  $\mathbf{AG}$  exprimé dans  $R_g$  (vecteur constant dans le temps pour des corps rigides). La matrice d'inertie est souvent exprimée dans un repère lié à  $R_g$  et au centre de gravité de  $S$ . Le théorème de Huygens et la relation suivante sont utilisés pour réaliser le changement de base :

$$\mathbf{I}_{(A,S/R_0)} = \mathbf{P}_{(R_0/R_g)} \cdot \mathbf{I}_{(A,S/R_g)} \cdot \mathbf{P}_{(R_0/R_g)}^t \quad (C.1.6)$$

$$= \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)} \cdot \mathbf{I}_{(A,S/R_g)} \cdot \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)}^t \quad (C.1.7)$$

L'ensemble des équations (C.1.1) et (C.1.2) forme un système différentiel du premier ordre (cf. équation C.1.16 p. 79) qu'il est possible de résoudre par des méthodes classiques de résolution des Équations Différentielles Ordinaires (EDO). Un système d'EDO peut être mis sous la forme implicite suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{0} \quad (C.1.8)$$

où  $\mathbf{y}$  est l'ensemble des inconnues<sup>1</sup> et  $\mathbf{F}$  une fonction dont la dérivée par rapport à  $\dot{\mathbf{y}}$  n'est pas singulière. Pour un corps rigide libre, cette dérivée n'est pas singulière si les conditions classiques sont respectées (masse et inerties principales non-nulles). L'ajout de contraintes transforme ce système en un système d'Équations Différentielles Algébriques (EDA) (cf. section C.1.4 p. 79). En opposition à un système d'EDO, la dérivée de la fonction  $\mathbf{F}$  par rapport à la dérivée temporelle des inconnues peut être singulière pour un système d'EDA (cf. section C.2.4 p. 91).

### C.1.3 Paramétrisation des corps rigides

Paramétrer un corps rigide consiste à définir ses degrés de liberté généralisés, c.-à-d. choisir les quantités représentatives de son état cinématique. Dans un premier temps, il est possible de remarquer que le bilan de quantité de mouvement (cf. équation C.1.2 page suivante) est exprimé non pas en termes d'inconnues cinématiques (positions et vitesses linéaires ou angulaires) mais en termes de quantités de mouvement. Les quantités de mouvement sont donc utilisées en tant que variables de transition. Cette approche permet de rester général dans la formulation d'un problème multi-physique et facilite la mise en donnée du problème mécanique et son implémentation informatique.

Par exemple, si l'utilisateur veut définir un corps rigide au sein de MBDyn, il doit déclarer six degrés de liberté (trois en translation et trois en rotation). Cette définition passe par l'instanciation d'un « nœud » possédant six degrés de liberté indépendants. Ce « nœud » peut potentiellement représenter un nœud d'un élément d'une poutre flexible par exemple. La deuxième étape de la définition d'un corps rigide passe par l'instanciation d'une entité de type « corps rigide ». Cette entité définit les relations entre les six degrés de liberté et leurs dérivées temporelles (cf. équations C.1.1 page précédente et C.1.2 page suivante). Ce simple exemple permet d'illustrer que l'introduction de nouveaux éléments et la programmation informatique sont facilitées grâce à ce découplage entre les degrés de liberté et les relations qui les lient.

Dans un second temps, il est connu que l'une des principales difficultés de la paramétrisation des corps rigides intervient lorsque des mouvements à six degrés de liberté sont considérés. Effectivement, si la paramétrisation des degrés de liberté en translation ne pose pas de problème particulier, ceci est loin d'être le cas des degrés de liberté en rotation (cf. annexe G.1.2 p. 323). Ce point est particulièrement important car l'orientation du corps rigide intervient à plusieurs niveaux dans les équations du principe fondamental de la dynamique. En effet, la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  intervient implicitement dans les moments d'inertie du premier et second ordre (cf. équations C.1.3 page suivante et C.1.7). La paramétrisation des degrés de liberté en rotation est donc un des éléments clés des formulations multi-corps.

1. Lorsqu'il n'y a pas de contraintes, ce vecteur représente l'ensemble des inconnues cinématiques. Cet ensemble dépend de la paramétrisation du problème. En première approche, il représente l'ensemble des déplacements, des rotations et des quantités de mouvement linéaire et angulaire. Lorsque des contraintes sont ajoutées, il est nécessaire d'ajouter les inconnues de liaison.

Le théorème d'Euler permet d'affirmer que trois paramètres indépendants suffisent à définir totalement une orientation (ou de manière équivalente une rotation). L'orientation d'un corps est définie par la matrice de rotation  $\mathbf{R}$ . Ces paramétrisations, c.-à-d. les paramétrisations qui utilisent 3 paramètres indépendants, sont dites minimales et sont caractérisées par un faible coût de calcul lorsque des moyens adéquats sont utilisés. Les angles d'Euler, de Cardan ou l'utilisation d'un vecteur rotation en sont des exemples [Bauchau et Choi, 2003]. Cependant, des comportements singuliers peuvent apparaître (blocage de Cardan par exemple). C'est la raison pour laquelle, d'autres paramétrisations sont parfois utilisées. Une paramétrisation non minimale populaire est celle des quaternions (cf. annexe G.1.2.6 p. 330). Cette paramétrisation utilise quatre scalaires réels et permet d'éviter les comportements singuliers. Cependant, la relation qui lie le quatrième scalaire aux trois autres n'est pas automatiquement respectée lorsque le problème est résolu numériquement. Des étapes de correction sont donc nécessaires. Cependant, lorsque les amplitudes des mouvements de rotation ne sont pas trop importantes à chaque pas de temps, cela ne semble pas impacter de manière significative les résultats [Leroy, 2004].

Au sein de MBDyn, c'est une paramétrisation vectorielle qui est utilisée. Plus précisément, c'est celle dite de Gibbs-Rodrigues (cf. annexe G.1.2.5.3 p. 330) car elle possède des propriétés numériques particulières. L'axe unitaire de rotation, l'angle de rotation et le paramètre de rotation sont respectivement notés  $\mathbf{u}$ ,  $\theta$  et  $\mathbf{r}$ . Le paramètre de Gibbs-Rodrigues utilisé au sein de MBDyn est défini par :

$$\mathbf{r} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{C.1.9})$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  est donnée par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_d + \frac{4}{4 + \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{r}} \left( \mathbf{r} \times + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \times \cdot \mathbf{r} \times \right) \quad (\text{C.1.10})$$

où  $\cdot \times$  est l'opérateur matriciel représentatif du produit vectoriel (cf. annexe G.1.2.3 p. 326). Le lien entre le paramètre de rotation et la vitesse de rotation angulaire est donnée par la matrice  $\mathbf{G}$  (cf. annexe G.1.2.4 p. 327). Cette matrice est définie par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{4}{4 + \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{r}} \left( \mathbf{I}_d + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \times \right) \quad (\text{C.1.11})$$

Cette paramétrisation est particulièrement efficace d'un point de vue numérique car elle ne fait pas appel à des fonctions trigonométriques comme cela se retrouve généralement dans les paramétrisations vectorielles. Cependant, son domaine de validité est restreint car, étant donnée sa définition, des comportements singuliers apparaissent quand les angles de rotation sont proches de  $\pm\pi/2$ . Afin d'éviter cet inconvénient, le solveur MBDyn utilise une approche dite « d'actualisation » (cf. section C.2.3 p. 89). Cette approche permet de régler le problème des comportements singuliers et facilite également l'évaluation de la matrice Jacobienne du problème.

En conclusion de cette section, les inconnues cinématiques et les quantités de mouvement d'un corps rigide sont respectivement définies par les vecteurs  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ . La définition de ces quantités et de leurs dérivées temporelles sont données ci-dessous :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.12})$$

Par la suite, et ceci afin de simplifier les notations, il est considéré que l'ensemble des quantités sont exprimées dans le repère galiléen de référence en un point matériel arbitraire du corps considéré (point  $A$ ) à l'exception des moments d'inertie du premier et du second ordre qui sont exprimés dans le repère du corps considéré (car constants dans ce repère). Soient les notations simplifiées suivantes :

$$\mathbf{j} = m \cdot \mathbf{A}\mathbf{G}_{/R_g} \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_{(A,S/R_g)} \quad (\text{C.1.13})$$

Les quantités de mouvement linéaire et angulaire (cf. équation C.1.1 p. 76) peuvent également être présentées sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot \mathbf{I}_d & -(\mathbf{R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}) \times \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}) \\ (\mathbf{R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}) \times & \mathbf{R}^t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.14})$$

le principe fondamental de la dynamique (cf. équation C.1.2 p. 76) peut, quant à lui, être donné sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{p}} = \zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t, \dots) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} - \dot{\mathbf{x}} \wedge \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.15})$$

où la fonction  $\zeta$  représente l'ensemble des efforts et moments généralisés auxquels sont retranchées les actions de liaison. Elle représente donc un des termes cinématiques non linéaires (c.-à-d. le terme  $\dot{\mathbf{x}} \wedge \boldsymbol{\beta}$ ), les efforts gravitationnels, les efforts fluides (dans notre cas) et l'ensemble des efforts supplémentaires. Au final, une fois la paramétrisation choisie, il est possible de présenter le système d'équations différentielles de manière succincte par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t, \dots) \end{cases} \quad (\text{C.1.16})$$

### C.1.4 Contraintes

Une contrainte exprime une relation algébrique entre un ou plusieurs degrés de liberté de deux corps différents. Elle peut représenter des liaisons cinématiques (liaison plan, pivot, rotule, etc.), des contraintes cinématiques (distance, contact, etc.) ou quelques efforts particuliers (effort de frottement, effort de contact, etc.).

Les contraintes sont généralement divisées en deux catégories : les contraintes holonomes et non-holonomes. Une contrainte est dite holonome s'il existe une fonction  $\phi$  telle que :

$$\phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (\text{C.1.17})$$

Les contraintes holonomes sont également appelées contraintes cinématiques et représentent l'ensemble des liaisons cinématiques parfaites. Une contrainte holonome qui ne dépend pas du temps est dite scléronome et rhéonome dans le cas contraire. Les contraintes holonomes diminuent la taille du système à résoudre si une approche « Reduced Coordinate Set » est employée. Les principales contraintes non-holonomes peuvent, quant à elles, se mettre sous la forme :

$$\psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (\text{C.1.18})$$

Ces contraintes ne diminuent pas la taille du système d'équations à résoudre lorsqu'une approche « Reduced Coordinate Set » est utilisée [Bauchau, 2011]. Ces deux types de contraintes ajoutent des inconnues algébriques supplémentaires notées  $\lambda$  dans le cas des contraintes holonomes et  $\mu$  pour les contraintes non-holonomes. Ces inconnues sont dites algébriques car leurs dérivées temporelles n'interviennent pas dans les équations [Bauchau, 2011]. Ces inconnues sont également représentatives des efforts généralisés supplémentaires qui obligent les corps considérés à respecter les contraintes holonomes ou non-holonomes.

L'ajout des équations (C.1.17) et (C.1.18) aux équations (C.1.1) et (C.1.2) conduit à un ensemble d'EDA qui peut être résumé sous le formalisme des multiplicateurs de Lagrange par [Cavagna *et al.*, 2011] :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\phi}'_{/\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\psi}'_{/\dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\mu} = \zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t, \dots) \\ \phi(\mathbf{q}, t) = 0 \\ \psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1.19})$$

Au sein de MBDyn, ce ne sont pas des quantités abstraites (telles que les multiplicateurs de Lagrange) qui sont utilisées, mais les véritables efforts de liaison et/ou contrainte [Ghiringhelli *et al.*, 1999]. Ces efforts sont notés  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  et sont évalués par les équations suivantes :

$$\lambda^* = \boldsymbol{\phi}'_{/\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad \mu^* = \boldsymbol{\psi}'_{/\dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\mu} \quad (\text{C.1.20})$$

Le système d'équations (C.1.19) peut bien se mettre sous la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad \mathbf{y} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda^*, \mu^*]^t \quad (\text{C.1.21})$$

Il est également courant que la matrice de raideur (notée  $K$ ) et la matrice d'amortissement (notée  $C$ ) soient séparées de la fonction  $\zeta$ . Ainsi, les notations suivantes sont utilisées par la suite :

$$\zeta(q, \dot{q}, p, t, \dots) = \zeta^*(q, \dot{q}, p, t, \dots) - K \cdot (q - q_k) - C \cdot \dot{q} \quad (C.1.22)$$

## C.1.5 Introduction à la théorie des poutres

### C.1.5.1 Introduction

Une poutre est une structure déformable particulière puisque une de ses dimensions domine les autres. Du fait de cette caractéristique, il est possible d'établir différentes théories permettant de s'affranchir de la résolution complète des équations de la MMC (Mécanique des Milieux Continus).

Une poutre est souvent décrite comme étant l'assemblage continu de sections le long d'une ligne (cf. figure C.1.2). Si cette ligne représente l'ensemble des centres de gravité des sections, elle est appelée fibre moyenne ou fibre neutre.

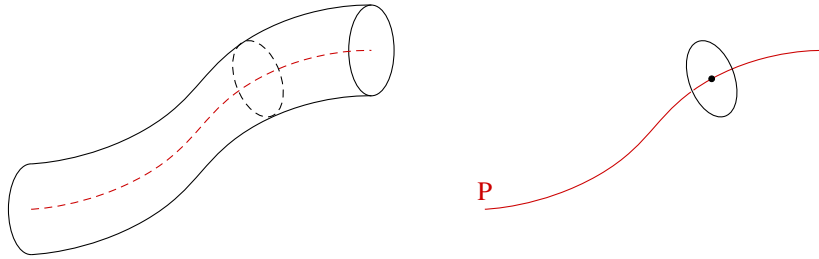


Figure C.1.2 : Poutre (gauche) et modélisation (droite)

La théorie des poutres consiste à modéliser les relations qui existent entre ces sections. Les différentes théories des poutres se distinguent au niveau des hypothèses simplificatrices. Par exemple, certaines hypothèses ne permettent pas de prendre en compte le gauchissement de la section ou le couplage flexion-torsion.

Les hypothèses classiquement réalisées pour la cinématique de ces sections sont présentées à la section C.1.5.2. À ces hypothèses, il faut rajouter le principe de Saint-Venant pour simplifier la prise en compte des efforts extérieurs s'exerçant sur la poutre. Ce principe permet de remplacer une sollicitation extérieure par son torseur équivalent au niveau de la fibre neutre.

### C.1.5.2 Cinématique des poutres et déformations

#### C.1.5.2.1 Généralités

Sauf dans de rares cas, il est supposé que les sections restent planes lorsque la poutre se déforme. C'est l'hypothèse de Navier. Si cette hypothèse est respectée, la cinématique est dite de Navier-Timoshenko. Si en plus, les sections restent orthogonales à la fibre neutre (hypothèse de Kirchhoff), la cinématique est dite de Navier-Bernoulli (cf. figure C.1.3 page suivante). Cette hypothèse est acceptable lorsque la poutre est dite élancée (poutre longue), c.-à-d. lorsque le rapport  $L/D > 20$  ( $L$  est la longueur de la poutre et  $D$  le diamètre équivalent de la section). Au contraire, la cinématique de Timoshenko est valable lorsque la poutre est moyennement longue, c.-à-d. lorsque  $10 < L/D < 20$  [Craveur, 2008].

Que ce soit dans le cadre de la cinématique de Navier-Bernoulli ou de Navier-Timoshenko, une section peut être décrite par sa position et son orientation (comme un corps rigide). Une des difficultés réside dans la modélisation des déformations dans le plan des sections. Elles sont couramment négligées car, du fait des dimensions caractéristiques du problème, elles sont généralement faibles. Les sections sont souvent considérées comme rigides dans un premier temps et certaines des déformations dans le plan des sections sont modélisées après-coup par la loi de comportement du matériau constituant la poutre. Ce point est brièvement développé à la section C.1.5.3 p. 84.

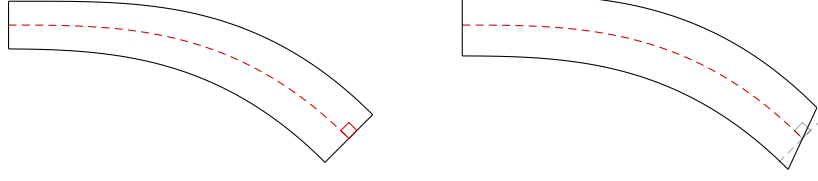


Figure C.1.3 : Poutre – Cinématiques de Bernoulli (gauche) et de Timoshenko (droite)

Afin d'étudier le comportement d'une poutre, il est courant de travailler dans le repère de Frenet de la ligne de référence. Dans MBDyn, c'est une approche différente qui est utilisée. En effet, ce qui est réellement intéressant pour la résolution, ce n'est pas l'orientation du repère de Frenet mais l'orientation des sections (cette orientation est identique uniquement dans le cadre de la cinématique de Navier-Bernoulli). Ici, il est juste supposé que le premier vecteur du repère des sections est proche du vecteur tangent à la ligne de référence. Ainsi, lorsqu'il est dit que les quantités sont exprimées dans le repère local, cela signifie qu'elles sont exprimées dans le repère de la section correspondante et non pas dans le repère de Frenet de la ligne de référence. Dans la suite de cet exposé, lorsqu'une quantité est exprimée dans ce repère local, elle est annotée par un « $\sim$ ».

Soient  $P$  la ligne de référence de la poutre,  $S$  une section quelconque de la poutre,  $s$  les coordonnées d'un point appartenant à cette section,  $p$  les coordonnées du point d'intersection entre  $P$  et  $S$ ,  $\xi$  le paramètre de  $P$  et  $R$  la matrice d'orientation de la section par rapport au repère global (cf. figure C.1.4).

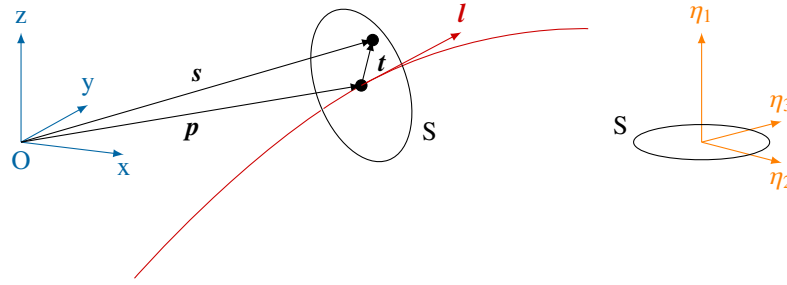


Figure C.1.4 : Poutre – Notations

Ici, il est supposé que le point  $p$  coïncide avec le centre de la section  $S$ . Dans ce cas, les différentes quantités représentatives des propriétés géométriques de la section sont données par les équations ci-dessous où  $S$  représente la surface,  $\tilde{j}_2$  et  $\tilde{j}_3$  les moments d'inertie d'ordre 1 et  $\tilde{I}_2$ ,  $\tilde{I}_3$  et  $\tilde{I}_{23}$  les moments d'inertie d'ordre 2.

$$S = \iint_S d\tilde{s} \quad \tilde{j}_2 = \iint_S \tilde{t}_2 d\tilde{s} = 0 \quad \tilde{j}_3 = \iint_S \tilde{t}_3 d\tilde{s} = 0 \quad (\text{C.1.23})$$

$$\tilde{I}_2 = \iint_S \tilde{t}_3^2 d\tilde{s} \quad \tilde{I}_3 = \iint_S \tilde{t}_2^2 d\tilde{s} \quad \tilde{I}_{23} = \iint_S \tilde{t}_2 \tilde{t}_3 d\tilde{s} \quad (\text{C.1.24})$$

Le point  $p$  et la matrice d'orientation  $R$  ne dépendent que du paramètre  $\xi$ . Si le gauchissement des sections est négligé, le vecteur  $t$  ne dépend que des deuxième et troisième coordonnées du repère lié à la section (coordonnées  $\eta_2$  et  $\eta_3$ ). Si la section est considérée rigide, alors le vecteur  $\tilde{t}$  est constant ( $t = R \cdot \tilde{t}$ ). Dans ce cas, le vecteur  $s$  ne dépend que de  $\xi$  et sa différentiation vaut :

$$s_{/\xi} = p_{/\xi} + t_{/\xi} = p_{/\xi} + (R \cdot \tilde{t})_{/\xi} = p_{/\xi} + R_{/\xi} \cdot \tilde{t} \quad (\text{C.1.25})$$

La différentiation de  $p$  par  $\xi$  est un vecteur tangent à la ligne de référence. Il est noté  $l$  par la suite. La différentiation d'une matrice de rotation peut être écrite par le biais d'un vecteur  $\varrho$ , c.-à-d. sous la forme  $R_{/\xi} = \varrho \times R$  (cf. annexe G.1.2.4 p. 327). Ainsi :

$$s_{/\xi} = l + \varrho \times R \cdot \tilde{t} = l + \varrho \times t \quad (\text{C.1.26})$$

En conclusion, la variation d'un point d'une section par rapport au paramètre  $\xi$  peut être exprimée par le vecteur tangent  $l$  et le vecteur courbure de la ligne de référence  $\varrho$ . Avant d'évaluer les déformations d'une poutre, il

est important de rappeler que le tenseur des déformations général est donné par le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Soit le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  défini par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0 \quad (\text{C.1.27})$$

où  $\mathbf{s}_0$  représente la position du point  $\mathbf{s}$  dans la configuration initiale de la poutre. Le tenseur de Green-Lagrange est défini en convention d'Einstein par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{C.1.28})$$

Lorsque les déformations sont faibles, c.-à-d. dans l'hypothèse des petites perturbations, les termes d'ordre 2 du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont négligés. Ainsi, le tenseur linéarisé des déformations est donné par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{C.1.29})$$

### C.1.5.2.2 Évaluation simplifiée des déformations

Le cas simplifié est présenté ici pour faciliter la compréhension et faire le lien avec la majorité des différents ouvrages traitant de la théorie des poutres. Ici, il est supposé que la poutre est initialement droite, qu'elle ne s'éloigne pas de sa configuration de référence (pas de mouvement de corps rigide d'ensemble) et que les déformations sont faibles (hypothèse des petites perturbations). Dans ce cas, toutes les quantités peuvent être exprimées dans le repère de la section<sup>2</sup> qui est supposé identique au repère global pour éviter un alourdissement inutile des notations. Soient  $\mathbf{d}$  le déplacement du point  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  la rotation de la section. Le déplacement du point  $\mathbf{s}$  est noté  $\mathbf{u}$  et est donné par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + r_2 t_3 - r_3 t_2 \\ d_2 - r_1 t_3 \\ d_3 + r_1 t_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.30})$$

Les vecteurs  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{r}$  ne dépendent que de la première coordonnée du repère de la section. Le gradient du déplacement est donc donné par :

$$\overline{\text{grad}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} d_{1/\xi} + r_{2/\xi} t_3 - r_{3/\xi} t_2 & -r_3 & r_2 \\ d_{2/\xi} - r_{1/\xi} t_3 & 0 & -r_1 \\ d_{3/\xi} + r_{1/\xi} t_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.31})$$

Le tenseur des déformations linéarisé est donné par la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement (cf. équation C.1.29), soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} d_{1/\xi} + r_{2/\xi} t_3 - r_{3/\xi} t_2 & \text{sym} & \text{sym} \\ \frac{1}{2} (d_{2/\xi} - r_{1/\xi} t_3 - r_3) & 0 & \text{sym} \\ \frac{1}{2} (d_{3/\xi} + r_{1/\xi} t_2 + r_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.32})$$

Ainsi, pour connaître la totalité du tenseur des déformations, il suffit de connaître la première colonne, c.-à-d. les termes  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$ . Par la suite, le vecteur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  est défini par :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1/\xi} + r_{2/\xi} t_3 - r_{3/\xi} t_2 \\ d_{2/\xi} - r_{1/\xi} t_3 - r_3 \\ d_{3/\xi} + r_{1/\xi} t_2 + r_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.33})$$

2. Ce repère est également supposé identique au repère de Frenet de la ligne de référence.

où  $\gamma$  représente le double des cisaillements. Il est également possible de remarquer que ce vecteur peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\kappa} \wedge \boldsymbol{t} \quad \text{avec :} \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} d_{1/\xi} \\ d_{2/\xi} - r_3 \\ d_{3/\xi} + r_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} r_{1/\xi} \\ r_{2/\xi} \\ r_{3/\xi} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.34})$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  est la déformation dite de membrane et  $\boldsymbol{\kappa}$  la courbure<sup>3</sup>. La déformation de membrane modélise les déformations liées à la modification de longueur de la poutre (termes  $d_{1/\xi}$ ,  $d_{2/\xi}$  et  $d_{3/\xi}$ ) et celles liées à la rotation de la section (termes  $r_2$  et  $r_3$ ). Le vecteur courbure modélise les déformations liées à la flexion de la poutre (termes  $r_{2/\xi}$  et  $r_{3/\xi}$ ) et la torsion (terme  $r_{1/\xi}$ ).

### C.1.5.2.3 Évaluation générale des déformations

Lorsque la poutre possède un mouvement de corps rigide important, il est plus difficile d'utiliser un repère identique pour la configuration de référence et la configuration courante. De plus, il n'est plus possible d'utiliser une approche en déplacement comme précédemment (vecteurs  $\boldsymbol{d}$  et  $\boldsymbol{r}$ ), car le mouvement de corps rigide de la poutre n'entraîne pas obligatoirement de déformations. De plus, si la poutre est courbée dans sa configuration de référence, il est nécessaire de prendre en compte cette courbure initiale.

Il est donc préférable de définir de manière moins formelle les déformations d'une poutre. Il a été montré précédemment que les déformations d'une poutre peuvent être définies comme étant la variation par rapport au paramètre  $\xi$  de la position d'un point appartenant à une section. Effectivement, dans l'équation (C.1.34), les dérivées qui interviennent sont uniquement celles liées au paramètre  $\xi$  (hypothèse de rigidité des sections). L'équation (C.1.26) donne déjà une bonne idée de ce que pourrait être ces variations puisque le vecteur  $\boldsymbol{l}$  ressemble à une déformation de membrane (sans la rotation de la section) et  $\boldsymbol{\varrho}$  représente la courbure de la poutre.

Ainsi, les déformations d'une poutre peuvent être définies comme étant la différence de la variation de la position d'un point appartenant à une section entre la configuration courante et la configuration de référence. Afin de prendre en compte les mouvements de rotation de corps rigide et les grandes déformations de la poutre, il est nécessaire d'exprimer ces quantités dans un référentiel qui évolue avec la poutre. En particulier, il est possible d'utiliser le repère des sections. Par conséquent, les déformations d'une poutre peuvent être caractérisées en évaluant la différence suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{/\xi} - \tilde{\boldsymbol{s}}_{0/\xi} = \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{s}_{/\xi} - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{s}_{0/\xi} \quad (\text{C.1.35})$$

Soit après calcul<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{s}}_{/\xi} - \tilde{\boldsymbol{s}}_{0/\xi} &= \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{s}_{/\xi} - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{s}_{0/\xi} \\ &= \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{l} + \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{\varrho} \times \boldsymbol{t} - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{l}_0 - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{\varrho}_0 \times \boldsymbol{t}_0 \\ &= \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{l} - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{R}^t \cdot \boldsymbol{\varrho} \times \boldsymbol{R} \cdot \tilde{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{R}_0^t \cdot \boldsymbol{\varrho}_0 \times \boldsymbol{R} \cdot \tilde{\boldsymbol{t}}_0 \\ &= \tilde{\boldsymbol{l}} - \tilde{\boldsymbol{l}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\varrho}} \times \boldsymbol{t} - \tilde{\boldsymbol{\varrho}}_0 \times \tilde{\boldsymbol{t}}_0 \\ &= (\tilde{\boldsymbol{l}} - \tilde{\boldsymbol{l}}_0) + (\tilde{\boldsymbol{\varrho}} - \tilde{\boldsymbol{\varrho}}_0) \times \tilde{\boldsymbol{t}} \end{aligned} \quad (\text{C.1.36})$$

Le vecteur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$ , la déformation de membrane  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$  et le vecteur courbure élastique  $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$  sont ainsi donnés par :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\nu}} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \times \tilde{\boldsymbol{t}} \quad \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \tilde{\boldsymbol{l}} - \tilde{\boldsymbol{l}}_0 \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \tilde{\boldsymbol{\varrho}} - \tilde{\boldsymbol{\varrho}}_0 \quad (\text{C.1.37})$$

Le vecteur courbure élastique  $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$  se comprend aisément. En effet, il représente la différence entre la courbure géométrique courante et la courbure à l'état de référence. Il est également intéressant de vérifier que la déformation de membrane contient bien la rotation de la section. Pour cela, il suffit de supposer que la ligne de

3. Dans ce cas-ci, c'est réellement la courbure de la ligne de référence car il a été supposé que la poutre est initialement droite. Lorsqu'elle est courbée dans sa configuration de référence, il faut prendre quelques précautions (cf. section C.1.5.2.3).

4. Comme la section est considérée rigide :  $\tilde{\boldsymbol{t}} = \tilde{\boldsymbol{t}}_0$ . Lorsque ce n'est pas le cas, il est nécessaire de différencier également le vecteur  $\boldsymbol{t}$  selon les coordonnées  $\eta_2$  et  $\eta_3$  [Masarati, 1999].



référence reste inchangée au cours du temps, c.-à-d.  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$ . Sous cette condition, la déformation de membrane vaut :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{l}}_0 = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{l} - \mathbf{R}_0^t \cdot \mathbf{l}_0 = (\mathbf{R}^t - \mathbf{R}_0^t) \mathbf{l} \quad (\text{C.1.38})$$

Dans ce cas, les déformations de membrane sont donc uniquement dues à la différence d'orientation de la section entre la situation courante et la situation de référence. Pour vérifier que la déformation de membrane comporte également la déformation de la poutre selon son axe, un raisonnement identique peut être effectué en supposant une orientation identique des sections au cours du temps.

### C.1.5.3 Loi de comportement élastique

La loi de comportement élastique (ou loi de Hooke) est la plus utilisée. Elle exprime la relation entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Cette loi peut être donnée en convention d'Einstein par les équations équivalentes suivantes :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{C.1.39})$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau et  $\delta$  le symbole de Kronecker. Dans la théorie des poutres, il est très courant de négliger les contraintes dans le plan de la section, c.-à-d. les termes  $\tilde{\sigma}_{22}$ ,  $\tilde{\sigma}_{33}$  et  $\tilde{\sigma}_{23}$ . Effectivement, ces termes sont nuls aux frontières de la section et, les dimensions de la section étant faibles par rapport à sa longueur, ces contraintes ne peuvent se développer de manière conséquente au sein de la section. Par conséquent, d'après l'équation (C.1.39) :

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{11} - \frac{\nu}{E} (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) = \frac{1}{E} \tilde{\sigma}_{11} \quad (\text{C.1.40})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{12} \quad (\text{C.1.41})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{13} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{13} \quad (\text{C.1.42})$$

Soit après réécriture :

$$\tilde{\sigma}_{11} = E \tilde{\varepsilon}_{11} \quad \tilde{\sigma}_{12} = G \tilde{\gamma}_{12} \quad \tilde{\sigma}_{13} = G \tilde{\gamma}_{13} \quad (\text{C.1.43})$$

où  $G$  est le module de cisaillement défini par :  $G = E/2(1+\nu)$ . La loi de Hooke permet également d'évaluer certaines déformations dans le plan de la section (même si elles sont négligées dans la cinématique des sections). En effet, d'après l'équation (C.1.39), les déformations dans le plan de la section valent :

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{22} - \frac{\nu}{E} (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) = -\frac{\nu}{E} \tilde{\sigma}_{11} = -\nu \tilde{\varepsilon}_{11} \quad (\text{C.1.44})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{33} - \frac{\nu}{E} (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) = -\frac{\nu}{E} \tilde{\sigma}_{11} = -\nu \tilde{\varepsilon}_{11} \quad (\text{C.1.45})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}_{23} = 0 \quad (\text{C.1.46})$$

Soit au final :

$$\tilde{\varepsilon}_{22} = -\nu \tilde{\varepsilon}_{11} \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = -\nu \tilde{\varepsilon}_{11} \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = 0 \quad (\text{C.1.47})$$

Les déformations dans le plan résultent uniquement de l'effet de Poisson et peuvent être déterminées à partir du vecteur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Une fois la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations connue, il est possible d'évaluer le torseur des efforts équivalents s'exerçant sur une section. Les composantes

de ce torseur sont données au point  $\mathbf{p}$  par :

$$\tilde{F}_n = \iint_S \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{s} \quad \tilde{M}_t = \iint_S (\tilde{t}_2 \tilde{\sigma}_{13} - \tilde{t}_3 \tilde{\sigma}_{12}) d\tilde{s} \quad (\text{C.1.48})$$

$$\tilde{F}_{t2} = \iint_S \tilde{\sigma}_{12} d\tilde{s} \quad \tilde{M}_{f2} = \iint_S \tilde{t}_3 \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{s} \quad (\text{C.1.49})$$

$$\tilde{F}_{t3} = \iint_S \tilde{\sigma}_{13} d\tilde{s} \quad \tilde{M}_{f3} = \iint_S -\tilde{t}_2 \tilde{\sigma}_{11} d\tilde{s} \quad (\text{C.1.50})$$

où  $\tilde{F}_n$  est l'effort normal,  $\tilde{F}_{t2}$  et  $\tilde{F}_{t3}$  les efforts tranchants,  $\tilde{M}_t$  le moment de torsion et  $\tilde{M}_{f2}$  et  $\tilde{M}_{f3}$  les moments fléchissants. Soit après calculs (cf. équations C.1.23 et C.1.24 p. 81, C.1.37 p. 83 et C.1.43 page précédente) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_n \\ \tilde{F}_{t2} \\ \tilde{F}_{t3} \\ \tilde{M}_t \\ \tilde{M}_{f2} \\ \tilde{M}_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GS & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(\tilde{I}_2 + \tilde{I}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E\tilde{I}_2 & -E\tilde{I}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E\tilde{I}_{23} & E\tilde{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.51})$$

Cette relation est écrite par la suite sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}} \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.52})$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{D}}$  est la matrice de comportement de la section. La somme des inerties d'ordre 2 est souvent notée  $I_0$  et appelée moment quadratique polaire ou moment de giration.

Les approximations réalisées aboutissent au problème du blocage en cisaillement [Craveur, 2008]. Cela peut notamment s'observer rapidement par l'expression des contraintes en cisaillement  $\tilde{\sigma}_{12}$  et  $\tilde{\sigma}_{13}$ . Par exemple, la contrainte en cisaillement  $\tilde{\sigma}_{12}$  vaut :

$$\tilde{\sigma}_{12} = G(\tilde{v}_2 - \tilde{\kappa}_1 \tilde{t}_3) \quad (\text{C.1.53})$$

Cette dernière équation montre bien que cette contrainte en cisaillement n'est pas nulle aux bords de la section puisque c'est une fonction affine de  $\tilde{t}_3$ . En réalité, c'est une fonction parabolique qui assure la nullité des contraintes aux frontières des sections [Gere, 2004]. Cette linéarisation entraîne une surestimation de la rigidité de la section qui est donc corrigée par un facteur multiplicateur  $k$  (cf. équation C.1.54) [Timoshenko, 1921] [Timoshenko, 1922]. La loi de cisaillement est donc couramment modifiée et écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{t2} &= GS_e \tilde{v}_2 \\ \tilde{F}_{t3} &= GS_e \tilde{v}_3 \end{aligned} \quad \text{où} \quad S_e = kS \quad (\text{C.1.54})$$

$S_e$  est appelée surface effective. Le coefficient de correction (coefficient de Timoshenko) vaut  $k = 6(1 + \nu)/(7 + 6\nu)$  dans le cas d'une section circulaire et  $k = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$  dans le cas d'une section prismatique.

#### C.1.5.4 Équations d'équilibre des poutres

Soient une poutre  $P$  en équilibre et un tronçon de cette poutre délimité par les points  $A$  et  $B$  (cf. figure C.1.5 page suivante). Soient  $O$  un point quelconque,  $\boldsymbol{\varphi}_l$  la densité linéique des efforts extérieurs et  $\boldsymbol{\varpi}_l$  la densité linéique des moments extérieurs (les efforts et moments ponctuels sont également inclus dans ces termes).

Pour le tronçon délimité par les points  $A$  et  $B$ , les équations d'équilibres en effort et moment sont :

$$-\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \int_A^B \boldsymbol{\varphi}_l d\xi = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.55})$$

$$-\mathbf{M}_A - \mathbf{OA} \wedge \mathbf{F}_A + \mathbf{M}_B + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F}_B + \int_A^B \boldsymbol{\varpi}_l d\xi + \int_A^B \mathbf{Op} \wedge \boldsymbol{\varphi}_l d\xi = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.56})$$

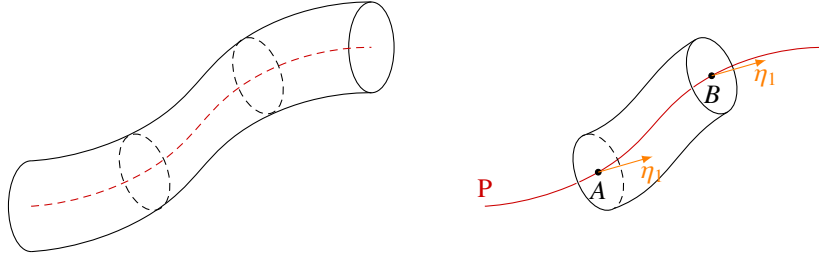


Figure C.1.5 : Poutre – Tronçon d'une poutre

Les efforts  $\mathbf{F}$  et les moments  $\mathbf{M}$  étant des fonctions de  $\xi$ , les différences suivantes peuvent être écrites sous forme intégrale :

$$-\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \int_A^B \mathbf{F}_{/\xi} d\xi \quad (\text{C.1.57})$$

$$-\mathbf{M}_A - \mathbf{OA} \wedge \mathbf{F}_A + \mathbf{M}_B + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F}_B = \int_A^B \mathbf{M}_{/\xi} + (\mathbf{Op} \wedge \mathbf{F})_{/\xi} d\xi \quad (\text{C.1.58})$$

Comme l'ensemble des équations (C.1.56) à (C.1.58) sont valables pour tous points  $A$  et  $B$ , les équations d'équilibre locales sont donc :

$$\mathbf{F}_{/\xi} + \boldsymbol{\varphi}_l = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.59})$$

$$\mathbf{M}_{/\xi} + (\mathbf{Op} \wedge \mathbf{F})_{/\xi} + \boldsymbol{\varpi}_l + \mathbf{Op} \wedge \boldsymbol{\varphi}_l = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.60})$$

Dans la suite de cet exposé, les intégrales des forces et moments extérieurs sont notées :

$$\boldsymbol{\varphi}_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{\varphi}_l d\xi \quad \boldsymbol{\varpi}_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{\varpi}_l d\xi + \int_A^B \mathbf{Op} \wedge \boldsymbol{\varphi}_l d\xi \quad \chi_{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{AB} \\ \boldsymbol{\varpi}_{AB} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.61})$$

Les équations d'équilibre du tronçon sont donc données sous forme matricielle par :

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{OA} \times & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{OB} \times & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{AB} \\ \boldsymbol{\varpi}_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.62})$$

Par la suite, la matrice de transport des moments  $\Upsilon_{OA}$  et la matrice de changement de base généralisée  $\mathbf{R}_A$  sont respectivement notées :

$$\Upsilon_{OA} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{OA} \times & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.63})$$

Comme il a été montré à la section C.1.5.3 p. 84, le tenseur des efforts internes équivalents peut s'écrire facilement sous la forme  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}$ . L'équation d'équilibre du tronçon peut donc s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$-\Upsilon_{OA} \cdot \mathbf{R}_A \cdot \tilde{\mathbf{D}}_A \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}_A + \Upsilon_{OB} \cdot \mathbf{R}_B \cdot \tilde{\mathbf{D}}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}_B + \boldsymbol{\varphi}_{AB} = \mathbf{0} \quad (\text{C.1.64})$$

### C.1.5.5 Conclusion et remarques diverses

L'objectif de cette partie sur la théorie des poutres était d'explicitier les différentes équations régissant le comportement d'une poutre. D'un point de vue théorique, une poutre est décrite par un assemblage continu de sections le long d'une ligne de référence. D'un point de vue discret, cela revient à étudier le comportement de corps rigides (les sections) ayant des relations particulières entre eux (loi de comportement).

La rigidité des sections est une approximation permettant de simplifier le problème. Effectivement, grâce à cette approximation, la cinématique d'une poutre peut être totalement décrite par la position de la ligne de référence et l'orientation des sections. Le gauchissement des sections (déformation des sections hors de leur

plan) est rarement pris en compte de manière rigoureuse mais il peut être modélisé en complexifiant fortement la loi de comportement [Masarati, 1999]. Il en est de même pour les déformations dans le plan de la section (cf. section C.1.5.3 p. 84).

L'objectif des éléments poutres n'est pas de donner des informations locales sur le comportement d'une structure longiligne mais de modéliser uniquement son comportement global. Les différentes approximations sont donc souvent légitimes.

Dans cette partie, seules les équations d'équilibre des poutres ont été présentées. Les équations dynamiques diffèrent uniquement par la présence des termes liés à l'accélération. Or, ces termes sont naturellement pris en compte par la modélisation des sections en tant que corps rigides et n'interviennent pas dans l'évaluation des efforts internes. L'approche statique est donc suffisante pour présenter la méthode d'évaluation des efforts internes. La loi de comportement peut également être modifiée pour modéliser des phénomènes viscoélastiques.

## C.2 Résolution numérique

### C.2.1 Introduction

La résolution numérique du problème structure est réalisée par MBDyn, code d'analyse pluridisciplinaire en systèmes multi-corps développé au Département d'Ingénierie Aérospatiale de l'Université Polytechnique de Milan [MBDyn]. Il est sous licence « GNU's GPL 2.1 » ce qui en fait un solveur ouvert à toutes modifications éventuelles et libre d'utilisation pour des applications industrielles. Il est principalement dédié à la résolution de problèmes complexes comportant des corps rigides et éléments déformables à dynamique non-linéaire, des asservissements, des interactions aéro-élastiques ainsi que des composants électriques et hydrauliques.

L'objectif de cette partie est d'introduire la méthode de résolution numérique des problèmes mécaniques présentés dans ces travaux. Le lecteur soucieux d'approfondir certaines parties pourra se référer à la documentation présente sur le site internet du solveur (thèses, articles, présentations ou documentation technique) [MBDyn] ou à des ouvrages de référence [Shabana, 2010], [Bauchau, 2011].

Les principales caractéristiques numériques d'un solveur de mécanique multi-corps dépendent, bien entendu, de l'approche utilisée (« Redundant Coordinate Set » dans notre cas) mais pas uniquement. La paramétrisation (c.-à-d. le choix des degrés de liberté), la méthode d'intégration temporelle, la méthode d'initialisation et la méthode de prise en compte des contraintes sont des exemples des nombreux éléments pouvant impacter de manière forte la robustesse et la précision des résultats obtenus mais également les possibilités de modélisation (rupture de liaison, asservissement, scénario, éléments flexibles, etc.). Comme il a déjà été énoncé précédemment, l'objectif de cette partie n'est pas de présenter un panel des différentes méthodes de résolution, mais uniquement d'introduire celles utilisées au sein du solveur MBDyn. Cependant, quelques comparaisons succinctes avec d'autres méthodes de résolution pourront être réalisées afin de faciliter la compréhension générale de celle utilisée et/ou de comprendre les différentes caractéristiques du solveur MBDyn.

Pour commencer, quelques généralités sont introduites à la section C.2.2. Ensuite, le traitement des rotations est présenté à la section C.2.3 page suivante. Afin de faciliter la compréhension, un exemple d'illustration est utilisé tout au long de cette section. Il est décrit à la section C.2.4 p. 91. Puis, quelques méthodes de résolution des EDA sont décrites à la section C.2.5 p. 92. L'intégration temporelle du système différentiel est traitée à la section C.2.6 p. 94. L'initialisation des différentes quantités est un point important des méthodes de résolution des EDA. Cette étape est présentée à section C.2.7 p. 97. La méthode de résolution des poutres est brièvement présentée à la section C.2.8 p. 102. La gestion des systèmes linéaires est, quant à elle, décrite à la section C.2.9 p. 104. Enfin, avant que la conclusion ne soit formulée à la section C.2.11 p. 105, les résultats de l'exemple traité sont présentés à la section C.2.10 p. 105.

### C.2.2 Généralités

Avant de décrire certains points particuliers en détail, il est nécessaire d'introduire quelques idées générales sur les caractéristiques numériques de MBDyn afin d'éviter quelques confusions.

Le solveur MBDyn est dédié à la résolution de problèmes multi-physiques pouvant faire intervenir plusieurs corps en interactions. De manière générale, le système d'équations à résoudre est un système différentiel-algébrique (cf. section C.1.4 p. 79) qui ne peut pas être résolu par les méthodes classiques de résolution des équations différentielles ordinaires.

Les différentes inconnues sont exprimées et évaluées dans le repère galiléen de référence<sup>5</sup> afin d'éviter quelques complications supplémentaires lorsque des corps flexibles sont utilisés [Bottasso *et al.*, 2010] et faciliter l'assemblage des différentes équations du système. L'ensemble des équations représentatives des composants élémentaires (corps rigides, corps flexibles, liaisons, etc.) sont simplement assemblées par une méthode proche de celles utilisées en éléments finis [Bottasso *et al.*, 2010].

---

5. Cependant, certaines quantités peuvent être exprimées dans des repères locaux à la demande de l'utilisateur afin de faciliter le post-traitement ou la création de conditions, scénarios etc.

Le système d'équations obtenu est intégré temporellement par un schéma de type implicite prédiction-correction. Les étapes de correction sont réalisées par une méthode de Newton-Raphson modifiée<sup>6</sup>. La matrice Jacobienne du problème, matrice utilisée au sein du processus itératif de Newton-Raphson, est évaluée analytiquement par différentiation des équations du problème et non pas estimée par des méthodes d'approximation numérique (méthode des petites perturbations par exemple). Par conséquent, certains éléments dont la différentiation est inconnue ne participent pas à cette matrice Jacobienne. Ils peuvent donc détériorer les caractéristiques de convergence de l'algorithme de résolution et notamment conduire à la divergence de l'algorithme de résolution. Ainsi, s'il est vrai que MBDyn laisse une grande liberté à l'utilisateur dans la mise en donnée, il n'en faut pas moins essayer d'utiliser au maximum les éléments déjà présents. Par exemple, un ressort peut être modélisé par une liaison de type raideur, auquel cas sa différentiation est prévue dans MBDyn. Elle peut également être modélisée par un effort dont la fonction est fournie par l'utilisateur, auquel cas, la différentiation n'est pas prévue si elle n'est pas correctement écrite<sup>7</sup>.

Plusieurs schémas d'intégration temporelle sont disponibles. Cependant, afin de rester consistant avec le solveur fluide utilisé, seul le schéma multi-pas « Backward-Differentiation-Formula » d'ordre 2 (BDF-2) est utilisé. Il est important de remarquer que ce schéma d'intégration temporelle pose des problèmes de précision lorsque des pas de temps élevés sont utilisés. C'est la raison pour laquelle, un schéma multi-pas différent (schéma appelé « Multi-Step ») est également disponible pour diminuer cette perte de précision tout en amortissant les oscillations numériques à hautes fréquences lorsque de mauvaises conditions de convergence apparaissent (cf. annexe G.2 p. 334). Dans le cas des présents travaux, le pas de temps est faible car il est principalement contraint par la résolution du problème fluide. Le choix du schéma BDF-2 reste donc pertinent.

### C.2.3 Traitement des rotations

Comme il a déjà été énoncé précédemment, la paramétrisation des rotations est un élément important des méthodes de résolution des problèmes multi-corps. MBDyn utilise le paramètre de Gibbs-Rodrigues pour représenter les différentes orientations. Du fait de sa nature vectorielle, ce paramètre peut poser des problèmes de singularité lorsque la valeur absolue des angles de rotation manipulés est proche de  $\pi/2$  (cf. section C.1.3 p. 77). Une méthode dite d'actualisation permet de palier ce problème.

Cette méthode consiste à ne pas paramétrer l'orientation d'un corps rigide par rapport à une orientation fixe arbitraire (orientation initiale ou orientation nulle) mais par rapport à une orientation actualisée au cours de la simulation mais constante lors d'un pas de temps. Ainsi, les angles considérés restent toujours dans l'intervalle de validité du paramètre de rotation dès lors qu'un corps rigide n'effectue pas de rotation dont l'amplitude est proche ou supérieure à  $\pi/2$  au cours d'un unique pas de temps.

Deux différentes approches peuvent être utilisées. La première consiste à travailler dans un repère arbitraire assez proche de l'orientation courante pour éviter l'apparition des singularités. Ce repère peut, par exemple, être l'orientation du corps au pas de temps précédent. Cette méthode fonctionne bien si une évaluation directe de l'orientation du corps est souhaitée. La deuxième méthode consiste plutôt à utiliser les propriétés des méthodes de prédiction-correction. En effet, lorsque ces méthodes sont utilisées, il est plus intelligent d'évaluer uniquement la correction associée. Même si la première méthode n'est pas utilisée au sein de MBDyn, elle est présentée dans un premier temps car elle est utilisée lors du couplage entre ISIS-CFD et MBDyn.

#### C.2.3.1 Paramétrisation en fonction du pas de temps précédent

La première approche d'actualisation présentée à la section précédente consiste à poser l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_{|n+1}^i = \mathbf{R}_r^i |_{n+1} \cdot \mathbf{R}_n \quad (\text{C.2.1})$$

6. La méthode de Newton-Raphson modifiée consiste à ne pas évaluer à chaque itération la matrice Jacobienne du problème mais uniquement à des intervalles plus ou moins réguliers.

7. Un outil de différentiation analytique est utilisé si la syntaxe respecte quelques règles.

où  $\mathbf{R}_n$  est la matrice de rotation évaluée au pas de temps précédent et  $\mathbf{R}_r|_{n+1}^i$  la matrice de rotation paramétrée par  $\mathbf{r}|_{n+1}^i$ . La matrice représentative de la vitesse de rotation angulaire devient donc (cf. annexe G.1.2.4 p. 327) :

$$(\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^i) \times = \dot{\mathbf{R}}|_{n+1}^i \cdot (\mathbf{R}|_{n+1}^i)^t \quad (\text{C.2.2})$$

$$= (\dot{\mathbf{R}}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \dot{\mathbf{R}}_n) \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}_n)^t \quad (\text{C.2.3})$$

$$= \dot{\mathbf{R}}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R}_n^t \cdot \mathbf{R}_r|_{n+1}^i{}^t \quad (\text{C.2.4})$$

$$= \dot{\mathbf{R}}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}_r|_{n+1}^i{}^t \quad (\text{C.2.5})$$

puisque  $\dot{\mathbf{R}}_n$  est nulle par construction. Ainsi, la vitesse angulaire peut être évaluée par la matrice  $\mathbf{G}$  correspondante (cf. équation C.1.11 p. 78) :

$$\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^i = \mathbf{G}_r(\mathbf{r}|_{n+1}^i) \cdot \dot{\mathbf{r}}|_{n+1}^i \quad (\text{C.2.6})$$

Il est important de remarquer que la vitesse angulaire reste exprimée dans le repère global puisque qu'aucun changement de base la concernant n'a été effectué, et ceci, même si la paramétrisation utilisée est une paramétrisation en fonction d'une orientation de référence arbitraire (mais constante).

### C.2.3.2 Paramétrisation en fonction de la prédiction

Au sein de MBDyn, l'orientation de référence est modifiée à chaque pas de temps. Elle est fixée égale à l'orientation obtenue après l'étape de prédiction (cf. section C.2.6 p. 94). Grâce à ce choix, c'est uniquement la correction qui est paramétrée et non pas l'orientation. De plus, l'expression de la matrice Jacobienne utilisée lors du processus de résolution peut être grandement simplifiée [Masarati, 1999] sans que les propriétés de convergence en soient affectées. Cette remarque est illustrée dans les paragraphes suivants. Ainsi, cette approche d'actualisation consiste à poser l'équation suivante :

$$\mathbf{R}|_{n+1}^i = \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.7})$$

où  $\mathbf{R}|_{n+1}^0$  est la matrice de rotation obtenue après prédiction et  $\mathbf{R}_r|_{n+1}^i$  la matrice de rotation paramétrée. La matrice représentative de la vitesse de rotation angulaire devient donc :

$$(\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^i) \times = \dot{\mathbf{R}}|_{n+1}^i \cdot (\mathbf{R}|_{n+1}^i)^t \quad (\text{C.2.8})$$

$$= (\dot{\mathbf{R}}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0 + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \dot{\mathbf{R}}|_{n+1}^0) \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0)^t \quad (\text{C.2.9})$$

$$= \dot{\mathbf{R}}_r|_{n+1}^i \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^i)^t + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \left[ \dot{\mathbf{R}}|_{n+1}^0 \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^0)^t \right] \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^i)^t \quad (\text{C.2.10})$$

$$= (\boldsymbol{\omega}_r|_{n+1}^i) \times + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot (\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0) \times \cdot (\mathbf{R}_r|_{n+1}^i)^t \quad (\text{C.2.11})$$

Il est possible de remarquer que le dernier terme du membre de droite est uniquement un changement de base. Ainsi, l'expression de la vitesse angulaire est :

$$\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^i = \boldsymbol{\omega}_r|_{n+1}^i + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.12})$$

où le dernier terme du membre de droite est la vitesse de rotation obtenue après l'étape de prédiction exprimée dans le repère corrigé. La différentiation de la matrice de rotation et de la vitesse angulaire donne (cf. annexe G.1.2.4 p. 327) :

$$\mathbf{dR}|_{n+1}^i = \mathbf{dR}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0 + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{dR}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.13})$$

$$= \mathbf{dR}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.14})$$

$$= (\mathbf{G}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{dr}|_{n+1}^i) \times \cdot \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{R}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.15})$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^i = \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}_r|_{n+1}^i + \mathbf{dR}_r|_{n+1}^i \cdot \boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0 + \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.16})$$

$$= \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}_r|_{n+1}^i + \mathbf{dR}_r|_{n+1}^i \cdot \boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.17})$$

$$= \mathbf{d}(\mathbf{G}_r|_{n+1}^i \cdot \dot{\mathbf{r}}|_{n+1}^i) + (\mathbf{G}_r|_{n+1}^i \cdot \dot{\mathbf{r}}|_{n+1}^i) \times \cdot \mathbf{R}_r|_{n+1}^i \cdot \boldsymbol{\omega}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.18})$$

puisque par construction :

$$\mathbf{dR}_{|n+1}^0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{d\omega}_{|n+1}^0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.19})$$

Après l'étape de prédiction, le paramètre de rotation  $\mathbf{r}$  ne représente plus qu'une correction. Il est donc ré-initialisé (vecteur nul). Par conséquent, les matrices  $\mathbf{R}_r$  et  $\mathbf{G}_r$  sont donc très proches de la matrice identité (ce qui n'était pas le cas dans la méthode précédente) (cf. équations C.1.10 p. 78 et C.1.11 p. 78). Ainsi, les approximations suivantes peuvent être utilisées pour évaluer la matrice Jacobienne du problème :

$$\mathbf{dR}_{|n+1}^i \approx \mathbf{d\mathbf{r}}_{|n+1}^i \times \mathbf{R}_{|n+1}^0 \quad (\text{C.2.20})$$

$$\mathbf{d\omega}_{|n+1}^i \approx \mathbf{d\dot{\mathbf{r}}}_{|n+1}^i + \mathbf{d\mathbf{r}}_{|n+1}^i \times \mathbf{\omega}_{|n+1}^0 \quad (\text{C.2.21})$$

En conclusion, cette méthode d'actualisation permet de régler le problème des potentiels singularités et facilite l'écriture de la matrice Jacobienne sans dégrader les propriétés de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson modifié.

## C.2.4 Exemple d'illustration

Afin de faciliter la compréhension des méthodes de résolution numériques utilisées, il est intéressant de s'appuyer sur un exemple simple. Ainsi, il est proposé de s'appuyer sur un problème mono-dimensionnel composé de deux masses ponctuelles [Boschi *et al.*, 2007]. La première masse est soumise à une liaison de type ressort-amortisseur. La seconde masse est liée à la première par une simple contrainte de distance et subit un effort supplémentaire quelconque  $f$ .

Le système est composé de trois nœuds. Deux sont dynamiques et le dernier est dit statique. Lorsqu'un nœud est statique, il n'instancie pas de quantités de mouvement. Par conséquent, seules les équations d'équilibres sont instanciées (principe fondamental de la statique).

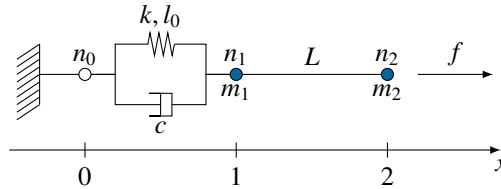


Figure C.2.1 : Exemple monodimensionnel

Les degrés de liberté cinématiques, les quantités de mouvement et les degrés de liberté généralisés sont donc :

$$\mathbf{q} = [x_0, x_1, x_2]^t \quad \mathbf{p} = [p_1, p_2]^t \quad \mathbf{y} = [x_0, x_1, p_1, x_2, p_2, \lambda_0, \lambda_1]^t \quad (\text{C.2.22})$$

Les deux équations de contrainte sont données par :

$$\phi_0(\mathbf{q}) = x_0 = 0 \quad (\text{C.2.23})$$

$$\phi_1(\mathbf{q}) = x_2 - x_1 - L = 0 \quad (\text{C.2.24})$$

La dérivation par  $\mathbf{q}$  de  $\boldsymbol{\phi} = [\phi_0, \phi_1]^t$  fournit les efforts de réaction correspondants :

$$\boldsymbol{\phi}'_{/q} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ -\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^* \quad (\text{C.2.25})$$



Les équations à résoudre sont donc :

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= k(x_1 - x_0 - l_0) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) && \text{équilibre du nœud 0} \\
 m_1 \cdot \dot{x}_1 &= p_1 && \text{quantité de mouvement du nœud 1} \\
 \dot{p}_1 - \lambda_1 &= -k(x_1 - x_0 - l_0) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) && \text{équilibre du nœud 2} \\
 m_2 \cdot \dot{x}_2 &= p_2 && \text{quantité de mouvement du nœud 2} \\
 \dot{p}_2 + \lambda_1 &= f && \text{équilibre du nœud 1} \\
 x_0 &= 0 && \text{contrainte 1} \\
 x_2 - x_1 - L &= 0 && \text{contrainte 2}
 \end{aligned} \tag{C.2.26}$$

Ces différentes équations peuvent également être présentées sous la forme implicite  $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{0}$ , où ici  $\mathbf{F}$  est une fonction affine :

$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cdot l_0 \\ 0 \\ k \cdot l_0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \tag{C.2.27}$$

Dans un souci de concision, les notations suivantes sont utilisées par la suite :

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{F}_{/\dot{\mathbf{y}}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{F}_{/y} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \tag{C.2.28}$$

La présentation des équations sous cette forme illustre parfaitement l'impossibilité de résoudre les équations différentielles algébriques par les méthodes de résolution classiques des équations différentielles ordinaires. En effet la dérivée de  $\mathbf{F}$  par rapport à  $\dot{\mathbf{y}}$ , c.-à-d. la matrice  $\mathbf{F}_{/\dot{\mathbf{y}}}$ , est bien singulière. Il existe également une seconde forme couramment utilisée du système précédent. Elle consiste à poser une variable intermédiaire  $\nu$ , telle que  $\dot{\nu} = \lambda$ . Cette seconde forme est utilisée pour des raisons numériques (cf. section C.2.6 p. 94) mais également lorsque des méthodes de réduction d'index sont utilisées (cf. section C.2.5). Le système d'équations est ainsi posé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{\nu}_0 \\ \dot{\nu}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \\ \nu_0 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cdot l_0 \\ 0 \\ k \cdot l_0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \tag{C.2.29}$$

### C.2.5 Algorithmes de résolution des EDA

Tous d'abord, il est important de remarquer que les systèmes d'équations différentielles algébriques peuvent être particulièrement difficiles à résoudre lorsque leur index est élevé<sup>8</sup> [Steinbrecher, 2006]. En première approche, l'index du système d'EDA à résoudre est le nombre de fois qu'il est nécessaire de dériver par rapport au temps une partie ou la totalité des équations pour éliminer la nature algébrique du problème, c.-à-d. pour le transformer en un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas des corps rigides, seules les équations représentatives des contraintes doivent être dérivées. L'index des systèmes obtenus est généralement égal à 3 [Masarati, 1999].

Une autre particularité des systèmes d'équations différentielles algébriques résultant des problèmes multi-corps sous contraintes est leur « raideur numérique » particulièrement élevée [Masarati, 1999]. Cette raideur est une notion mathématique difficile à définir de façon rigoureuse sans entrer dans les détails. Néanmoins, dans un premier temps, il est possible de définir un système différentiel (ordinaire ou algébrique) comme étant raide s'il existe deux échelles de temps différentes. Ainsi, du fait de la nature purement algébrique des contraintes, une légère perturbation des quantités cinématiques contraintes peut entraîner une réponse brutale et importante des

8. L'index est considéré élevé s'il est strictement supérieur à 1 [Bauchau, 2011].

réactions de liaison. C'est la raison pour laquelle, seuls des schémas capables de filtrer les hautes fréquences numériques, c.-à-d. ceux qui sont dits L-stable (cf. annexe G.2 p. 334), sont à même de résoudre ce type de problèmes. Les schémas de type « Backward-Differentiation-Formula » possèdent notamment ces caractéristiques et, c'est la raison pour laquelle ils sont couramment utilisés pour la résolution des problèmes raides. Pour la suite de la présentation, il est également important de remarquer que la résolution des problèmes raides par des schémas d'intégration implicites pose problème pour les faibles pas de temps alors que les schémas d'intégration explicites nécessitent d'utiliser des pas de temps faibles. Ce point contre intuitif est brièvement illustré sur l'exemple proposé (cf. section C.2.6 page suivante).

Il existe de nombreuses méthodes de résolution des systèmes d'équations différentiels algébriques d'index élevé [Bauchau, 2011]. Le premier groupe de méthodes s'inspire de l'approche « Reduced Coordinate Set ». En effet, ce problème ne se pose pas avec cette approche car les inconnues cinématiques sont choisies de telle sorte que les différentes contraintes cinématiques sont automatiquement respectées. Par conséquent, la partie algébrique du système d'équations est inexistante. Ces méthodes consistent donc à projeter l'ensemble des inconnues cinématiques dans un nouvel espace cinématique respectant automatiquement l'ensemble des contraintes. Les principales difficultés résident dans l'évaluation du nouvel espace cinématique de manière automatique et robuste mais également dans l'obligation de l'évaluer à chaque pas de temps [Bauchau, 2011]. Ces techniques de résolution sont appelées méthodes de « Maggi » [Bottasso *et al.*, 2010].

Un second ensemble plus populaire est composé des méthodes dites de réduction d'index [Bauchau et Laulusa, 2008]. Effectivement, des expériences montrent que plus l'index du système différentiel algébrique est élevé, plus la résolution numérique est difficile. Les méthodes de réduction d'index consistent donc à dériver par rapport au temps les équations représentatives des contraintes. Par exemple, pour une contrainte holonome, au lieu de résoudre  $\phi = 0$ , il est théoriquement possible de résoudre  $\dot{\phi} = 0$ . Ici, l'index est réduit d'un niveau. Il est ainsi possible de réduire l'index autant que possible et ceci jusqu'à obtenir un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas de l'exemple proposé, si cette méthode est appliquée, il suffit de résoudre les dérivées temporelles des équations de contrainte en lieu et place de ces mêmes équations. Soient les équations suivantes :

$$\dot{x}_0 = 0 \qquad \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 \qquad (C.2.30)$$

Ainsi, après avoir réalisé le changement de variable  $\dot{v} = \lambda$ , le système d'équations à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cdot l_0 \\ 0 \\ k \cdot l_0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \qquad (C.2.31)$$

La matrice  $F_{/y}$  (première matrice du membre de gauche) n'est plus singulière par construction. Par conséquent, ce système peut s'écrire sous une forme explicite (cf. équation C.2.32) et être résolu par des méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires.

$$\dot{y} = F_{/y}^{-1} \cdot (F_{/y} \cdot y + c) \qquad (C.2.32)$$

Dans le cas de cet exemple mono-dimensionnel linéaire, une seule dérivation permet d'aboutir à un système d'équations différentielles ordinaires. Dans un cas général, plusieurs dérivations sont nécessaires pour atteindre ce résultat. Les méthodes de réduction d'index n'aboutissent pas obligatoirement à un système différentiel ordinaire. Des réductions partielles peuvent également être envisagées afin de simplement faciliter la résolution numérique [Bauchau, 2011]. Cette approche possède deux inconvénients majeurs. La complexification du problème du fait de la dérivation des équations de contrainte en est le premier. Le phénomène de dérive en est le second. Ce phénomène résulte des approximations numériques et des erreurs d'arrondis. En effet, résoudre numériquement  $\dot{\phi} = 0$  ne permet pas d'affirmer que l'équation de la contrainte est totalement vérifiée à cause de l'accumulation de différentes erreurs d'origine numérique. Des techniques de stabilisation et/ou de correction sont donc nécessaires. Les techniques de stabilisation, qui tentent à diminuer le phénomène de dérive, restent, à l'heure actuelle, dépendantes du problème traité. Effectivement, elles introduisent des coefficients de raideur et d'amortissement arbitraires [Bottasso *et al.*, 2010]. Une des méthodes les plus utilisées est celle de Baumgarte [Baumgarte, 1972]. Quant aux techniques de correction, elles consistent à améliorer la solution obtenue après

coups par une projection de la solution sur l'espace admissible. De nombreuses méthodes de projection existent mais, dans la majorité des cas, elles présentent des problèmes d'intégration numérique lorsque des systèmes raides sont considérés [Bauchau, 2011]. De plus, elles deviennent difficiles à résoudre lorsque des systèmes de grande dimension sont considérés.

Le dernier ensemble des méthodes de résolution des équations différentielles algébriques présenté ici est constitué des méthodes de résolution directe. A priori, il est difficile de résoudre directement ce type de système, et ceci, même quand des schémas d'intégration temporelle adéquats (schéma implicite avec amortissement des hautes fréquences numériques) sont utilisés. Par exemple, une contrainte de coïncidence entre deux nœuds peut être vue comme une raideur de valeur infinie. Ce n'est que récemment que des méthodes de résolution directe des problèmes multi-corps sont devenues efficaces [Bottasso *et al.*, 2010]. Le caractère récent de ces méthodes est d'autant plus surprenant que l'idée générale est, à première vue, très simple. En effet, cette dernière consiste simplement à adimensionnaliser les différentes variables pour améliorer le conditionnement des matrices<sup>9</sup>. L'adimensionnalisation du temps par le pas de temps courant semble l'élément principal de ces méthodes mais il est également conseillé d'adimensionnaliser les différentes inconnues cinématiques du système [Bauchau, 2011]. Au sein du solveur MBDyn, seules certaines équations de contrainte sont divisées par un coefficient lié au pas de temps pour améliorer le conditionnement [Masarati, 2013]. Ce coefficient est noté  $h^*$  par la suite. Cependant, l'amélioration partielle du conditionnement (cf. section C.2.6) et l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle développé spécifiquement<sup>10</sup> semblent convenir pour la majorité des applications cibles de MBDyn [Masarati, 1999]. Dans le cas de l'exemple proposé, le problème traité par MBDyn est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{v}_0 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h^*} & 0 & \frac{1}{h^*} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cdot l_0 \\ 0 \\ k \cdot l_0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ L/h^* \end{bmatrix} \quad (C.2.33)$$

Les avantages des méthodes de résolution directe sont : la simplicité de mise en œuvre (pas de différentiation supplémentaire) et le respect automatique des contraintes à la précision machine (cf. équation C.1.19 p. 79). Le problème résolu après transformation est donc de la forme :

$$\begin{cases} M(q) \cdot \dot{q} = p \\ \dot{p} + \phi_{/q}^t \cdot \dot{v} + \psi_{/q}^t \cdot \dot{\xi} = \zeta^*(q, \dot{q}, p, t, \dots) - K \cdot (q - q_k) - C \cdot \dot{q} \\ \phi(q, t)/h^* = 0 \\ \psi(q, \dot{q}, t)/h^* = 0 \end{cases} \quad (C.2.34)$$

où :

$$\dot{v} = \lambda \quad \text{et} \quad \dot{\xi} = \mu \quad (C.2.35)$$

Ce système peut également s'écrire sous la forme succincte suivante :

$$F(y, \dot{y}, t) = 0 \quad \text{où} \quad y = [q, p, v, \xi]^t \quad (C.2.36)$$

## C.2.6 Intégration temporelle

Comme il a déjà été énoncé dans les sections précédentes, l'intégration temporelle du système d'équations différentielles (cf. équation C.1.21 p. 79) est réalisée par une méthode de prédiction correction et un schéma d'intégration à deux pas BDF-2 (cf. annexe G.2 p. 334). Le schéma d'intégration temporelle BDF-2 donne :

$$y|_{n+1} = -\frac{1}{3}y|_{n-1} + \frac{4}{3}y|_n + \frac{2}{3} \cdot h \cdot \dot{y}|_{n+1} \quad (C.2.37)$$

9. Le conditionnement d'une matrice caractérise le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de cette matrice. Plus le conditionnement est élevé, plus la résolution numérique du système d'équations correspondant est sujette à des erreurs numériques.

10. Ce schéma d'intégration est nommé « Multi-Step » au sein de l'équipe de développement de MBDyn. Ce schéma permet de dissiper les hautes fréquences numériques tout en limitant la perte de précision du schéma BDF-2 lorsque des grands pas de temps sont utilisés.

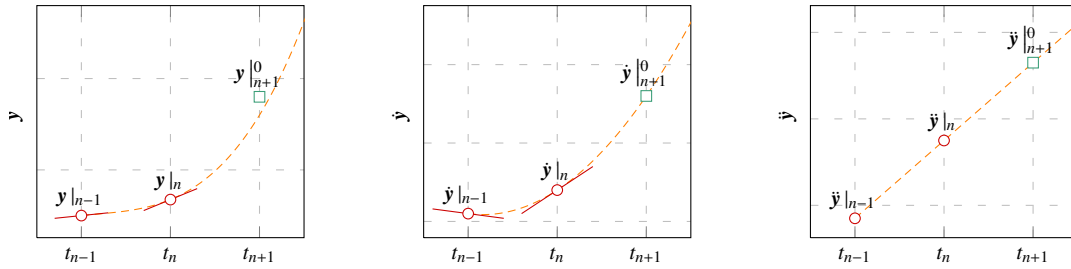
À la première itération, une prédiction de  $\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}$  est réalisée par le biais du polynôme d'Hermite qui est déterminé par les valeurs des quantités et de leurs dérivées aux instants  $n$  et  $n - 1$ . Soit l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^0 = \frac{12}{h}\mathbf{y}|_{n-1} - \frac{12}{h}\mathbf{y}|_n + 5 \cdot \dot{\mathbf{y}}|_{n-1} + 8 \frac{12}{h}\dot{\mathbf{y}}|_n \quad (\text{C.2.38})$$

L'initialisation de  $\mathbf{y}$  est, quant à elle, fournie par l'équation (C.2.37), soit l'équation suivante :

$$\mathbf{y}|_{n+1}^0 = -\frac{1}{3}\mathbf{y}|_{n-1} + \frac{4}{3}\mathbf{y}|_n + \frac{2}{3} \cdot h \cdot \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^0 \quad (\text{C.2.39})$$

En termes de quantité physique, cette prédiction correspond à une interpolation linéaire de l'accélération pour prédire la vitesse (cf. figure C.2.2). Par contre, du fait de l'équation (C.2.37), la position ne respecte pas le polynôme d'Hermite lors de l'initialisation.



**Figure C.2.2 :** Polynôme d'Hermite et prédiction : - - - polynôme d'Hermite,  $\circ$  points connus, — dérivées connues et  $\square$  prédiction

La correction est évaluée par une méthode de type Newton-Raphson modifiée. Soient les équations :

$$\mathbf{y}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{y}|_{n+1}^i + \Delta \mathbf{y}|_{n+1}^{i+1} \quad (\text{C.2.40})$$

$$\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^i + \Delta \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^{i+1} \quad (\text{C.2.41})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}/\mathbf{y}|_{n+1}^j & \mathbf{F}/\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}|_{n+1}^{i+1} \\ \Delta \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}|_{n+1}^i, \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^i, t_{n+1}) \quad (\text{C.2.42})$$

où  $j$  est la dernière itération où la matrice Jacobienne a été évaluée et  $j \leq i$ . En réalité, il est possible de ne pas recalculer cette matrice à chaque pas de temps. Cependant, afin de simplifier la présentation, il est supposé qu'elle est évaluée au minimum à chaque première itération d'un pas de temps (paramètre par défaut de MBDyn). Du fait des caractéristiques du schéma BDF-2, il est possible d'exprimer la correction de  $\mathbf{y}$  en fonction de celle de  $\dot{\mathbf{y}}$  (cf. équation C.2.37 page précédente) :

$$\Delta \mathbf{y} = \frac{2}{3} \cdot h \cdot \Delta \dot{\mathbf{y}} = h^* \cdot \Delta \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2.43})$$

Le coefficient utilisé au sein de MBDyn afin d'améliorer le conditionnement des matrices, c.-à-d. le coefficient  $h^*$  (cf. section C.2.5 p. 92), vaut  $2/3h$  dans le cas d'un schéma BDF-2. Avec les équations (C.2.42) et (C.2.43), le système à résoudre devient algébrique en correction de  $\dot{\mathbf{y}}$  :

$$\left( \mathbf{F}/\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^j + h^* \cdot \mathbf{F}/\mathbf{y}|_{n+1}^j \right) \cdot \Delta \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^{i+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}|_{n+1}^i, \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^i, t_{n+1}) \quad (\text{C.2.44})$$

L'unique matrice à inverser est donc relative au processus de Newton-Raphson et est notée  $\mathbf{F}^*$ . Elle est définie par :

$$\mathbf{F}^*|_{n+1}^j = \mathbf{F}/\dot{\mathbf{y}}|_{n+1}^j + h^* \cdot \mathbf{F}/\mathbf{y}|_{n+1}^j \quad (\text{C.2.45})$$

Son expression détaillée après le changement de variable et la division des contraintes algébriques par  $h^*$  (cf. équation C.2.34 p. 94) est la suivante :

$$\begin{aligned}
 F^* &= \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ C & I_d & \phi'_{/q} & \psi'_{/\dot{q}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{/\dot{q}}/h^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + h^* \cdot \begin{bmatrix} 0 & -I_d & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{/q}/h^* & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{/q}/h^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} M & -h^* \cdot I_d & 0 & 0 \\ C + h^* \cdot K & I_d & \phi'_{/q} & \psi'_{/\dot{q}} \\ \phi_{/q} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{/\dot{q}}/h^* + \psi_{/q} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.2.46)
 \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que les dérivées d'ordre 2 et les dérivées croisées des équations de contraintes, c.-à-d. les termes  $\phi'_{/q,q}$ ,  $\psi'_{/\dot{q},q}$  et  $\psi'_{/\dot{q},\dot{q}}$ , ne sont pas présentes afin de ne pas alourdir l'évaluation de la matrice Jacobienne. Cette matrice sert uniquement à évaluer les incréments de correction. En théorie, ces différentes dérivées sont nécessaires au premier pas de temps simulé. Cependant, elles peuvent être particulièrement complexes dans le cas de certaines contraintes. C'est la raison pour laquelle une autre méthode d'initialisation est préférée (cf. section C.2.7 page suivante). En conclusion, l'algorithme de résolution d'un pas de temps est résumé par l'algorithme (C.2.1).

Données : $n, h, j, y _{n-1}, y _n, \dot{y} _{n-1}, \dot{y} _n$	
1 $i \leftarrow 0$	Initialisation de $i$
2 $\dot{y} _{n+1}^0 = \frac{12}{h}y _{n-1} - \frac{12}{h}y _n + 5 \cdot \dot{y} _{n-1} + 8 \frac{12}{h}y _n$	Prédiction de $\dot{y}$
3 $y _{n+1}^0 = -\frac{1}{3}y _{n-1} + \frac{4}{3}y _n + \frac{2}{3} \cdot h \cdot \dot{y} _{n+1}^0$	Prédiction de $y$
4 $res = \ F(y _{n+1}^i, \dot{y} _{n+1}^i, t_{n+1})\ $	Initialisation du résidu
5 tant que $res > critère$ faire	Processus de Newton-Raphson
6     si Actualisation du Jacobien demandée alors	
7 $F^* _{n+1}^i = F_{/y} _{n+1}^i + h^* \cdot F_{/y} _{n+1}^i$	Évaluation de $F^*$
8 $j \leftarrow i$	Actualisation de $j$
9     fin	
10 $\Delta \dot{y} _{n+1}^{i+1} = -\left(F^* _{n+1}^j\right)^{-1} \cdot F(y _{n+1}^i, \dot{y} _{n+1}^i, t_{n+1})$	Résolution du système linéaire
11 $\dot{y} _{n+1}^{i+1} = \dot{y} _{n+1}^i + \Delta \dot{y} _{n+1}^{i+1}$	Actualisation de $\dot{y}$
12 $y _{n+1}^{i+1} = y _{n+1}^i + h^* \Delta \dot{y} _{n+1}^{i+1}$	Actualisation de $y$
13 $res = \ F(y _{n+1}^{i+1}, \dot{y} _{n+1}^{i+1}, t_{n+1})\ $	Actualisation du résidu
14 $i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de correction
15 fin	

**Algorithme C.2.1** : Intégration temporelle du problème structure – Résolution d'un pas de temps courant

Afin d'illustrer certains propos énoncés précédemment, il est proposé de calculer le conditionnement de la matrice  $F^*$  sur l'exemple d'illustration. Les différentes approches présentées et des variations des différents paramètres physiques et numériques sont considérées. La première approche représente la résolution directe du système d'équation (cf. équation C.2.27 p. 92). La deuxième est différente de la première par le changement de variable  $\dot{y} = \lambda$  (cf. équation C.2.29 p. 92). La troisième approche utilise également ce changement de variable mais les relations de contraintes sont également divisées par  $h^*$  (cf. équation C.2.33 p. 94). Dans le cas de

l'exemple d'illustration, la matrice  $F^*$  est donnée par :

$$F_3^* = \begin{bmatrix} h^* \cdot k + c & -(h^* \cdot k + c) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & -h^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h^* \cdot k + c) & h^* \cdot k + c & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & -h^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.2.47)$$

Les résultats sont présentés au tableau C.2.1. Ce dernier illustre simplement l'utilité d'utiliser le changement de variable  $\dot{v} = \lambda$  et la division des équations de contraintes par le coefficient  $h^*$ . En effet, le conditionnement de  $F_3^*$  reste faible quels que soient les paramètres utilisés. En particulier, l'influence du pas de temps sur le conditionnement de la matrice est nettement moins important que pour les premières et secondes approches. Il est également possible de remarquer que le conditionnement a tendance à augmenter avec une diminution du pas de temps. C'est la raison pour laquelle les schémas d'intégration implicites posent problème aux faibles pas de temps.

cas	$m_1$	$m_2$	$k$	$c$	$\Delta t$	$\text{cond}(F_1^*)$	$\text{cond}(F_2^*)$	$\text{cond}(F_3^*)$
1	1	1	10	2	0.100	101	33	11
2	<b>4</b>	1	10	2	0.100	131	44	14
3	1	<b>4</b>	10	2	0.100	131	43	13
4	1	1	<b>20</b>	2	0.100	115	37	13
5	1	1	<b>100</b>	2	0.100	213	64	20
6	1	1	10	<b>4</b>	0.100	140	45	15
7	1	1	10	<b>20</b>	0.100	405	115	33
8	1	1	10	2	<b>0.050</b>	260	62	15
9	1	1	10	2	<b>0.010</b>	2689	292	32
10	1	1	10	2	<b>0.001</b>	83589	2881	99
11	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>0.001</b>	240879	8208	219

**Tableau C.2.1 :** Système masse-ressort à deux masses contraintes – Conditionnements pour différents paramètres physiques et numériques

## C.2.7 Initialisation

### C.2.7.1 Introduction

L'initialisation d'un système d'équations différentielles algébriques est plus complexe qu'une initialisation d'un système d'équations différentielles ordinaires car les quantités manipulées ne sont pas indépendantes du fait de la présence des contraintes algébriques. La totalité des inconnues, qu'elles soient différentielles ou algébriques, doivent respecter l'ensemble des contraintes afin d'éviter un mauvais départ de la solution.

Pour un système d'équations différentielles ordinaires représentatif d'un système mécanique classique, les quantités nécessaires à l'initialisation de la simulation sont : les positions, les orientations, les vitesses linéaires et les vitesses angulaires des différents corps. Les quantités de mouvement linéaire et angulaire peuvent être déterminées à partir de ces informations. Par conséquent, elles sont donc également déterminées.

Pour qu'un système différentiel algébrique soit correctement initialisé, il est nécessaire que les contraintes non-holonomes et holonomes soient respectées mais pas seulement : les dérivées temporelles des équations des contraintes holonomes aux ordres supérieurs à l'index du système moins un doivent également être respectées. Par conséquent, pour un système différentiel algébrique d'index égal à trois, la compatibilité avec la première et la deuxième dérivée temporelle des équations des contraintes holonomes doit également être assurée. Les dérivées temporelles des équations de contrainte peuvent être complexes à implémenter. De plus, elles ne servent que lors de cette phase d'initialisation et leur sens physique n'est toujours pas totalement compris. Une autre méthode de vérification est donc proposée dans MBDyn (cf. section C.2.7.2 page suivante). Cette méthode de vérification permet également de corriger la mise en donnée si l'utilisateur le souhaite.

Une fois cette première étape de vérification réalisée, la totalité des quantités différentielles est donc déterminée à l'exception des dérivées temporelles des quantités de mouvement (c.-à-d. les accélérations). De nouveau, ces quantités doivent être déterminées à l'état initial mais il existe une infinité de solution puisque les quantités algébriques représentatives des actions de réaction sont toujours inconnues également. Effectivement, un corps contraint peut prendre initialement une accélération quelconque du moment que les actions de réaction auxquelles il est soumis contrebalancent cette accélération. Les équations permettant de lever cette indétermination sont les deuxièmes dérivées temporelles des fonctions de contrainte. Toujours pour la même raison que précédemment, une autre méthode d'initialisation de ces quantités est utilisée dans MBDyn (cf. section C.2.7.3 p. 100).

La section C.2.7.2 présente la vérification (ou la correction) de la compatibilité entre les quantités cinématiques initiales et les contraintes algébriques. La section C.2.7.3 p. 100 explicite le principe d'initialisation des quantités non-déterminées par l'utilisateur, c.-à-d. les dérivées temporelles des quantités de mouvement et les actions de réaction. La section C.2.7.4 p. 101 est consacrée au problème du non respect à l'état initial des deuxièmes dérivées temporelles des équations de contrainte. Finalement, la section C.2.7.5 p. 102 introduit le schéma d'intégration temporelle utilisé lors du premier pas de temps.

### C.2.7.2 Vérification initiale

La première étape consiste à vérifier que les inconnues cinématiques initialement fournies par l'utilisateur vérifient bien les différentes contraintes. Plus précisément, il est nécessaire de vérifier que les positions et orientations respectent les contraintes holonomes et que les vitesses linéaires et angulaires respectent la dérivée temporelle de ces mêmes équations et les contraintes non-holonomes. L'idée principale est de créer un nouveau système différentiel algébrique incluant la totalité des contraintes à respecter et des raideurs fictives (ces raideurs ne servent que lors de cette étape d'initialisation). Une fois le système résolu, il est possible de vérifier que la solution obtenue est égale aux données initiales. Il est également possible d'utiliser cette solution comme point de départ de la simulation. Le système différentiel à résoudre est de la forme suivante :

$$K_0 \cdot (q - q_0) + \phi_{/q}^t(q, t_0) \cdot \chi_\phi = 0 \quad (C.2.48)$$

$$C_0 \cdot (\dot{q} - \dot{q}_0) + \phi_{/q}^t(q, t_0) \cdot \chi_\psi + \psi_{/\dot{q}}^t(q, \dot{q}, t_0) \cdot \sigma = 0 \quad (C.2.49)$$

$$\phi(q, t_0) = 0 \quad (C.2.50)$$

$$\psi(q, \dot{q}, t_0) = 0 \quad (C.2.51)$$

$$\phi_{/q}(q, t_0) \cdot \dot{q} + \phi_{/t}(q, t_0) = 0 \quad (C.2.52)$$

où  $K_0$  et  $C_0$  sont des matrices de raideur fictives,  $q_0$  et  $\dot{q}_0$  les quantités cinématiques proposées initialement par l'utilisateur,  $q$  et  $\dot{q}$  ces mêmes quantités après les corrections éventuelles et  $\chi_\phi$ ,  $\chi_\psi$  ainsi que  $\sigma$  sont les multiplicateurs de Lagrange représentatifs des efforts fictifs de réaction. Les matrices de raideur fictives peuvent simplement être égales à l'identité dans le cas d'une simple vérification ou posséder des éléments diagonaux non uniformes pour aider à la mise en donnée. Ce dernier point est explicité ultérieurement en s'appuyant sur l'exemple d'illustration.

Au sein de MBDyn, la résolution du système différentiel algébrique précédent est réalisée de façon itérative car le rôle de l'équation (C.2.52) n'est pas clairement définie pour certaines liaisons<sup>11</sup>. Par conséquent, certaines liaisons ne sont pas prises en compte. Le principe général de résolution consiste donc à résoudre séquentiellement le problème des contraintes holonomes (cf. équations C.2.53 et C.2.54) puis le problème des contraintes non-holonomes à  $q$  fixé (cf. équations C.2.55 et C.2.56). Finalement, la dernière équation (cf. équation C.2.52) sert à vérifier le résultat obtenu et à le corriger si nécessaire.

$$K_0 \cdot (q - q_0) + \phi_{/q}^t(q, t_0) \cdot \chi_\phi = 0 \quad (C.2.53)$$

$$\phi(q, t_0) = 0 \quad (C.2.54)$$

$$C_0 \cdot (\dot{q} - \dot{q}_0) + \psi_{/\dot{q}}^t(q, \dot{q}, t_0) \cdot \sigma = 0 \quad (C.2.55)$$

$$\psi(q, \dot{q}, t_0) = 0 \quad (C.2.56)$$

11. C'est toujours une méthode expérimentale à l'heure actuelle

Les deux sous-systèmes sont résolus par une méthode de Newton-Raphson. L'initialisation est donnée par  $\mathbf{q}|^0 = \mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}|^0 = \dot{\mathbf{q}}_0$  et  $\chi_\phi|^0 = \sigma|^0 = \mathbf{0}$ . Par exemple, le principe de résolution du problème des contraintes holonomes est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}|^{i+1} \\ \chi_\phi|^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}|^i \\ \chi_\phi|^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}|^{i+1} \\ \Delta \chi_\phi|^{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.57})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \phi'_{/q}(\mathbf{q}, t_0) \\ \phi_{/q}(\mathbf{q}, t_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \chi_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \phi'_{/q}(\mathbf{q}, t_0) \cdot \chi_\phi \\ -\phi(\mathbf{q}, t_0) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.58})$$

Le principe de résolution du problème des contraintes non-holonomes est identique. De nouveau, les dérivées d'ordre égal à deux des équations de contrainte ne sont pas utilisées pour l'évaluation de la matrice Jacobienne. La dernière étape consiste à vérifier que la dernière équation du problème posé est bien respectée, c.-à-d. que :

$$\phi_{/q}(\mathbf{q}, t_0) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \phi_{/t}(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.59})$$

Si cette dernière équation est vérifiée, alors le système est correctement initialisé. Dans le cas contraire, si l'utilisateur souhaite que les données d'entrées soient corrigées avant de débiter la résolution, il est nécessaire de rechercher une solution compatible. Pour cela, la quantité  $\dot{\mathbf{q}}$  est corrigée (cf. équation C.2.60) par projection dans l'espace où les contraintes sont vérifiées (la quantité corrigée est notée  $\dot{\mathbf{q}}_c$ ) et les différentes étapes sont itérées jusqu'à ce que l'équation (C.2.59) soit vérifiée.

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \dot{\mathbf{q}} - \phi_{/q}^{-1} \cdot (\phi_{/q}(\mathbf{q}, t_0) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \phi_{/t}(\mathbf{q}, t_0)) \quad (\text{C.2.60})$$

Les raideurs fictives peuvent aider à la mise en donnée du problème. Il est donc intéressant de les inclure dans l'étape de correction/projection. Ainsi, au lieu de l'équation précédente, il est intéressant d'utiliser l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{C}_0 \cdot \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{I}_d - \mathbf{C}_0) \cdot [\dot{\mathbf{q}} - \phi_{/q}^{-1} \cdot (\phi_{/q}(\mathbf{q}, t_0) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \phi_{/t}(\mathbf{q}, t_0))] \quad (\text{C.2.61})$$

Le nombre de lignes de la matrice  $\phi_{/q}$  étant égal au nombre de contraintes et non pas au nombre de degrés de liberté, l'inverse de cette matrice est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose. Dans le cas de l'exemple proposé, il n'y a pas de contrainte non-holonyme. Il suffit donc de résoudre le problème des contraintes holonomes et vérifier que la solution obtenue est bien compatible avec l'équation (C.2.59). Dans le cas contraire, les itérations de correction sont réalisées. Le problème des contraintes holonomes est de la forme :

$$\begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0| \\ \Delta x_1| \\ \Delta x_2| \\ \Delta \chi_{\phi 0}| \\ \Delta \chi_{\phi 1}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0(x_0| - x_0) - \chi_{\phi 0} \\ -k_1(x_1| - x_1) + \chi_{\phi 1} \\ -k_2(x_2| - x_2) - \chi_{\phi 1} \\ -x_0| \\ -(x_2| - x_1| - L) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.62})$$

Tous les degrés de liberté étant contraints par des contraintes scléronomes, le terme  $\phi_{/t}$  de l'équation de vérification est nul. L'équation de vérification et l'étape de projection/correction sont données par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.63})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_c &= \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \cdot (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \\ 0.5 \cdot (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.2.64})$$



Les solutions de ce système sont présentées au tableau C.2.2 pour différentes valeurs d'initialisation et différentes matrices de raideurs fictives. La première ligne correspond au cas de référence. Ce cas de référence est choisi de telle sorte que les données initiales soient cohérentes avec l'ensemble des contraintes holonomes. Les autres cas ne sont, quant à eux, pas correctement initialisés.

L'analyse de ces résultats permet d'illustrer certains points. En premier lieu, comme la contrainte exercée sur le nœud  $n_0$  est indépendante des autres quantités cinématiques, la solution trouvée est toujours cohérente avec cette contrainte si le coefficient de raideur correspondant n'est pas nul (lignes 2 et 7). En deuxième lieu, si une contrainte s'exerce sur deux nœuds différents, le résultat de l'étape de vérification est un compromis entre les données initiales de chaque nœud si les raideurs correspondantes sont égales (lignes 3 à 5). Par contre, un choix judicieux des raideurs fictives peut permettre de faciliter la mise en donnée. Par exemple, si l'utilisateur souhaite que le nœud  $n_2$  s'adapte automatiquement aux données initiales du nœud  $n_1$ , il suffit d'utiliser une raideur fictive respectivement nulle et non-nulle (ligne 6).

ligne	données initiales									solutions					
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dot{x}_0$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$k_0$	$k_1$	$k_2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dot{x}_0$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$
1	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	0.5
2	<b>0.2</b>	1.0	2.0	<b>0.3</b>	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	0.5
3	0.0	1.0	<b>2.2</b>	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	0.0	<b>1.1</b>	<b>2.1</b>	0.0	0.5	0.5
4	0.0	<b>1.2</b>	2.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	0.0	<b>1.1</b>	<b>2.1</b>	0.0	0.5	0.5
5	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	<b>0.7</b>	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0	0.0	<b>0.6</b>	<b>0.6</b>
6	0.0	1.0	<b>2.2</b>	0.0	0.5	<b>0.7</b>	1.0	1.0	<b>0.0</b>	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	0.5
7	<b>0.2</b>	1.0	2.0	<b>0.3</b>	0.5	0.5	<b>0.5</b>	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0	0.0	0.5	0.5

Tableau C.2.2 : Exemple monodimensionnel – Vérification initiale

En théorie, l'étape de vérification sert uniquement à valider la cohérence du modèle initial. Par défaut, le solveur s'arrête si la solution trouvée diffère des conditions initiales spécifiées par l'utilisateur. En pratique, cette étape peut être utilisée pour que le solveur évalue de lui-même une situation initiale cohérente avec l'ensemble des contraintes. Cependant, il est possible que la solution obtenue s'écarte fortement des conditions initiales spécifiées par l'utilisateur. Cette étape peut également ne pas être bloquante, c.-à-d. que l'utilisateur accepte que son modèle ne soit pas cohérent à l'état initial. Dans ce cas, il est possible que la solution soit oscillante en début de simulation.

### C.2.7.3 Détermination des dérivées temporelles restantes

Une fois que l'étape de vérification initiale est réalisée, il reste à déterminer les dérivées temporelles des quantités de mouvement et les quantités algébriques (réactions de contraintes). La même méthode que celle utilisée lors de l'étape de vérification initiale peut être utilisée. Cependant, ce nouveau système fictif serait composé des équations du principe fondamental de la dynamique (cf. équation C.1.15 p. 79) et de la seconde dérivée temporelle des contraintes holonomes.

Au sein de MBDyn une toute autre approche est utilisée. L'idée théorique est d'intégrer le système différentiel algébrique total (cf. algorithme C.2.1 p. 96) avec un pas de temps nul et empêcher la modification des quantités déjà connues. Par conséquent, cela consiste à itérer sur  $i$  l'équation (C.2.65) en prenant en compte quelques précautions.

$$\mathbf{F}^*|_0 \cdot \Delta \dot{\mathbf{y}}|_0^{i+1} = -\mathbf{F}|_0^i \quad (\text{C.2.65})$$

Le vecteur  $\dot{\mathbf{y}}$  contient les dérivées temporelles des quantités cinématiques  $\dot{\mathbf{q}}$  et des quantités de mouvement  $\dot{\mathbf{p}}$  ainsi que les actions de réaction<sup>12</sup>  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ . Ainsi, lors de ce processus itératif, les quantités  $\mathbf{y}$  et la partie représentative des dérivées temporelles des quantités cinématiques de  $\dot{\mathbf{y}}$  ne sont pas actualisées. La résolution de ce système permet donc d'initialiser les quantités restantes si la matrice  $\mathbf{F}^*|_0$  est inversible. Or, du fait de la nature algébrique du problème, cette matrice est potentiellement singulière si le pas de temps utilisé est

12. En effet, les multiplicateurs de Lagrange représentatifs des actions de réaction sont présents dans ce vecteur à cause du changement de variable (cf. équation C.2.35 p. 94).

nul. L'idée est donc d'utiliser un pas de temps fictif faible. Par défaut, ce dernier est fixé à  $10^{-9}$ . Si la matrice obtenue est mal-conditionnée<sup>13</sup>, une augmentation de ce pas de temps fictif peut être nécessaire. En conclusion, ce système est résolu itérativement en forçant les équations suivantes :

$$\mathbf{y}|_0^i = \mathbf{y}_0 \quad \dot{\mathbf{q}}|_0^i = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad \dot{\mathbf{p}}|_0^i = \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{v}}|_0^i = \mathbf{0} \quad \mathbf{v}|_0^i = \mathbf{0} \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}|_0^i = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\xi}|_0^i = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.66})$$

Cette opération est maintenant appliquée sur l'exemple d'illustration. Les résultats sont présentés au tableau C.2.3. Les données utilisées sont :  $L = 1$  m,  $m_1 = m_2 = 1$  kg,  $l_0 = 0.5$  m,  $k = 10$  N.m<sup>-1</sup> et  $c = 2$  N.m<sup>-1</sup>.s. La première ligne correspond à la configuration de référence. Ce tableau illustre le fait que, si les positions sont mal initialisées (lignes 2 à 4), alors la solution de ce système diverge. En effet, les contraintes holonomes peuvent être vues comme des raideurs infinies. Les quantités algébriques tendent donc vers l'infini si les contraintes holonomes ne sont pas respectées. L'étape de vérification initiale est donc nécessaire pour éviter de diverger lors de cette étape. Une mauvaise initialisation de la vitesse est néanmoins possible (ligne 5 à 7). Cependant, du fait de la modification de la valeur initiale de l'effort d'amortissement (lignes 5 à 6), les autres quantités sont également impactées. L'effort d'amortissement étant indépendant de la vitesse du deuxième nœud, la solution est identique à celle du cas de référence (ligne 7).

ligne	données initiales						solutions			
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dot{x}_0$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{p}_1$	$\dot{p}_2$	$\dot{v}_0$	$\dot{v}_1$
1	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	1.0	-3.50	-3.50	7.00	3.50
2	<b>0.1</b>	1.0	2.0	0.0	1.0	1.0	↗	↗	↗	↗
3	0.0	<b>1.1</b>	2.0	0.0	1.0	1.0	↗	↗	↗	↗
4	0.0	1.0	<b>2.1</b>	0.0	1.0	1.0	↗	↗	↗	↗
5	0.0	1.0	2.0	<b>0.5</b>	1.0	1.0	<b>-3.00</b>	<b>-3.00</b>	<b>6.00</b>	<b>3.00</b>
6	0.0	1.0	2.0	0.0	<b>1.5</b>	1.0	<b>-4.00</b>	<b>-4.00</b>	<b>8.00</b>	<b>4.00</b>
7	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	<b>1.5</b>	-3.50	-3.50	7.00	3.50

**Tableau C.2.3 :** Exemple monodimensionnel – Détermination des dérivées temporelles restantes

En conclusion, une fois cette étape réalisée, toutes les inconnues généralisées et leurs dérivées temporelles sont initialisées.

#### C.2.7.4 Le respect des deuxièmes dérivées temporelles des équations de contrainte

Théoriquement, les différentes étapes présentées ci-dessus ne suffisent pas à initialiser correctement le système d'équations différentielles algébriques considéré car, à aucun moment, les deuxièmes dérivées temporelles des équations de contraintes ne sont utilisées.

Afin d'illustrer ce point, il est préférable de s'appuyer sur un exemple concret. Par exemple, les différentes étapes présentées ci-dessus sont appliquées sur un simple pendule oscillant. Il est supposé que les données initiales sont cohérentes en matière de position (longueur du fil) et en matière de vitesse linéaire (tangente à la trajectoire). Lors de l'évaluation des actions de réaction (dernière étape présentée), ces derniers ne prendront pas en compte l'effort centrifuge car cet effort additionnel résulte de la deuxième dérivée temporelle des équations de contrainte. Comme cet effort supplémentaire est inconnu à l'état initial, la quantité de mouvement est également incohérente à l'état initial. Par conséquent, le système se met à osciller dans la direction du fil qui le retient comme si la flexibilité du fil était modélisée.

Afin de pallier cet inconvénient sans implémenter les deuxièmes dérivées temporelles des équations de contrainte, les développeurs de MBDyn laissent la possibilité de réaliser une première intégration temporelle factice sur quelques pas de temps très faibles et d'utiliser ces résultats pour initialiser correctement les quantités représentatives des actions de réaction. Comme les pas de temps doivent être particulièrement faibles pour ne pas s'éloigner de la solution initiale, un schéma d'intégration fortement diffusif doit être utilisé. Cependant, il est important de remarquer que, dans la majorité des cas, cette étape n'est pas nécessaire. Si le modèle est correctement construit, la solution numérique doit converger rapidement vers une solution admissible.

13. Plus le pas de temps est faible, plus le conditionnement de la matrice  $\mathbf{F}^*$  est élevé (cf. section C.2.6 p. 94). Un pas de temps nul est le cas limite (matrice singulière).

### C.2.7.5 Première intégration temporelle

Lors de la première intégration temporelle (premier pas de temps résolu), il n'est pas possible d'utiliser un schéma d'intégration temporelle multi-pas car il serait nécessaire de connaître au moins deux états précédents. Un schéma mono-pas est donc nécessaire. Le schéma de Crank-Nicolson est donc utilisé (cf. annexe G.2 p. 334). C'est un schéma d'intégration implicite, d'ordre 2, A-stable et de rayon spectral valant  $\rho_\infty = 1$  (pas d'amortissement des hautes fréquences numériques). Un comportement oscillant peut donc apparaître lors de la première itération si le système est particulièrement raide. Un schéma d'intégration mono-pas à rayon-spectral variable est également disponible au sein de MBDyn [Masarati, 1999]. Le schéma de Crank-Nicolson est défini par :

$$\mathbf{y}|_{n+1} = \mathbf{y}|_n + \frac{h}{2} (\dot{\mathbf{y}}|_n + \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}) = \mathbf{y}|_n + h^* (\dot{\mathbf{y}}|_n + \dot{\mathbf{y}}|_{n+1}) \quad (\text{C.2.67})$$

$$(\text{C.2.68})$$

Le coefficient utilisé pour améliorer le conditionnement des matrices  $h^*$  vaut  $h/2$  dans ce cas<sup>14</sup>. De plus, l'initialisation est donnée par les équations (C.2.69) et (C.2.70). Une intégration temporelle classique est réalisée sinon (cf. algorithme C.2.1 p. 96).

$$\dot{\mathbf{y}}|_1^0 = \dot{\mathbf{y}}|_0 \quad (\text{C.2.69})$$

$$\mathbf{y}|_1^0 = \mathbf{y}|_0 + \frac{h}{2} (\dot{\mathbf{y}}|_0 + \dot{\mathbf{y}}|_1^0) \quad (\text{C.2.70})$$

## C.2.8 Problématique des poutres

### C.2.8.1 Rappel

Une poutre peut être considérée comme étant un ensemble de corps rigides (des sections) possédant des relations particulières entre eux (cf. section C.1.5 p. 80). Ces relations permettent d'évaluer les efforts internes qui s'exercent sur ces sections à partir des quantités cinématiques de ces corps rigides. Notamment, l'équilibre d'une portion d'une poutre délimitée par les points  $A$  et  $B$  est donné par l'équation suivante (cf. équation C.1.64 p. 86) :

$$-\mathbf{Y}_{OA} \cdot \mathbf{R}_A \cdot \tilde{\mathbf{v}}_A + \mathbf{Y}_{OB} \cdot \mathbf{R}_B \cdot \tilde{\mathbf{v}}_B + \boldsymbol{\varphi}_{AB} = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.71})$$

où  $\tilde{\mathbf{v}}$  est le vecteur des efforts généralisés,  $\tilde{\mathbf{D}}$  la matrice de comportement,  $\mathbf{R}$  la matrice de rotation généralisée,  $\mathbf{Y}$  la matrice de transport des moments et  $\boldsymbol{\varphi}_{AB}$  l'intégrale des efforts et moments extérieurs à la poutre. Le vecteur des efforts généralisés est lié aux vecteurs des déformations généralisées par la relation suivante (cf. équation C.1.52 p. 85) :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}} \quad (\text{C.2.72})$$

où  $\tilde{\mathbf{D}}$  est la matrice de comportement (cf. équation C.1.51 p. 85). Le vecteur des déformations généralisées est défini par :

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.73})$$

où  $\tilde{\mathbf{v}}$  est la déformation de membrane et  $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$  la courbure élastique. Ces dernières sont définies par :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{l}}_0 \quad \tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{R}^t \mathbf{l} \quad \mathbf{l} = \mathbf{p}_{/\xi} \quad (\text{C.2.74})$$

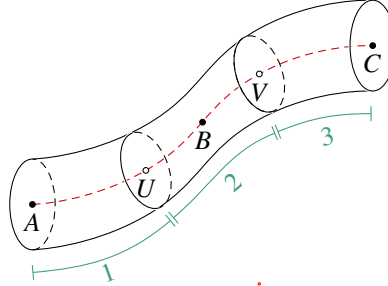
$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \tilde{\boldsymbol{\varrho}} - \tilde{\boldsymbol{\varrho}}_0 \quad \tilde{\boldsymbol{\varrho}} = \mathbf{R}^t \boldsymbol{\varrho} \quad \boldsymbol{\varrho} \times = \mathbf{R}_{/\xi} \cdot \mathbf{R}^t \quad (\text{C.2.75})$$

où  $\mathbf{p}$  est la position d'un point sur la ligne de référence,  $\mathbf{R}$  la matrice d'orientation de la section et  $\boldsymbol{\varrho}$  la courbure de la ligne de référence.

14. Ce coefficient vaut  $2h/3$  si un schéma BDF-2 est utilisé.

### C.2.8.2 Modèle élémentaire

Au sein de MBDyn, les équations d'équilibre sont écrites pour une poutre élémentaire caractérisée par trois nœuds pour pouvoir utiliser des fonctions d'interpolation quadratiques. Les tronçons de poutre correspondants sont présentés à la figure C.2.3. Les points  $U$  et  $V$  représentent uniquement les points où sont évalués les efforts internes généralisés (points de Gauss). Ils ne sont pas directement modélisés au sein du solveur.



**Figure C.2.3 :** Poutre – Notations pour une poutre caractérisée par trois nœuds

Chacun des tronçons étant en équilibre et les sections extrêmes n'étant pas soumises aux efforts internes (poutre élémentaire), le système d'équations représentatif de l'équilibre global peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{OU} \cdot \mathbf{R}_U & \mathbf{0} \\ -\Upsilon_{OU} \cdot \mathbf{R}_U & \Upsilon_{OV} \cdot \mathbf{R}_V \\ \mathbf{0} & -\Upsilon_{OV} \cdot \mathbf{R}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_U \\ \tilde{\mathbf{v}}_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{AU} \\ \boldsymbol{\varphi}_{UV} \\ \boldsymbol{\varphi}_{VC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.76})$$

Les efforts internes évalués aux points  $U$  et  $V$  sont transportés et appliqués aux points structurels (points modélisés) par l'équation ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_A \\ \tilde{\mathbf{v}}_B \\ \tilde{\mathbf{v}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{AU} & \mathbf{0} \\ -\Upsilon_{BU} & \Upsilon_{BV} \\ \mathbf{0} & \Upsilon_{CV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_U \\ \tilde{\mathbf{v}}_V \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.77})$$

En conclusion partielle, les efforts internes sont évalués aux points  $U$  et  $V$  puis appliqués aux points structurels (les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ) grâce à de simples transports. Les efforts internes ne sont donc corrects qu'aux points d'évaluation  $U$  et  $V$ .

### C.2.8.3 Évaluation des efforts internes aux points d'évaluation

Pour déterminer les efforts internes aux points d'évaluation, il est nécessaire de connaître le vecteur des déformations généralisées  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Plus précisément, il est nécessaire d'évaluer la dérivée par rapport au paramètre de la courbe  $\xi$  de la position et de l'orientation des sections (cf. équations C.2.74 page précédente et C.2.75 page suivante). De manière identique aux cas des corps rigides, les orientations des sections sont paramétrées par le paramètre de Gibbs-Rodrigues  $\mathbf{r}$  (cf. section C.1.3 p. 77). La position de la courbe de référence et l'orientation des sections sont interpolées par des fonctions quadratiques. Si  $N_i$  représente la fonction d'interpolation élémentaire du  $i$ -ème point, alors :

$$\mathbf{p}(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{p}_i \quad \mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{r}_i \quad (\text{C.2.78})$$

Si  $\xi = -1$  correspond au point  $A$ ,  $\xi = 0$  au point  $B$  et  $\xi = 1$  au point  $C$ , alors les fonctions d'interpolation élémentaires sont données par (polynômes de Lagrange) :

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} \quad N_2(\xi) = (\xi+1)(1-\xi) \quad N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \quad (\text{C.2.79})$$

Ainsi, la dérivée du vecteur position est obtenue par :

$$\mathbf{l} = \mathbf{p}_{/ \xi} = \sum_{i=1}^3 N_{i/\xi} \mathbf{p}_i \quad (\text{C.2.80})$$

La courbure de la poutre est, quant à elle, obtenue grâce aux propriétés de la paramétrisation des rotations (cf. annexe G.1.2.4 p. 327) :

$$\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_{/ \xi} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \sum_{i=1}^3 N_{i/\xi} \mathbf{r}_i \quad \text{où} \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{r}_i \quad (\text{C.2.81})$$

Pour éviter les singularités liées à ce type de paramétrisation et faciliter l'écriture de la matrice Jacobienne, la méthode présentée à la section C.2.3.2 p. 90 est de nouveau utilisée [Masarati, 1999]. Le choix de la position des points d'évaluation des efforts internes est laissé libre à l'utilisateur. Néanmoins, il a été montré que dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et subissant un effort ponctuel à l'autre extrémité, il est possible d'obtenir la solution exacte avec une unique poutre élémentaire si les points d'évaluation sont positionnés à  $s/l = \pm 1/\sqrt{3}$  ( $s$  est l'abscisse curviligne et  $l$  la longueur de la poutre élémentaire) [Ghiringhelli *et al.*, 2000]. Cette configuration est donc choisie tout au long de ce travail.

### C.2.8.4 Remarques

La discrétisation d'une poutre n'est, bien entendu, pas limitée par trois segments. Il suffit d'assembler plusieurs poutres élémentaires pour discrétiser plus finement une poutre réelle. Cet assemblage se réalise par une méthode identique à celle couramment utilisée en éléments finis.

Du fait de la méthode de modélisation employée (assemblage de corps rigides avec modélisation des efforts internes entre eux), la prise en compte d'une poutre totalement libre est intrinsèquement possible. C'est une propriété particulièrement intéressante lorsque l'objet d'étude est un navire déformable (poutre navire) par exemple.

## C.2.9 Résolution des systèmes linéaires

Lors du processus de résolution de la méthode de Newton-Raphson, un système linéaire est à résoudre (cf. section C.2.6 p. 94). L'approche « Redundant Coordinate Set » utilisée dans MBDyn produit principalement des matrices creuses. Par exemple, dans le cadre de l'exemple d'illustration, les coefficients non-nuls de  $\mathbf{F}^*$  sont présentés à la figure C.2.4. La matrice obtenue est de taille 50 sur 50 car le problème est résolu dans l'espace tridimensionnel. Il y a donc 18 inconnues cinématiques (6x3 nœuds), 12 quantités de mouvement (6x2 nœuds dynamiques), 6 quantités algébriques représentatives de la liaison encastrement, 4 quantités algébriques pour contraindre les degrés de liberté en translation des deux nœuds dynamiques (2x2 nœuds), 6 quantités algébriques pour contraindre les degrés de liberté en rotation de ces mêmes nœuds (3x2 nœuds), 1 quantité algébrique représentative de la contrainte de distance et 3 quantités algébriques pour l'effort de raideur/amortissement<sup>15</sup>. Pour ce simple problème, le nombre total d'inconnues est donc de 50.

Par conséquent, l'algorithme de résolution et la gestion mémoire des systèmes linéaires doivent être adaptés aux matrices creuses. En général, lorsque les matrices manipulées sont creuses, seuls les éléments non nuls sont stockés en mémoire. Notamment, c'est sur ce principe que reposent les méthodes de stockage et de résolution des systèmes linéaires lorsque des approches volumes finis ou éléments finis sont utilisées. Effectivement, la taille des systèmes linéaires à résoudre est généralement très grande. Avec ce type de méthode, le gain en utilisation mémoire est important mais il y a une complexité algorithmique supplémentaire qui entraîne un accès plus long aux différents éléments de la matrice. Ici, la taille des systèmes linéaires à résoudre est nettement moins importante car le nombre d'équations est généralement faible (en dessous de 3000). Un solveur spécifique est donc utilisé. Il se nomme « naïve »<sup>16</sup>. Lorsque ce solveur est utilisé, la totalité des matrices est stockée mais la position des éléments non-nuls est également sauvegardée en mémoire [Morandini et Mantegazza, 2007].

15. Pour modéliser l'effort de raideur/amortissement, une liaison généraliste est utilisée, d'où l'utilisation de 3 quantités algébriques qui représentent l'effort linéaire dans les 3 directions de l'espace.

16. Il est également disponible sous la forme d'une librairie sur le site officiel de MBDyn.

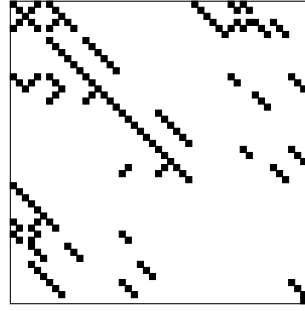


Figure C.2.4 : Exemple monodimensionnel – Système linéaire

Avec cette approche, la mémoire occupée par un système linéaire de 3000 inconnues est évaluée à 150 MB. La résolution est, quant à elle, réalisée par une élimination de Gauss avec pivotage partiel.

D'autres solveurs linéaires sont également disponibles au sein de MBDyn. Une liste détaillée est donnée dans le manuel utilisateur [MBDyn, 2012].

### C.2.10 Résultats de l'exemple d'illustration

Cette section présente les résultats obtenus lors de l'étude de l'exemple d'illustration. Les paramètres physiques utilisés sont :  $L = 1$  m,  $m_1 = m_2 = 1$  kg,  $l_0 = 0.5$  m,  $k = 10$  N.m<sup>-1</sup> et  $c = 2$  N.m<sup>-1</sup>.s. Les différents cas sont identifiés de la même façon qu'au tableau C.2.3. Ainsi, le cas 1 est initialisé correctement et les cas 6 et 7 sont caractérisés par des vitesses initiales incohérentes avec les contraintes holonomes. Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique et aux résultats produits par MBDyn. La solution analytique pour le cas traité, c.-à-d. lorsque  $\eta < 1$ , est :

$$x_1(t) = l_0 + e^{-\eta \cdot \omega_0 \cdot t} \left[ (x_1|_0 - l_0) \cdot \cos(\omega_p \cdot t) + \frac{\dot{x}_1|_0 + \eta \cdot \omega_0 \cdot (x_1|_0 - l_0)}{\omega_p} \sin(\omega_p \cdot t) \right] \quad (\text{C.2.82})$$

avec :

$$m = m_1 + m_2 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \eta = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_0} \quad (\text{C.2.83})$$

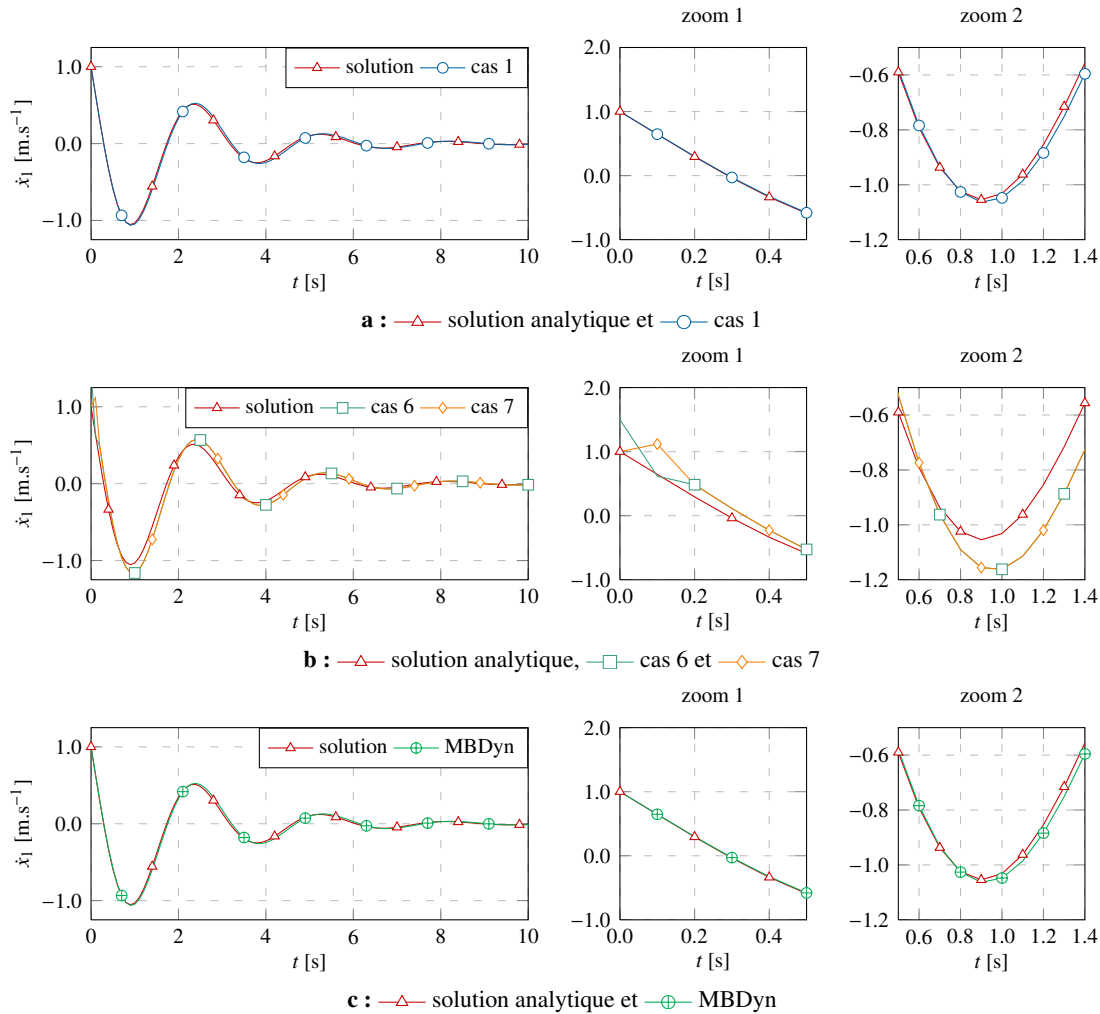
où  $\omega_0$  est la pulsation propre non-amortie,  $\omega_p$  la pseudo pulsation et  $\eta$  l'amortissement réduit. Le pas de temps vaut 0.1 s. Ce pas de temps est assez élevé pour mettre en avant les écarts entre les différents cas (cf. figure C.2.5 page suivante). Néanmoins, une convergence des résultats numériques vers la solution analytique est bien obtenue si le pas de temps est diminué. Il a également été vérifié que la convergence est bien du deuxième ordre.

### C.2.11 Conclusion et remarques diverses

Cette section avait pour objectif de présenter les méthodes de résolution numérique utilisées au sein de MBDyn. De manière générale, la résolution du système différentiel algébrique est réalisée par une intégration temporelle implicite des équations par une méthode de type prédiction-correction. Les itérations de correction, qui servent également à résoudre les non-linéarités cinématiques et mécaniques, sont réalisées par une méthode de Newton-Raphson modifiée.

Après une première introduction des principes généraux, le traitement particulier des rotations a été présenté. Ce dernier permet à la fois, de s'affranchir des singularités liées à la paramétrisation vectorielle des rotations, mais également de simplifier l'écriture du Jacobien.

Quelques méthodes de résolution des problèmes différentiels algébriques sont également introduites. La méthode utilisée au sein de MBDyn est une méthode dite directe, c.-à-d. que les équations du système sont directement intégrées temporellement. Pour que cette résolution soit possible, plusieurs éléments sont nécessaires.



**Figure C.2.5 :** Exemple d'illustration monodimensionnel – Quelques solutions numériques – Vitesse du nœud 1

Premièrement, des schémas d'intégration implicites et L-stables sont indispensables pour résoudre des systèmes différentiels raides (un système différentiel algébrique est un système différentiel raide). Deuxièmement, il a été montré que, la combinaison d'un changement de variable appliqué sur les quantités algébriques représentatives des actions de réaction avec une division des équations de contrainte par un coefficient dépendant du pas de temps courant permet d'améliorer le conditionnement du système linéaire à inverser. L'ensemble de ces conditions rend possible la résolution directe des systèmes différentiels algébriques considérés.

Une attention particulière a été portée sur les différentes étapes servant à initialiser le processus de résolution. Les étapes de vérification, de correction et d'évaluation des différentes quantités à l'état initial ont donc été introduites. Notamment, il a été montré que les données initiales doivent respecter un certain nombre d'équations supplémentaires du fait de la nature algébrique du problème. L'étape de correction peut être utilisée pour faciliter la mise en donnée. Néanmoins, il est nécessaire que l'utilisateur vérifie la cohérence de son modèle initial. Si la mise en donnée est cohérente avec les différentes contraintes algébriques, une résolution fictive (c.-à-d. avec un pas de temps très faible) du problème à l'instant initial permet d'initialiser correctement les différentes quantités dans la majorité des situations. Cependant, dans certaines situations critiques (efforts d'inerties importants et parallèles aux actions de réaction présentes à l'état initial), le problème doit être résolu sur un certain nombre de pas de temps fictifs pour initialiser correctement les quantités algébriques représentatives des actions de réaction.

Tout au long de cette partie, un exemple d'illustration est proposé et les résultats sont finalement donnés à titre d'information.







# Le couplage fluide-structure

Ce chapitre est le cœur de ce travail de thèse. Dans un premier temps, il introduit une formulation du problème couplé sous une forme couramment utilisée pour sa concision et sa généralité. Les différents opérateurs manipulés sont également présentés dans cette partie.

Dans un deuxième temps, les deux grandes familles d'algorithmes sont comparées. Par la suite, une description des différents opérateurs manipulés est réalisée. Puis, les algorithmes de couplage classiques sont analysés avant d'explicitier l'algorithme de couplage utilisé.

Dans un troisième temps, le problème de stabilité de l'algorithme de couplage vis-à-vis des effets de masse ajoutée est introduit après qu'une définition de ces derniers soit réalisée. Plusieurs méthodes de stabilisation sont présentées et appliquées à l'algorithme de couplage utilisé.

Enfin, un résumé des différents points abordés dans ce chapitre est proposé.

## Contenu

<b>D.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>112</b>
<b>D.2</b>	<b>Le problème fluide-structure en équations</b>	<b>113</b>
<b>D.3</b>	<b>Les algorithmes de couplage fluide-structure</b>	<b>116</b>
D.3.1	Introduction	116
D.3.1.1	Approche monolithique	116
D.3.1.2	Approche partitionnée	117
D.3.2	Description des opérateurs élémentaires et composés	118
D.3.2.1	Introduction	118
D.3.2.2	Opérateurs représentatifs du problème fluide	118
D.3.2.2.1	Opérateur classique	119
D.3.2.2.2	Opérateur linéarisé	119
D.3.2.3	Opérateurs représentatifs du problème structure	121
D.3.3	Les algorithmes de couplage classiques	121
D.3.3.1	Algorithme explicite élémentaire	122
D.3.3.2	Algorithme explicite avec prédicteur de cinématique	122
D.3.3.3	Algorithme de Gauss-Seidel par blocs	124
D.3.3.4	Accélération de l'algorithme de Gauss-Seidel par blocs	124
D.3.3.4.1	Généralités	124
D.3.3.4.2	Accélération d'Aitken	126
D.3.3.4.3	Accélération de type Newton	126
D.3.4	L'algorithme de couplage utilisé	128

D.3.4.1	Analyse du problème et discussion . . . . .	128
D.3.4.2	Algorithme DFMT-BGS-IFC . . . . .	129
D.3.4.3	Note sur la prédiction de la cinématique . . . . .	129
<b>D.4</b>	<b>Cas particulier des poutres . . . . .</b>	<b>131</b>
D.4.1	Introduction . . . . .	131
D.4.2	Description d'une poutre au sein du solveur fluide . . . . .	131
D.4.3	Reconstruction de la géométrie . . . . .	131
D.4.3.1	Reconstruction de la fibre neutre . . . . .	132
D.4.3.1.1	Interpolation d'Hermite . . . . .	132
D.4.3.1.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	133
D.4.3.1.3	Abscisse curviligne et longueur d'un segment . . . . .	133
D.4.3.2	Reconstruction de l'orientation . . . . .	134
D.4.3.2.1	Interpolation d'Hermite . . . . .	134
D.4.3.2.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	134
D.4.3.3	Comparaison des deux méthodes . . . . .	134
D.4.4	Transfert des efforts fluides . . . . .	136
D.4.5	Transfert de la cinématique de la poutre . . . . .	139
D.4.6	Note sur l'implémentation . . . . .	140
<b>D.5</b>	<b>Le problème de la masse ajoutée . . . . .</b>	<b>141</b>
D.5.1	Définition de la masse ajoutée . . . . .	141
D.5.1.1	Introduction . . . . .	141
D.5.1.2	Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini . . . . .	141
D.5.1.3	Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu non infini . . . . .	143
D.5.1.4	Cas des écoulements monophasiques visqueux . . . . .	144
D.5.1.5	Cas des écoulements potentiels avec surface libre . . . . .	144
D.5.1.6	Définition retenue . . . . .	145
D.5.1.7	Discussion . . . . .	146
D.5.1.8	Symétrie de la matrice de masse ajoutée . . . . .	147
D.5.1.9	Comparaison avec les autres définitions . . . . .	148
D.5.1.10	Conclusion . . . . .	148
D.5.2	Validation de la méthode d'évaluation des effets de masse ajoutée . . . . .	149
D.5.2.1	Un cylindre . . . . .	149
D.5.2.2	Un rectangle . . . . .	150
D.5.2.3	Un cylindre dans un tuyau . . . . .	150
D.5.2.4	Un parallélépipède . . . . .	151
D.5.2.5	Un ellipsoïde de révolution . . . . .	152
D.5.2.6	Une barge parallélépipédique . . . . .	153
D.5.2.7	Un cargo Series 60 . . . . .	154
D.5.3	Généralités sur le problème de la masse ajoutée . . . . .	158
D.5.4	Approche théorique sur les corps rigides . . . . .	159
D.5.5	Illustration sur un modèle analytique de corps rigide . . . . .	161
D.5.6	Algorithme DFMT-BGS-IFC et masse ajoutée . . . . .	165
D.5.6.1	Introduction . . . . .	165
D.5.6.2	Notations des corps rigides à 6 degrés de liberté . . . . .	166
D.5.6.3	Méthode sans relaxation . . . . .	167
D.5.6.4	Relaxation appliquée à la cinématique . . . . .	168
D.5.6.4.1	Principe général . . . . .	168
D.5.6.4.2	Reconstruction des vitesses et positions . . . . .	171
D.5.6.4.3	Autre méthode de reconstruction des vitesses et positions . . . . .	172
D.5.6.4.4	Prise en compte des actionneurs . . . . .	173
D.5.6.5	Relaxation appliquée sur les efforts . . . . .	173
D.5.7	Masse ajoutée pour les corps déformables de type poutre . . . . .	176

---

D.5.8	Masse ajoutée d'une poutre de section carrée . . . . .	178
D.5.8.1	Description . . . . .	178
D.5.8.2	Généralités . . . . .	178
D.5.8.3	Résultats et analyses . . . . .	179
D.5.8.3.1	Méthode 3 et corps rigide . . . . .	179
D.5.8.3.2	Méthodes 3 et méthode 2 . . . . .	179
<b>D.6</b>	<b>Résumé . . . . .</b>	<b>184</b>

### D.1 Introduction

Comme il a déjà été vu en introduction, les problèmes d'interactions fluide-structure sont courants en hydrodynamique navale. Dans un cadre très général, les interactions entre un fluide et une structure peuvent être étudiées selon différents points de vue physiques : mécanique, acoustique, thermique ou encore électromagnétique. Seules les interactions d'ordre mécanique sont considérées ici. Afin de délimiter le domaine d'application de ces travaux, cette section d'introduction propose quelques notions physiques permettant de caractériser des problématiques d'interaction fluide-structure. Le cadre numérique est, quant à lui, développé à la section D.3 p. 116.

La caractérisation physique d'une problématique d'interaction fluide-structure peut se décrire selon de nombreux critères qui, d'une certaine manière, expriment le degré de complexité de cette problématique. Une présentation de quelques uns de ces critères est réalisée ci-dessous.

Le premier critère possible est le degré d'interaction entre le milieu fluide et le milieu structure. Il est ainsi possible de parler d'interaction faible lorsque l'un de ces deux milieux n'influence pas de manière significative le comportement de l'autre. Ce genre de situation se retrouve couramment lors des études vibroacoustiques par exemple. En effet, la charge acoustique modifie rarement la forme et le comportement vibratoire de la structure. Il est donc possible d'étudier les transferts d'énergie de la structure vers le fluide uniquement. Au contraire, il est possible de parler d'interaction forte lorsque chacun des milieux possède une influence non-négligeable sur son vis-à-vis. Par exemple, ceci s'observe lorsque le déplacement (ou la déformation) de la structure modifie l'écoulement qui l'entoure : écoulement dans une voile, cinématique d'un navire, etc. Dans ce cas, le transfert d'énergie doit être étudié dans les deux sens.

Un deuxième critère possible se fonde sur la nature même de la structure. Le solide peut être étudié selon 4 points de vue de complexité croissante : fixe et indéformable, en mouvement et indéformable, déformable mais fixe en un ou plusieurs endroits ou déformable et libre. Le premier cas ne relève pas véritablement des interactions fluide-structure car aucun transfert d'énergie du fluide vers le solide ne doit être modélisé car la cinématique de ce dernier n'est pas résolue. C'est un exemple de situation où les interactions sont faibles dans un sens. Le cas des solides rigides est le plus couramment rencontré en hydrodynamique navale. C'est le point de vue employé lorsque sont réalisées des études de résistance à l'avancement, de stabilité ou de manœuvrabilité des engins marins par exemples. La partie structure s'étudie dans le cadre de la mécanique des solides. Les transferts d'énergie du milieu fluide vers le milieu structure s'effectuent par le biais d'efforts globaux et par le biais d'un mouvement rigide dans le sens inverse. Dans les deux derniers cas, c.-à-d. lorsque la structure est déformable, la déformation de la structure est évaluée par la résolution des équations de la mécanique des solides déformables. Un accroissement de la complexité du problème en résulte car les transferts d'énergie s'effectuent localement et non plus globalement à l'échelle de la structure.

Un troisième critère possible est la stationnarité ou la non-stationnarité du problème. Lorsque le problème d'interaction converge vers une situation pseudo-stationnaire (annulation des vitesses de la structure mais pas spécialement celles du fluide), il est possible d'étudier le problème de manière itérative sans spécialement chercher à respecter les transferts d'énergie tout au long du processus de calcul. La recherche de la position d'équilibre d'un navire avançant en eau calme en est un exemple typique.

D'autres critères peuvent également être utilisés pour caractériser une problématique d'interaction fluide-structure. La masse ajoutée en est un exemple. Ce point particulier est développé en détail à la section D.5 p. 141 car il est particulièrement présent dans le domaine de l'hydrodynamique navale. Notamment, il y est montré qu'un couplage numérique fort avec une prise en compte de ce phénomène de masse ajoutée est nécessaire afin de garantir la stabilité et la précision de l'algorithme de couplage. Un autre critère possible de caractérisation des problématiques d'interaction fluide-structure peut être la relation entre les échelles caractéristiques du problème fluide et celles du problème structure. S'il existe une grande différence entre ces deux échelles de temps, il est notamment possible de résoudre le problème couplé à des intervalles de temps qui ne dépendent pas de l'échelle de temps la plus faible. Cependant, cela n'est pas particulièrement évident à mettre en place (point de vue pratique), l'ordre de précision des résultats n'est pas clairement déterminé et cela suppose que le milieu dont l'échelle de temps est la plus grande possède un comportement assez « lisse » (utilisation de méthodes d'interpolation).

L'étude d'interactions fluide-structure dans le domaine de l'hydrodynamique navale nécessite dans certains cas de mettre en place un couplage dit fort pour deux raisons principales : le degré d'interaction entre les deux milieux et le phénomène de masse ajoutée sont importants. Même s'il est vrai que la structure est souvent considérée indéformable, il est intéressant que ce couplage puisse à la fois prendre en considération des corps rigides comme des corps déformables. L'algorithme de couplage mis en place lors de ces travaux est instationnaire afin de ne pas limiter les applications possibles aux cas pseudo-stationnaires. Afin d'introduire la résolution numérique de ce problème possédant les caractéristiques précédemment citées, les équations qui régissent ce problème sont décrites dans la section suivante.

## D.2 Le problème fluide-structure en équations

Dans cette section, la formulation et une partie des notations de certains auteurs sont utilisées car elles permettent d'avoir une présentation générale et formelle du problème [Deparis *et al.*, 2006a], [Gloria, 2007] et [Kassiotis, 2009]. Cette formulation est notamment valable que le corps soit déformable ou indéformable. La généralisation aux cas multi-corps est évidente. C'est la raison pour laquelle la présentation se base sur une approche mono-corps. Les notations utilisées sont explicitées ci-dessous :

- $\bar{\Omega}$  : le domaine total ;
- $\bar{\Omega}^f$  : le domaine fluide ;
- $\bar{\Omega}^s$  : le domaine structure ;
- $\Gamma$  : la frontière entre ces deux domaines ;
- $\mathbf{n}^\Gamma$  : le vecteur normal à la frontière extérieure au domaine structure ;
- $\mathbf{x}$  : le vecteur position ;
- $\dot{\mathbf{x}}$  : le vecteur vitesse ;
- $\ddot{\mathbf{x}}$  : le vecteur accélération ;
- $\delta$  : le vecteur cinématique généralisé ( $\delta = [\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]^T$ ) ;
- $\mathcal{T}$  : le champ des contraintes généralisées (pression et contraintes de frottement) ;
- $\lambda$  : le champ des efforts surfaciques généralisées ;
- $t_n$  : le temps à l'itération  $n$ .

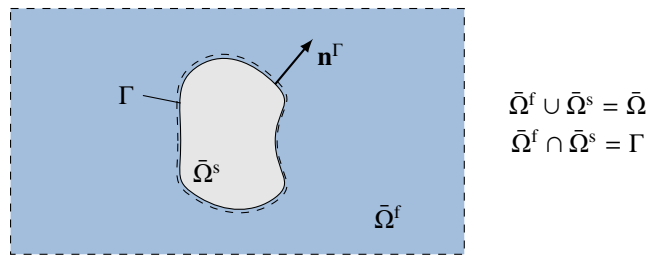


Figure D.2.1 : Notations du problème fluide-structure

Le couplage fluide-structure est un cas particulier des méthodes de décomposition de domaine. L'approche théorique et le vocabulaire utilisé proviennent donc naturellement de ces méthodes. Ces dernières consistent à résoudre des équations différentielles sur des sous-domaines du domaine initial. Elles peuvent être employées pour des objectifs divers mais la plus grande application, à l'heure actuelle, est la parallélisation des méthodes de résolution numérique afin de diminuer le temps de calcul et la consommation de mémoire locale qui peut vite devenir un problème pour la résolution de problèmes à grand nombre d'inconnues [Japhet, 1998], [Dolean, 2001] (cf. section A.4 p. 21). Les méthodes de décomposition de domaine peuvent être divisées en deux grandes parties : celles dites avec recouvrement des sous domaines et celles sans recouvrement. Ce sont ces dernières qui s'appliquent tout naturellement pour le couplage fluide-structure car le non-recouvrement des domaines considérés existe physiquement. Le domaine total est noté  $\bar{\Omega}$  et est défini par  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^f \cup \bar{\Omega}^s$ . La condition de non-recouvrement est :  $\bar{\Omega}^f \cap \bar{\Omega}^s = \Gamma$ .

Deux conditions aux limites caractérisent totalement un problème fluide-structure mécanique : la continuité de la cinématique et l'équilibre des efforts au niveau de l'interface (principe d'action-réaction). Ces deux conditions se traduisent respectivement par les équations (D.2.1) et (D.2.2). Dans le cadre général des méthodes de décomposition de domaine et du fait des deux équations ci-dessous, il est également possible de parler de quantité primale pour la cinématique et de quantité duale pour les efforts .

$$\delta^s = \delta^f = \delta^\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{D.2.1})$$

$$\lambda^s = -\lambda^f = \lambda^\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{D.2.2})$$

Le problème couplé consiste donc à chercher  $\delta^\Gamma$  et  $\lambda^\Gamma$ , tel que le problème non-linéaire présenté ci-dessous soit vrai quel que soit  $t$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\delta^\Gamma, \xi^m) &= 0 \\ \mathcal{F}(\delta^\Gamma, \xi^m, \xi^f) &= 0 \\ \mathcal{P}_f(\xi^f, \xi^m, \lambda^\Gamma) &= 0 \\ \mathcal{R}(\lambda^\Gamma, \xi^s) &= 0 \\ \mathcal{P}_s(\xi^s, \delta^\Gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

Les quantités  $\xi^s$ ,  $\xi^f$ ,  $\xi^m$  représentent respectivement l'état du problème fluide (vitesse, pression, quantités turbulentes, etc.), l'état du problème structure (dynamique pour un corps indéformable, contraintes et cinématiques pour un corps déformable) et l'état du maillage fluide (cinématique des nœuds). L'opérateur fluide élémentaire est noté  $\mathcal{F}$ , l'opérateur structure élémentaire est noté  $\mathcal{R}$  et l'opérateur de modification du domaine fluide est noté  $\mathcal{M}$ . Les opérateurs  $\mathcal{P}_s$  et  $\mathcal{P}_f$  représentent des opérateurs de projection (ou de restriction) sur la frontière (cf. section D.3.2 p. 118).

Il est maintenant intéressant d'introduire l'opérateur de Steklov-Poincaré, opérateur noté  $\mathcal{S}$ , car il permet de ramener le problème couplé précédent, à un problème unique : celui de l'interface. Cet opérateur a été introduit initialement dans le cadre de la résolution de l'équation de Poisson par une méthode de décomposition de domaine. Des informations détaillées sur cet opérateur peuvent être trouvées dans [Leborgne, 2011] ou [Gosselet et Rey, 2006]. Cet opérateur lie notamment la quantité duale à la quantité primale. Son opérateur inverse est appelé opérateur de Poincaré-Steklov et est noté  $\mathcal{S}^{-1}$ . Les définitions succinctes de ces opérateurs sont données ci-dessous.

$$\mathcal{S}_i(\delta^i) = \lambda^i \quad \mathcal{S}_i^{-1}(\lambda^i) = \delta^i \quad (\text{D.2.4})$$

Dans le cadre qui nous intéresse, l'opérateur de Steklov-Poincaré du fluide, opérateur noté  $\mathcal{S}_f$ , fournit les efforts surfaciques s'exerçant à la frontière par le fluide pour une certaine cinématique de cette même frontière. L'opérateur de Poincaré-Steklov de la structure, noté  $\mathcal{S}_s^{-1}$ , fournit la cinématique de la frontière à partir des efforts surfaciques s'exerçant dessus. Ces opérateurs sont décrits ci-dessous.

$$\mathcal{S}_f = \mathcal{P}_f \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M} \quad \mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{P}_s \circ \mathcal{R} \quad (\text{D.2.5})$$

Les opérateurs élémentaires possèdent généralement une dépendance en temps. Par conséquent, les opérateurs de Steklov-Poincaré et son inverse possèdent également cette dépendance. Afin de simplifier les notations, cette dépendance en temps n'est pas spécifiée.

L'opérateur de Steklov-Poincaré peut également être introduit sous sa forme discrétisée linéaire. Il est alors appelé complément primal de Schur ou opérateur local de Dirichlet<sup>1</sup> en référence au type des conditions aux limites manipulées (cf. annexe G.4.2 p. 348). De manière identique, l'opérateur de Poincaré-Steklov est appelé complément dual de Schur ou opérateur local de Neumann<sup>2</sup> pour les mêmes raisons [Gosselet et Rey, 2006].

Les deux dernières équations présentent les utilisations classiques des solveurs structure et fluide (opérateur de Steklov-Poincaré pour le fluide et opérateur de Poincaré-Steklov pour la structure). Cette approche est souvent

1. Il est également appelé opérateur de projection de « Dirichlet-to-Neumann » (D-t-N) [Deparis *et al.*, 2006a].

2. De manière duale, il est également appelé opérateur de projection de « Neumann-to-Dirichlet » (N-t-D).

appelée Dirichlet-Neumann (D-N)<sup>3</sup>. Cependant, en théorie, il est possible de les utiliser différemment comme le montrent les deux paragraphes ci-dessous.

Tout d'abord, dans le cadre des structures déformables, il est souvent possible de travailler avec des conditions aux limites de type Dirichlet (cinématique imposée). Dans ce cas, la mise en place d'un algorithme de couplage fluide-structure utilisant un opérateur de Steklov-Poincaré pour la structure (approche D-D ou N-D) est tout à fait envisageable et a déjà été réalisée [Deparis *et al.*, 2006a]. Dans le cadre des structures rigides, il est nécessaire d'utiliser un solveur dit de « dynamique inverse ». Ces solveurs sont utilisés en grande majorité dans le domaine de la robotique (recherche des efforts à appliquer pour obtenir une cinématique voulue) ou le domaine de la biomécanique (recherche des efforts aux niveaux des articulations par analyse de la cinématique du corps humain par exemple). Le domaine d'application de ces solveurs étant très restreint à l'heure actuelle, cette possibilité est dès à présent écartée.

Le paragraphe précédent montre qu'il est possible d'utiliser un solveur structure de manière non-conventionnelle pour résoudre une problématique de couplage fluide-structure. Pour la résolution du problème fluide, cela est particulièrement difficile. En effet, l'utilisation d'un opérateur de Poincaré-Steklov pour le problème fluide (approche N-D ou N-N) revient à spécifier l'effort surfacique comme condition aux limites. Cette condition aux limites est difficilement applicable telle quelle car l'effort surfacique dépend à la fois de la pression et de la vitesse. Par conséquent, le problème fluide est classiquement résolu par un opérateur de Steklov-Poincaré même si dans des cas très particuliers où les efforts fluides n'interviennent que ou majoritairement par le biais de la pression (écoulements sanguins par exemple), des approches de ce type sont testées [Causin *et al.*, 2005].

La définition des opérateurs de Steklov-Poincaré et de son inverse, ainsi que la manipulation des équations (D.2.1) et (D.2.2), permettent d'écrire le problème couplé précédent en une seule équation. De plus, plusieurs formes peuvent être obtenues. Par exemple, la formulation de Steklov-Poincaré (approche D-D) est la suivante :

$$\mathcal{S}_f(\delta^r) + \mathcal{S}_s(\delta^r) = \mathbf{0} \quad (\text{D.2.6})$$

Comme il a déjà été énoncé dans les paragraphes précédents, cette équation revient à utiliser un solveur structure de manière non-conventionnelle du fait que le problème structure est résolu par un opérateur de Steklov-Poincaré. Il est ainsi courant de ramener l'équation (D.2.6) à un problème plus classique d'interaction fluide-structure en utilisant de son inverse : l'opérateur de Poincaré-Steklov. Il est ainsi possible d'obtenir une formulation en cinématique de type point-fixe (cf. équation D.2.7) ou une formulation en cinématique de type Newton (cf. équation D.2.8) par exemple (approches D-N). Au contraire de la formulation de Steklov-Poincaré, ces deux dernières formulations ne sont pas intrinsèquement parallélisables puisque les opérateurs  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{S}_s^{-1}$  sont composés.

$$\mathcal{S}_s^{-1}(-\mathcal{S}_f(\delta^r)) = \delta^r \quad (\text{D.2.7})$$

$$\mathcal{S}_s^{-1}(-\mathcal{S}_f(\delta^r)) - \delta^r = \mathbf{0} \quad (\text{D.2.8})$$

De manière équivalente, des formulations en effort de type point fixe ou de type Newton sont également possibles :

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^r)) = -\lambda^r \quad (\text{D.2.9})$$

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^r)) + \lambda^r = \mathbf{0} \quad (\text{D.2.10})$$

Une description générale de ces différentes méthodes peuvent être trouvées dans [Deparis *et al.*, 2006b]. Les formulations en effort sont moins souvent utilisées mais il est possible de trouver quelques applications dans la littérature [Karlo et Tezduyar, 2000], [Causin *et al.*, 2005], [Deparis *et al.*, 2006b]. C'est pourtant une formulation intéressante puisque, la cinématique de l'interface étant la variable intermédiaire, l'équation exprimant la continuité cinématique de l'interface est toujours respectée à chaque itération de couplage (même si le problème couplé n'est pas résolu totalement). Dans le cas d'une formulation en cinématique, ce sont les efforts au niveau de l'interface fluide-structure qui sont naturellement respectés. D'un point de vue numérique, ces deux

3. Dirichlet pour le fluide et Neumann pour la structure.



approches se différencient uniquement au niveau de l'ordre de résolution des différents problèmes. Le problème fluide est résolu avant le problème structure lorsque qu'une approche primale est utilisée alors que, dans le cas d'une approche duale, c'est l'inverse qui est réalisé.

Des formulations hybrides utilisant des conditions aux limites de Robin (combinaison linéaire de condition aux limites de type Dirichlet et Neumann) peuvent également être utilisées [Gosselet et Rey, 2006], [Badia *et al.*, 2008], [Badia *et al.*, 2009]. Cependant, elles restent à l'heure actuelle expérimentales et difficiles à implémenter sans modifier de manière importante les solveurs fluide et structure classiquement utilisés.

## D.3 Les algorithmes de couplage fluide-structure

### D.3.1 Introduction

La résolution numérique d'un couplage fluide-structure peut s'effectuer selon deux grandes approches différentes : l'approche monolithique ou l'approche partitionnée. L'objectif des deux sections suivantes est de présenter chacune de ces approches.

#### D.3.1.1 Approche monolithique

L'approche monolithique consiste à modéliser, discrétiser et résoudre d'un seul bloc les différentes équations du problème (cf. équation D.2.3 p. 114). Elle est la plus rigoureuse car elle est caractérisée par un couplage naturellement conservatif au niveau de l'interface. Effectivement, la continuité de l'interface et le principe d'action-réaction sont respectés à chaque instant de couplage. Cependant, il est préférable de discrétiser le problème fluide et le problème structure de la même manière, c.-à-d. en utilisant soit la méthode des volumes finis [Papadakis, 2008], soit la méthode des éléments finis [Etienne *et al.*, 2006], [Dettmer et Perić, 2007] et [Saksono *et al.*, 2007] (pour ne citer que les plus classiques) afin de faciliter l'implémentation et la résolution. Or, chacune de ces méthodes est particulièrement adaptée à l'un ou l'autre de ces milieux et difficilement applicable à l'autre dans le cas de modélisations complexes (écoulements turbulents, grandes déformations de la structures, etc.). De plus, la vitesse de l'interface devient une inconnue supplémentaire. Or, cette vitesse rentre en jeu de manière non-linéaire dans les termes de convection fluide. L'expression de l'opérateur de couplage devient donc particulièrement difficile à mettre en œuvre dans le cadre d'un couplage monolithique. Le domaine d'application de cette méthode est donc fortement restreint.

En outre, la résolution d'un très grand nombre d'inconnues de nature différente<sup>4</sup> posent de nombreux problèmes numériques (cf. équation D.3.1 pour un exemple de système matriciel obtenu par une approche monolithique, un autre exemple peut être trouvé dans [Dettmer et Perić, 2008]), ce qui entraîne une forte complexité du code et des difficultés à le maintenir, le modifier ou le généraliser [Cervera *et al.*, 1996]. Il est cependant possible de trouver des exemples [Hübner *et al.*, 2004], [Heil, 2004], [Dunne et Rannacher, 2006], [Bungartz et Schäfer, 2006], [Degroote *et al.*, 2009], [Wick, 2011] qui peuvent servir de référence pour la deuxième méthode : l'approche partitionnée.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{/\xi^f} & \mathcal{M}_{/\xi^m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{/\xi^f} & \mathcal{F}_{/\xi^m} & \mathcal{F}_{/\delta^\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{P}_{f/\xi^f} & \mathcal{P}_{f/\xi^m} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_{f/\lambda^\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_{s/\delta^\Gamma} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_{s/\xi^s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{R}_{/\lambda^\Gamma} & \mathcal{R}_{/\xi^s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^f \\ \xi^m \\ \delta^\Gamma \\ \lambda^\Gamma \\ \xi^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3.1})$$

4. Pour une simulation correcte en hydrodynamique navale, il faut résoudre les champs fluides (pression, vitesse, variables des modèles de turbulence), la cinématique de la structure mais également la cinématique du domaine fluide.

### D.3.1.2 Approche partitionnée

L'approche partitionnée (ou approche de couplage de codes [Sigrist, 2014]) consiste à utiliser trois solveurs différents : un pour le fluide, un pour la déformation du domaine fluide et un pour la structure. Elle peut s'appuyer sur différentes formulations (équation (D.2.6), équation (D.2.7) ou équation (D.2.8)). Dans la suite de cette section, ce sont uniquement le solveur fluide et le solveur structure qui sont réellement étudiés. En effet, le solveur de modification de maillage a un rôle particulier et est très souvent intégré au solveur fluide.

Ce couplage de codes permet d'utiliser des méthodes numériques adaptées à chacun des milieux (cf. section A.3 p. 18). Cependant, le couplage n'est plus naturellement conservatif car le principe d'action-réaction ou la continuité de l'interface ne sont plus intrinsèquement respectés. Des méthodes itératives doivent donc être utilisées afin de garantir qu'il n'y ait ni conservation ni destruction de l'énergie au niveau de l'interface fluide-structure.

L'approche partitionnée peut être divisée en catégories et sous catégories. Quelques unes de ces catégories sont présentées à la figure D.3.1. Tout d'abord, il est possible de distinguer les méthodes algébriques des méthodes différentielles.

Le principe générale des méthodes algébriques consiste à représenter les équations de couplage (continuité de la cinématique et principe d'action-réaction) par le biais de contraintes algébriques. Pour que le problème soit correctement résolu, il est nécessaire de minimiser ces contraintes. Les algorithmes d'optimisation sous contraintes peuvent donc être utilisés. Par exemple, les méthodes de pénalisation<sup>5</sup> peuvent être envisagées. Cependant, il est nécessaire d'évaluer un facteur de pénalisation adapté à chacune des situations traitées. Par conséquent, ces méthodes sont difficiles à utiliser dans un cadre général. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est un autre exemple des méthodes algébriques. Elle introduit des inconnues supplémentaires pour chaque degré de liberté de l'interface et est difficilement applicable pour un couplage partitionné (mais reste tout à fait valable pour un couplage monolithique) car le respect des équations de couplage n'est plus assuré et passe par une interface fictive [Jürgens, 2009]. La très grande majorité des algorithmes de couplage partitionné s'appuie donc sur des méthodes dites différentielles car elles sont plus intuitives et plus simples à utiliser.

Les méthodes différentielles consistent à transférer uniquement des informations physiques (cinématique et effort) à travers l'interface fluide-structure et à imposer directement les équations de couplage. C'est pour cette raison qu'elles sont également nommées « Direct-Force Motion Transfert » (DFMT) [Kassiotis, 2009]. Au sein des méthodes différentielles, les méthodes séquentielles regroupent les algorithmes dits explicites (couplage faible), alors que les méthodes dites itératives regroupent les algorithmes de couplage dits implicites (couplage fort)<sup>6</sup>.

Les méthodes explicites peuvent produire ou dissiper de l'énergie au niveau de l'interface à cause du décalage temporel et de la non-linéarité du problème. Il est donc préférable de s'orienter vers des méthodes itératives afin de garantir la conservation de l'énergie. Au contraire des méthodes explicites, les méthodes implicites nécessitent des itérations de couplages, ce qui peut entraîner des surcoûts de calcul conséquents. Afin de limiter ces surcoûts, différentes méthodes itératives peuvent être envisagées comme celles de Jacobi, de Gauss-Seidel ou de Newton par exemple.

De manière générale, la méthode de Jacobi n'offre aucun avantage particulier en matière de vitesse de convergence ou de simplicité de mise en œuvre par rapport à la méthode de Gauss-Seidel si ce n'est qu'elle est facilement parallélisable. La méthode de Newton offre une vitesse de convergence plus importante que les autres méthodes citées précédemment mais demande d'évaluer de manière exacte ou approchée la matrice Jacobienne du problème. Cette matrice est difficile à évaluer quel que soit la méthode de couplage envisagée (partitionné ou monolithique). Il a donc été choisi d'utiliser un algorithme itératif de type Gauss-Seidel. Cependant, le couplage fluide-structure est réalisé à un moment adéquat de la résolution du problème afin de limiter le surcoût de temps de calcul (cf. section D.3.4 p. 128).

5. Les méthodes de pénalisation consistent à transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un problème d'optimisation sans contraintes en incluant les contraintes à respecter dans la fonction à minimiser (problème d'optimisation) par le biais d'un facteur de pénalisation. Si ce facteur est faible, il n'est pas certain que les contraintes soient totalement respectées. Au contraire, lorsque ce facteur est élevé, la solution trouvée peut être différente de l'optimum réel.

6. Pour des raisons très différentes, certains algorithmes sont également appelés « semi-implicites ». Cette dernière dénomination ne fait pas directement référence à l'algorithme de couplage mais plutôt à la résolution d'une partie ou de la totalité des milieux élémentaires [Piperno *et al.*, 1995] (cf. section D.5.3 p. 158). Ils peuvent donc être classés parmi les algorithmes de couplage explicites.

Avant de passer à la description de l'algorithme de couplage partitionné utilisé, les opérateurs de Steklov-Poincaré du fluide et l'opérateur de Poincaré-Steklov de la structure sont explicités.

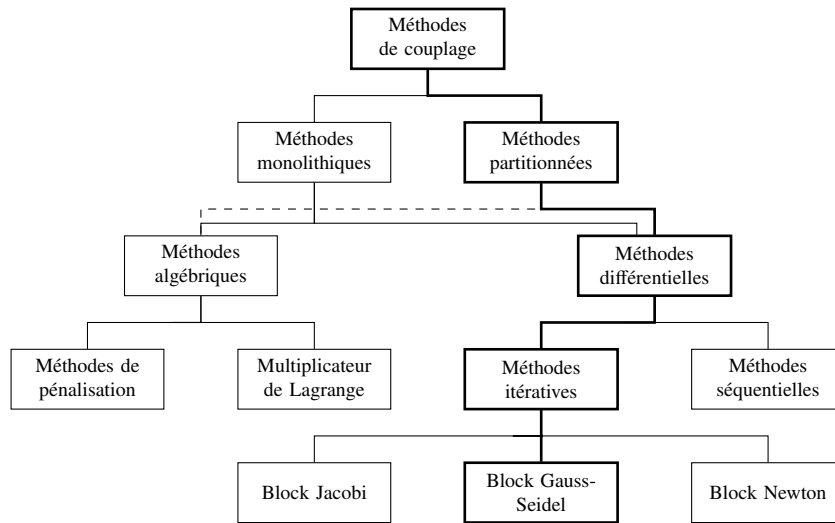


Figure D.3.1 : Différentes méthodes de couplage fluide-structure [Jürgens, 2009]

### D.3.2 Description des opérateurs élémentaires et composés

#### D.3.2.1 Introduction

La définition précise des opérateurs de Steklov-Poincaré du fluide et Poincaré-Steklov de la structure sont importantes car elles impactent directement sur les caractéristiques de l'algorithme de couplage. Ces opérateurs sont généralement non-linéaires. Par conséquent ils nécessitent d'être résolus par des méthodes itératives. La résolution de ces non-linéarités possède une très grande influence sur les temps de simulation. Il est ainsi nécessaire de différencier 3 types d'itérations :

- $n$  : itération temporelle ;
- $i$  : itération de couplage fluide-structure ;
- $k$  : résolution non-linéaire interne (fluide ou structure).

Les opérateurs fluide et structure introduits à la section D.2 p. 113 sont constitués de différents opérateurs. Plus précisément, il y a trois opérateurs élémentaires (un pour la structure et deux pour le fluide) et deux opérateurs de projection-restriction des informations au niveau de l'interface. Le problème fluide est composé de deux opérateurs élémentaires du fait de la formulation ALE : un opérateur de modification de maillage et un opérateur de résolution des équations de Navier-Stokes.

Cette section a pour objectif d'explicitier clairement les opérations réalisées derrière les opérateurs de Steklov-Poincaré du fluide et de Poincaré-Steklov de la structure. Ces opérations sont rarement explicitées dans la littérature.

#### D.3.2.2 Opérateurs représentatifs du problème fluide

Dans cette section, il est proposé de présenter deux opérateurs de résolution du problème fluide. Le premier tire sa source de la définition classique de l'opérateur de Steklov-Poincaré. Le second est une version modifiée du premier. Il est utilisé pour diminuer les temps de simulation.

L'opérateur classique de Steklov-Poincaré du problème fluide est d'abord présenté. Il est caractérisé par la présence d'une boucle interne de résolution des non-linéarités du problème fluide. A chaque itération de couplage, ces non-linéarités sont donc parfaitement résolues. Les algorithmes de couplage explicites ou les algorithmes

de couplage utilisant des solveurs industriels utilisent cet opérateur dans la majorité des cas. Il représente donc une boucle de résolution temporelle (cf. figure B.2.2 p. 43).

Les travaux présentés ici utilisent un opérateur de Steklov-Poincaré modifié car il ne comporte pas cette boucle interne. La résolution des non-linéarités du problème fluide est réalisée en même temps que les itérations de couplage. Ainsi, les non-linéarités du problème fluide et celles du problème fluide-structure couplé sont résolues en même temps. Il est cependant nécessaire d'utiliser un algorithme de couplage implicite pour que la résolution de l'ensemble des non-linéarités fluides soit effective. Des explications plus précises sont données à la section D.3.4 p. 128.

Il est rappelé que l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème fluide  $S_f$  est de la forme (cf. équation D.2.5 p. 114) :

$$S_f = \mathcal{P}_f \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M} \quad (\text{D.3.2})$$

où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur fluide élémentaire (résolution des équations de Navier-Stokes),  $\mathcal{M}$  et l'opérateur de modification du domaine fluide (formulation ALE) et  $\mathcal{P}_f$  l'opérateur de projection-restriction sur la frontière.

### D.3.2.2.1 Opérateur classique

La présentation de l'opérateur  $S_f$  est réalisée par l'algorithme (D.3.1 page suivante). Les lignes correspondantes aux trois étapes élémentaires sont les suivantes :

- lignes 8 à 9 : modification du domaine fluide par application de la cinématique de l'interface ;
- lignes 10 à 14 : résolution non-linéaire du problème fluide en formulation ALE ;
- ligne 16 : évaluation des efforts à l'interface.

L'algorithme (D.3.1 page suivante) correspond à la mise en place d'un couplage implicite avec une formulation en effort. Il doit être adapté dans le cas contraire. Par exemple, pour un couplage implicite avec une formulation en cinématique, les termes  $\delta^r|_n^{i+1}$  deviennent  $\delta^r|_n^i$  car c'est la cinématique de l'interface à l'itération de couplage précédente qui est connue et non pas celle évaluée à l'itération de couplage courante comme lorsqu'une formulation en effort est utilisée (cf. section D.3.3.3 p. 124). Autre exemple, pour un algorithme explicite avec prédicteur de cinématique, la dernière ligne devient (d'autres modifications sont également nécessaires) :

$$\mathcal{P}_f(\xi^f|_{n+1}, \xi^m|_{n+1}, \mathcal{A}^f|_{n+1}) = 0 \quad (\text{D.3.3})$$

### D.3.2.2.2 Opérateur linéarisé

La présentation de l'opérateur  $S_f^*$  est réalisée par l'algorithme (D.3.2 page suivante). Cet opérateur représente une itération de résolution non-linéaire du problème fluide (cf. figure B.2.2 p. 43). Par conséquent, il peut être considéré comme étant l'opérateur  $S_f$  linéarisé. Les lignes correspondantes aux trois étapes élémentaires sont les suivantes :

- lignes 5 à 6 : résolution du domaine fluide par application de la cinématique de l'interface ;
- lignes 7 à 8 : réalisation d'une itération non-linéaire du problème fluide en formulation ALE ;
- lignes 9 : évaluation des efforts à l'interface.

De nouveau, l'algorithme (D.3.2 page suivante) correspond à la mise en place d'un couplage implicite avec une formulation en effort. Dans les autres cas, il doit être adapté de manière identique à l'opérateur classique (changement des indices).

---

<b>Données :</b> $i, n, \delta^\Gamma _n^{i+1}$	
<b>Résultat :</b> $\lambda^f _n^{i+1}$	
1 $k \leftarrow 0$	Initialisation
2 <b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	Nouvelle itération temporelle
3 $\xi^m _n \leftarrow \xi^m _{n-1}$	
4 $\xi^f _n^k \leftarrow \xi^f _{n-1}$	
5 <b>sinon</b>	Nouvelle itération de couplage
6 $\xi^f _n^k \leftarrow \xi^f _n^{i-1}$	
7 <b>fin</b>	
8 $\mathcal{M} _n^{i+1} \leftarrow \xi^m _n^i$	Construction de $\mathcal{M}$
9 $\mathcal{M} _n^{i+1} (\delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}) = 0$	Résolution de l'état du domaine fluide
10 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la résolution non-linéaire
11 $\mathcal{F} _n^{k+1} \leftarrow \delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \xi^f _n^k$	Construction de $\mathcal{F}$
12 $\mathcal{F} _n^{k+1} (\delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \xi^f _n^{k+1}) = 0$	Résolution de l'état du fluide
13 $k \leftarrow k + 1$	Prochaine itération non-linéaire
14 <b>fin</b>	
15 $\xi^f _n^{i+1} \leftarrow \xi^f _n^k$	Sauvegarde des données
16 $\mathcal{P}_f(\xi^f _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \lambda^f _n^{i+1}) = 0$	Évaluation des efforts (projection)

---

**Algorithme D.3.1 :** Opérateur de Steklov-Poincaré du fluide

---

<b>Données :</b> $i, n, \delta^\Gamma _n^{i+1}$	
<b>Résultat :</b> $\lambda^f _n^{i+1}$	
1 <b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	Nouvelle itération temporelle
2 $\xi^m _n \leftarrow \xi^m _{n-1}$	
3 $\xi^f _n \leftarrow \xi^f _{n-1}$	
4 <b>fin</b>	
5 $\mathcal{M} _n^{i+1} \leftarrow \xi^m _n^i$	Construction de $\mathcal{M}$
6 $\mathcal{M} _n^{i+1} (\delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}) = 0$	Résolution de l'état du domaine fluide
7 $\mathcal{F} _n^{i+1} \leftarrow \delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \xi^f _n^i$	Construction de $\mathcal{F}$
8 $\mathcal{F} _n^{i+1} (\delta^\Gamma _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \xi^f _n^{i+1}) = 0$	Résolution de l'état du fluide (1 itération)
9 $\mathcal{P}_f(\xi^f _n^{i+1}, \xi^m _n^{i+1}, \lambda^f _n^{i+1}) = 0$	Évaluation des efforts (projection)

---

**Algorithme D.3.2 :** Opérateur linéarisé de Steklov-Poincaré du fluide

### D.3.2.3 Opérateurs représentatifs du problème structure

Au contraire du problème fluide, un opérateur de Poincaré-Steklov non-linéarisé est utilisé pour la résolution du problème structure car le temps de calcul des non-linéarités est nettement moins pénalisant en termes de temps de simulation du fait du faible nombre de variables utilisées dans les applications ciblées.

Cet opérateur est noté  $\mathcal{S}_s^{-1}$  et son expression est présentée à l'algorithme (D.3.3). Cet algorithme correspond également à la mise en place d'un couplage implicite avec une formulation en effort. Par conséquent, il doit être adapté dans le cas contraire.

<b>Données :</b> $i, n, \lambda^\Gamma _n$	
<b>Résultat :</b> $\delta^\Gamma _n^{i+1}$	
1 $k \leftarrow 0$	Initialisation
2 <b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	Nouvelle itération temporelle
3 $\xi^s _n^k \leftarrow \xi^s _{n-1}$	
4 <b>sinon</b>	Nouvelle itération de couplage
5 $\xi^s _n^k \leftarrow \xi^s _n^{i-1}$	
6 <b>fin</b>	
7 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la résolution non-linéaire
8 $\mathcal{R} _n^{k+1} \leftarrow \lambda^\Gamma _n, \xi^s _n^k$	Construction de $\mathcal{R}$
9 $\mathcal{R} _n^{k+1}(\lambda^\Gamma _n, \xi^s _n^{k+1}) = 0$	Résolution de l'état de la structure
10 $k \leftarrow k + 1$	Prochaine itération non-linéaire
11 <b>fin</b>	
12 $\xi^s _n^{i+1} \leftarrow \xi^s _n^k$	Sauvegarde des données
13 $\mathcal{P}_s(\xi^s _n^{i+1}, \delta^\Gamma _n^{i+1}) = 0$	Évaluation de l'état de l'interface (projection)

**Algorithme D.3.3 :** Opérateur de Poincaré-Steklov de la structure

### D.3.3 Les algorithmes de couplage classiques

Cette section présente quelques uns des algorithmes de couplage classiques afin de faciliter la présentation de l'algorithme utilisé. Le couplage explicite (et plus précisément explicite synchrone) avec et sans prédicteur sont présentés car il permettent d'introduire l'algorithme implicite de type Gauss-Seidel par blocs. Une discussion sur ce dernier algorithme est finalement proposée.

Les équations importantes du problème sont rappelées ci-dessous avec dans l'ordre : continuité de la cinématique (cf. équation D.3.4), principe d'action-réaction (cf. équation D.3.5) et problème d'interaction fluide-structure sous une formulation de type point-fixe en cinématique (cf. équation D.3.6) et en effort (cf. équation D.3.7).

$$\delta^s = \delta^f = \delta^\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{D.3.4})$$

$$\lambda^s + \lambda^f = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{D.3.5})$$

$$\mathcal{S}_s^{-1}(-\mathcal{S}_f(\delta^\Gamma)) = \delta^\Gamma \quad (\text{D.3.6})$$

$$\mathcal{S}_f(\mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma)) = -\lambda^\Gamma \quad (\text{D.3.7})$$

### D.3.3.1 Algorithme explicite élémentaire

L'algorithme explicite élémentaire est très intuitif. Il est appelé « Conventional Serial Staggered » (CSS) [Farhat *et al.*, 2006]. Il peut utiliser une formulation en effort ou en cinématique. Pour une formulation en effort, il peut se présenter sous les formes suivantes :

$$\lambda^\Gamma|_{n+1} = -S_f(S_s^{-1}(\lambda^\Gamma|_n)) \quad \equiv \quad \begin{cases} \delta^\Gamma|_{n+1} = S_s^{-1}(\lambda^\Gamma|_n) \\ \lambda^\Gamma|_{n+1} = -S_f(\delta^\Gamma|_{n+1}) \end{cases} \quad (D.3.8)$$

Cet algorithme peut également se mettre sous une formulation en cinématique non équivalente à la formulation en effort du fait du décalage temporel. Dans ce cas, il peut se présenter sous les formes suivantes :

$$\delta^\Gamma|_{n+1} = S_s^{-1}(-S_f(\delta^\Gamma|_n)) \quad \equiv \quad \begin{cases} \lambda^\Gamma|_{n+1} = S_f(\delta^\Gamma|_n) \\ \delta^\Gamma|_{n+1} = S_s^{-1}(-\lambda^\Gamma|_{n+1}) \end{cases} \quad (D.3.9)$$

Ces algorithmes consistent à utiliser les données du pas de temps courant pour évaluer la configuration au pas de temps suivant. Par exemple, dans le cas d'une formulation en cinématique, les efforts fluides au pas de temps courant sont appliqués sur la structure afin d'évaluer la cinématique de l'interface au pas de temps suivant. Le problème fluide est ainsi résolu avec cette nouvelle information. Ensuite, les différents solveurs passent au pas de temps suivant. Aucun retour d'information n'est effectué entre les deux solveurs ce qui rend très facile son implémentation (cf. figure D.3.2 et algorithme G.3.1 p. 345 en annexe).

Ces algorithmes possèdent un ordre de précision inférieur à celui du plus faible des solveurs utilisés [Piperno et Farhat, 2001] et dissipent ou produisent de l'énergie au niveau de l'interface ce qui les rend très instables dans des situations où le couplage physique est fort. Des résultats de référence peuvent être trouvés dans [Förster *et al.*, 2007], [Longatte *et al.*, 2009], [Kassiotis, 2009].

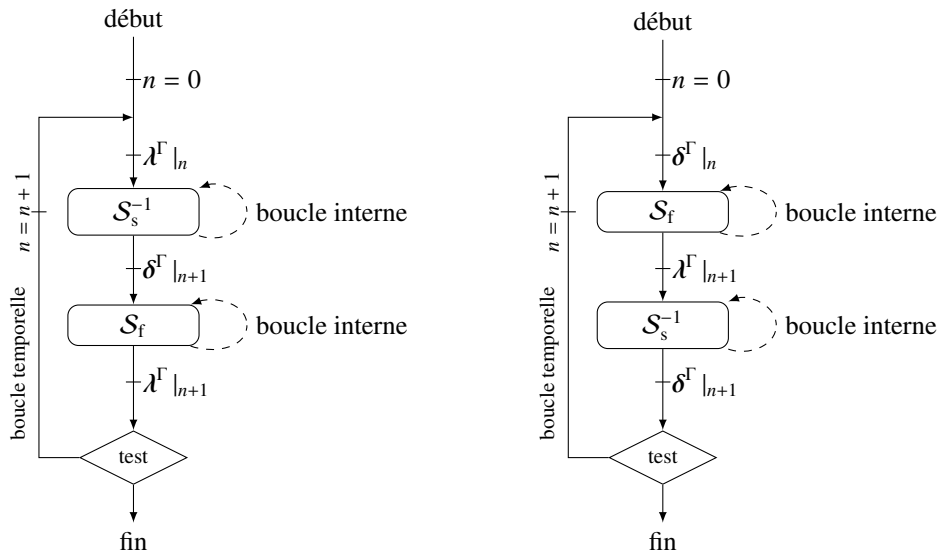


Figure D.3.2 : CSS – Formulation en effort (gauche) et en cinématique (droite)

### D.3.3.2 Algorithme explicite avec prédicteur de cinématique

L'algorithme précédent souffre d'un décalage temporel important (cf. équation D.3.8) qui peut simplement être évité par l'ajout d'un prédicteur en cinématique noté  $\mathcal{P}$ . Par la suite, la prédiction de la cinématique de l'interface est notée  $\delta^p$ . Cette fois-ci, cet algorithme s'appuie sur une formulation en cinématique et est appelé

« Generalized Serial Staggered » (GSS) [Farhat *et al.*, 2006]. Il peut se présenter sous les formes suivantes :

$$\delta^\Gamma|_{n+1} = S_s^{-1}(-S_f(\delta^P|_{n+1})) \quad \equiv \quad \begin{cases} \delta^P|_{n+1} = \mathcal{P}(\delta^\Gamma|_n, \delta^\Gamma|_{n-1}, \dots) \\ \lambda^\Gamma|_{n+1} = S_f(\delta^P|_{n+1}) \\ \delta^\Gamma|_{n+1} = S_s^{-1}(-\lambda^\Gamma|_{n+1}) \end{cases} \quad (D.3.10)$$

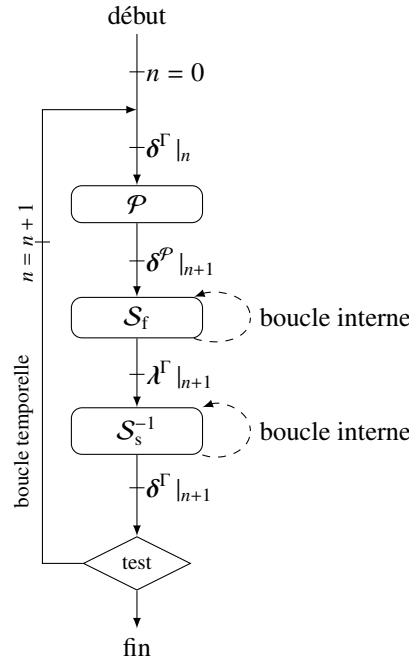


Figure D.3.3 : GSS – Formulation en cinématique

Le prédictor en cinématique dépend principalement de l'ordre du schéma d'intégration temporelle du problème structure. Contrairement aux algorithmes précédents, il est possible de vérifier l'erreur commise à chaque pas de temps en comparant l'énergie reçue par le fluide et celle reçue par la structure au niveau de l'interface [Piperno et Farhat, 1997], [Kassiotis, 2009].

En théorie, il est également possible de mettre en place ce type d'algorithme avec une formulation en effort, c.-à-d. utiliser un prédictor d'effort. Cependant, ce type d'approche paraît plus difficile à mettre en place. En effet, les efforts fluides peuvent présenter des variations brutales et importantes pour des raisons physiques et/ou numériques. Il serait donc nécessaire de mettre en place une méthode de « lissage » des efforts pour pouvoir prédire correctement les efforts fluides. Au contraire, la position de l'interface est moins assujettie à ces oscillations du fait de la double intégration réalisée lors du passage de l'accélération (des efforts) à la position.

L'utilisation de cet algorithme explicite ne permet pas de garantir la conservation de l'énergie tout au long du processus de simulation. Ceci pose problème dans le domaine de l'hydrodynamique navale car cette énergie est rarement négligeable vis-à-vis de l'énergie des systèmes considérés. De plus, le caractère explicite de cet algorithme peut créer des problèmes de stabilité à cause du phénomène de masse ajoutée (cf. section D.5 p. 141). Il est donc nécessaire de mettre en place des algorithmes implicites pour garantir la conservation de l'énergie au niveau de l'interface fluide-structure (cf. figure D.3.3 et algorithme G.3.2 p. 345 en annexe).



### D.3.3.3 Algorithme de Gauss-Seidel par blocs

La méthode de Gauss-Seidel par blocs est une méthode implicite qui, avec une formulation en effort, peut se présenter sous les formes suivantes (cf. annexe G.4.1 p. 348) :

$$\lambda^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} = -S_f \left( S_s^{-1} \left( \lambda^{\Gamma}_{|n+1}{}^i \right) \right) \quad \equiv \quad \begin{cases} \delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} = S_s^{-1} \left( \lambda^{\Gamma}_{|n+1}{}^i \right) \\ \lambda^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} = -S_f \left( \delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} \right) \end{cases} \quad (D.3.11)$$

Avec une formulation en cinématique, elle peut se présenter sous les formes suivantes :

$$\delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} = S_s^{-1} \left( -S_f \left( \delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^i \right) \right) \quad \equiv \quad \begin{cases} \lambda^f_{|n+1}{}^{i+1} = S_f \left( \delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^i \right) \\ \delta^{\Gamma}_{|n+1}{}^{i+1} = S_s^{-1} \left( -\lambda^f_{|n+1}{}^{i+1} \right) \end{cases} \quad (D.3.12)$$

Les itérations temporelles et les itérations implicites sont respectivement notées  $n$  et  $i$ . Ces algorithmes sont appelés DFMT-BGS (« Direct-Force Motion Transfert Block Gauss Seidel ») [Kassiotis, 2009] mais il est possible de les trouver sous d'autres appellations : algorithme partitionné implicite ou partitionné itératif [Causin *et al.*, 2005], [Longatte *et al.*, 2009], [Placzek *et al.*, 2009], [Löhner *et al.*, 2006], algorithme partitionné fortement couplée [De Nayer *et al.*, 2012], algorithme itératif par blocs [Cervera *et al.*, 1996], [Tezduyar *et al.*, 2006b], [Wall *et al.*, 2006b] ou algorithme de couplage de type Dirichlet-Neumann (D-N) [Causin *et al.*, 2005], [Küttler et Wall, 2008]. Dans bien d'autres cas, cet algorithme n'est pas explicitement nommé.

La méthode de Gauss-Seidel par blocs doit être réalisée de manière séquentielle comme le montre la figure D.3.4 ou les algorithmes G.3.3 p. 346 et G.3.4 p. 346 en annexe). Ceci empêche de paralléliser l'algorithme de couplage. Afin de palier ce problème, une formulation de type Steklov-Poincaré peut être utilisée. Cependant, la section D.2 p. 113 a montré que le solveur structure doit alors être utilisé de manière non-conventionnelle. En restant sous une formulation de type point-fixe, la méthode itérative de type Jacobi par blocs peut être employée. Cette méthode converge moins rapidement que la méthode itérative de type Gauss-Seidel par blocs et n'est réellement avantageuse que lorsque la partie fluide et la partie structure nécessitent des temps de calcul ayant des ordres de grandeur identiques et/ou que les termes de couplage restent négligeables [Cervera *et al.*, 1996]. Cette dernière raison explique sa très faible utilisation à l'heure actuelle mais elle pourrait à l'avenir prendre de l'ampleur pour des applications spécifiques. Les algorithmes de couplage fluide-structure implicites couramment utilisés à l'heure actuelle se basent principalement sur une méthode itérative de type Gauss-Seidel par blocs. Ils sont donc séquentiels dans la très grande majorité des cas.

De manière identique à l'algorithme GSS, un prédicteur en cinématique est souvent utilisé afin d'éviter un décalage temporel dès la première itération de couplage. Grâce à ce procédé, le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une solution convergée est réduit.

Pour résumer, cet algorithme consiste simplement à itérer un certain nombre de fois l'algorithme GSS jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. Le problème de type point-fixe (cf. équation D.3.6 p. 121) est donc résolu à chaque pas de temps ce qui offre un gain non-négligeable vis-à-vis de la stabilité car la conservation de l'énergie au niveau de l'interface fluide-structure est assurée. Cependant, la nature itérative de cet algorithme peut entraîner des temps de calcul prohibitifs pour des applications industrielles. De surcroît, l'effet de masse ajoutée peut toujours provoquer une divergence de l'algorithme de couplage (cf. section D.5.4 p. 159). Différents moyens doivent donc être mis en œuvre afin de diminuer les temps de simulation et améliorer la stabilité.

### D.3.3.4 Accélération de l'algorithme de Gauss-Seidel par blocs

#### D.3.3.4.1 Généralités

L'algorithme de Gauss-Seidel par blocs peut nécessiter des temps de calcul très importants pour plusieurs raisons. La principale raison est intrinsèque à cet algorithme. De manière simplifiée, il est possible de dire qu'il est  $i$  fois plus coûteux que l'algorithme GSS si  $i$  itérations implicites sont nécessaires pour atteindre un état convergé. Plusieurs moyens peuvent être mis en place pour limiter ce nombre d'itérations implicites.

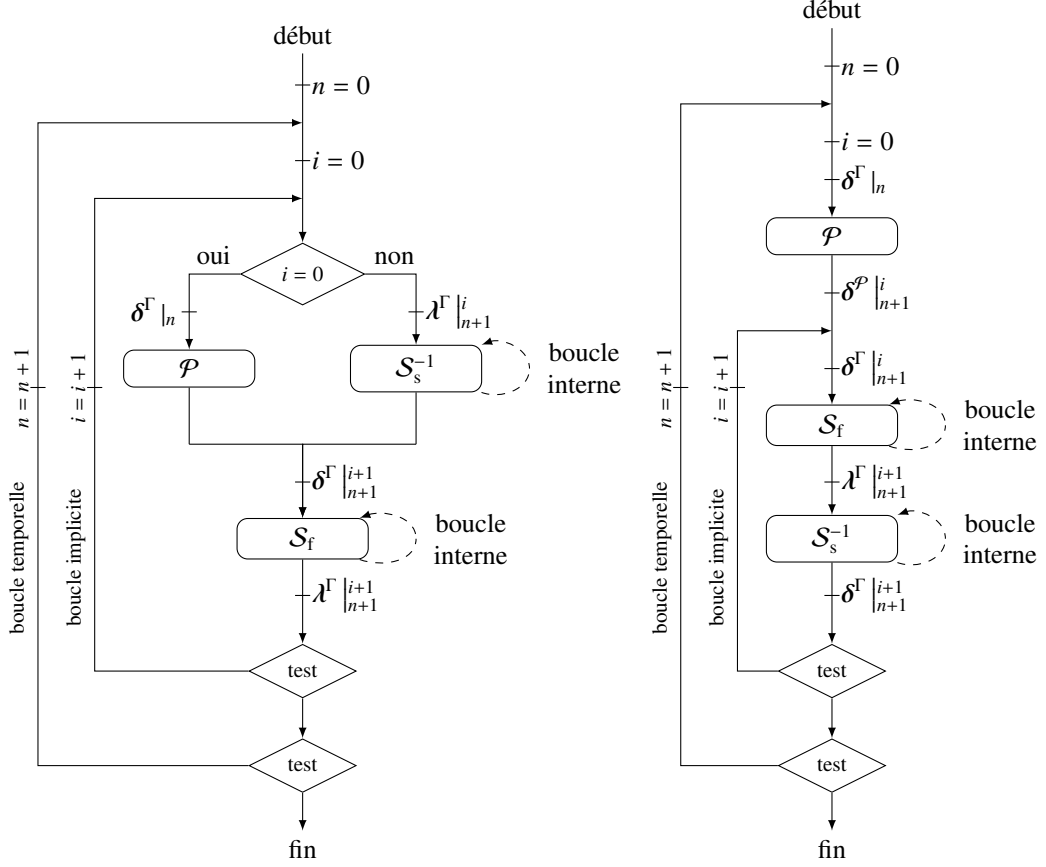


Figure D.3.4 : DFMT-BGS avec prédicteur – Formulation en effort (gauche) et en cinématique (droite)

Avant toute chose, il est important de remarquer que plus la prédiction de la cinématique de l'interface est bonne, moins il est nécessaire d'itérer [Kassiotis, 2009], [Yvin, 2010]. Un prédicteur d'ordre élevé est donc indispensable. Classiquement, des prédicteurs d'ordre 2 en temps sont utilisés.

Une deuxième possibilité est de modifier la vitesse de convergence par diverses méthodes : relaxation simple, algorithme d'Aitken<sup>7</sup> ou méthode de Newton par exemple. Dans le cas d'une formulation en cinématique, la mise en place de ces techniques consistent à modifier la cinématique obtenue à la fin d'une itération implicite de la manière suivante :

$$\delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = \delta^\Gamma|_{n+1}^i + \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}^\Gamma|_{n+1}^i \quad \text{où} \quad \mathbf{r}^\Gamma|_{n+1}^i = \delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} - \delta^\Gamma|_{n+1}^i \quad (\text{D.3.13})$$

$\mathbf{H}$  est l'opérateur dont le rôle est d'augmenter la vitesse de convergence et/ou la stabilité du schéma de couplage. Cet opérateur est la matrice identité dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel par blocs classique. Cette méthode possède un ordre de convergence théorique de 1. Afin d'améliorer la stabilité du schéma, il est possible de multiplier cette matrice identité par un coefficient de relaxation noté  $\alpha$  et compris entre 0 et 1 exclus (cf. équation D.3.14). Cependant, cette méthode est connue pour diminuer de manière importante la vitesse de convergence [Gerbeau et Vidrascu, 2003]. Dans de rares cas, un coefficient de relaxation légèrement supérieur à 1 peut être utilisé afin d'augmenter la vitesse de convergence. Cependant, la stabilité du schéma de couplage est fortement diminuée.

$$\delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = \delta^\Gamma|_{n+1}^i + \alpha \cdot \mathbf{r}^\Gamma|_{n+1}^i \quad (\text{D.3.14})$$

7. Alexander Aitken (1895-1967) est un mathématicien néo-zélandais.

#### D.3.3.4.2 Accélération d'Aitken

Si les résultats des deux itérations précédentes sont connus, la technique d'Aitken (technique d'accélération également appelée méthode des sécantes ou méthode  $\Delta^2$  [Gallinger et Bletzinger, 2010]) peut être utilisée. Elle consiste à modifier de manière dynamique le coefficient de relaxation (cf. équation D.3.16) en appliquant la méthode dite des sécantes [Küttler et Wall, 2008]. Le point fort de cette méthode est qu'elle n'est pas intrusive, c.-à-d. qu'il n'est pas nécessaire de modifier le solveur fluide ou le solveur structure.

$$\delta^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i+1} = \delta^{\Gamma} \big|_{n+1}^i + \alpha \big|_{n+1}^i \cdot \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^i \quad (\text{D.3.15})$$

$$\alpha \big|_{n+1}^i \left( \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} - \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^i \right) = \alpha \big|_{n+1}^{i-1} \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} \quad (\text{D.3.16})$$

Cette méthode est bien connue pour les problèmes à une dimension<sup>8</sup> mais plusieurs questions se posent pour des problèmes multi-dimensionnels comme c'est le cas ici. Premièrement, la division nécessite de passer par le vecteur inverse pour pouvoir être évaluée (cf. équation D.3.17). Cela revient à projeter la méthode des sécantes dans la direction  $\mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} - \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^i$  [Küttler et Wall, 2008].

$$\alpha \big|_{n+1}^i = \alpha \big|_{n+1}^{i-1} \frac{\mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} \cdot \left( \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} - \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^i \right)}{\left\| \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^{i-1} - \mathbf{r}^{\Gamma} \big|_{n+1}^i \right\|^2} \quad (\text{D.3.17})$$

D'autres questions peuvent également se poser à propos du coefficient de relaxation :

- Doit-il être identique pour chaque degré de liberté ?
- Comment l'initialiser de manière efficace ?
- Doit-il être borné et, si oui, quelles sont ces bornes ?
- Que faire lorsque la différence des résidus est faible (division par 0) ?

Concernant l'utilisation de coefficients d'Aitken par degré de liberté, quelques éléments d'analyse peuvent être trouvés [Weghs, 2010]. Ce coefficient de relaxation peut également être initialisé comme étant le maximum de la valeur finale du pas de temps précédent et d'une valeur arbitraire [Kassiotis, 2009]. Malgré ces questions non résolues de manière précise (notamment l'expression des bornes qui, jusqu'à maintenant, n'est qu'arbitraire [Lorentzon, 2009]), la méthode de relaxation par la méthode d'Aitken semble donner des résultats satisfaisants pour une implémentation relativement simple [Wüchner *et al.*, 2006], [Wall *et al.*, 2006a] [Küttler et Wall, 2008], [Lorentzon, 2009], [Kassiotis, 2009], [Yvin, 2010], [Pena et Prud'homme, 2010].

Cependant, cette méthode de relaxation repose sur l'hypothèse que les opérateurs  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{S}_s^{-1}$  sont suffisamment réguliers pour que l'approximation géométrique qui en découle soit cohérente (méthode des sécantes). Il est donc nécessaire de, soit résoudre de manière très précise chacun des problèmes, soit se borner à des cas simples.

Cette méthode estime de manière approximative la direction de recherche du problème de Newton. Sa vitesse de convergence est donc supérieure à celle d'une méthode de relaxation à coefficient constant mais inférieure à une méthode dite de Newton dont de l'ordre de convergence est théoriquement quadratique.

#### D.3.3.4.3 Accélération de type Newton

Afin d'appliquer une méthode de type Newton, la matrice Jacobienne du problème doit être évaluée. Cette matrice est notée  $\mathbf{J}$  et peut être évaluée un certain nombre de fois (méthode de Newton-Raphson modifiée) ou à chaque itération de couplage. Cette évaluation peut également être réalisée de manière exacte ou simplifiée. L'expression de la matrice jacobienne est la suivante :

$$\mathbf{J}_{\delta} = \partial_{\delta} \left( \mathcal{S}_s^{-1} \circ (-\mathcal{S}_f(\delta)) \right) - \mathbf{I}_d \quad (\text{D.3.18})$$

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5 $\delta^\Gamma _{n+1}^0 = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^\Gamma _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
6 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
7 $\lambda^f _{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_f(\delta^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème fluide
8 $\tilde{\delta}^\Gamma _{n+1}^i = \mathcal{S}_s^{-1}(-\lambda^f _{n+1}^{i+1})$	Résolution du problème structure
9 $\mathbf{J}_\delta(\Delta\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1}) = -(\tilde{\delta}^\Gamma _{n+1}^i - \delta^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du système linéaire
10 $\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \tilde{\delta}^\Gamma _{n+1}^i + \alpha _{n+1}^i \Delta\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1}$	Actualisation de l'interface
11 $i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
12 <b>fin</b>	
13 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
14 $t \leftarrow t + \Delta t$	
15 <b>fin</b>	

**Algorithme D.3.4 :** DFMT-Block Newton – Formulation en cinématique

La prise en compte de la matrice Jacobienne de manière générale est présentée à l'algorithme (D.3.4). L'évaluation et la mise à jour du Jacobien du problème ne sont pas présentées au sein de ce dernier.

Si la matrice Jacobienne est exacte,  $\alpha|_{n+1}^i$  peut être pris égal à 1 [Deparis *et al.*, 2006b] et la méthode utilisée est la méthode classique de Newton. Le coefficient  $\alpha|_{n+1}^i$  peut également être évalué par une technique de recherche de pas afin d'améliorer la convergence et la stabilité du schéma [Deparis *et al.*, 2004].

Il est également rappelé que les opérateurs de Steklov-Poincaré du fluide et les opérateurs de Poincaré-Steklov de la structure sont eux-mêmes composés de différents opérateurs non-linéaires (cf. équation D.2.5 p. 114) ce qui rend difficile et coûteux l'évaluation de la matrice Jacobienne du problème de manière exacte [Dettmer et Perić, 2008], [Heil, 2004] et ceci plus particulièrement du côté fluide. Malgré de nombreuses difficultés, il est possible de trouver des travaux utilisant cette méthode sur des cas de petite taille ou relativement simples physiquement [Fernández et Moubachir, 2004] [Heil, 2004], [Dettmer et Perić, 2007], [Dettmer et Perić, 2008] et [Wick, 2011].

La matrice Jacobienne est très souvent évaluée de manière simplifiée par différentes méthodes qu'on peut regrouper en deux catégories. Dans la première catégorie, la matrice Jacobienne est évaluée de manière approximative soit par différences finies [Matthies et Steindorf, 2002] [Gallinger et Bletzinger, 2010], soit par un algorithme de type GMRES (Generalisation de la Méthode de Minimisation du Résidu) utilisant les propriétés des espaces de Krylov [Deparis *et al.*, 2004], [Weghs, 2010], [Michler *et al.*, 2011] ou, finalement, en utilisant les itérations précédentes [Degroote *et al.*, 2009], [Gallinger et Bletzinger, 2010]. Dans la deuxième catégorie, certaines parties du problème sont simplifiées afin de faciliter l'évaluation de la matrice Jacobienne. Ainsi, il est possible de ne prendre en compte que les effets prépondérants (masse ajoutée) [Gerbeau et Vidrascu, 2003], [Deparis *et al.*, 2004] ou négliger tout simplement certains termes de couplage [Dettmer et Perić, 2008] comme le mouvement du maillage fluide par exemple [Tezduyar *et al.*, 2006a], [Heil, 2004].

Du fait d'une grande complexité de mise en œuvre, les méthodes d'accélération de type Newton restent peu utilisées à l'heure actuelle dans un cadre industriel malgré des vitesses de convergence supérieures à celles obtenues par des algorithmes plus simples comme ceux décrits précédemment. De plus, ces algorithmes sont surtout développés pour des problématiques où les temps de calcul du problème structure et du problème fluide

8. L'ordre de convergence est notamment égal au nombre d'or, soit  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ .

sont d'un même ordre de grandeur car c'est dans ces situations qu'ils sont réellement efficaces : écoulements sanguins, déploiement de parachutes, écoulement dans tuyaux flexibles, etc. Ce type de situation est rarement retrouvé dans le domaine de l'hydrodynamique navale.

En outre, quels que soient les algorithmes de couplage ou les méthodes d'accélération présentés ci-dessus, il est important de remarquer que les non-linéarités de chacun des milieux sont résolues à chaque itération de couplage<sup>9</sup>. Par conséquent, les coûts de calcul peuvent devenir très importants si un problème est fortement non-linéaire. La section suivante présente un algorithme de couplage relativement simple qui prend en compte cette analyse.

### D.3.4 L'algorithme de couplage utilisé

Cette section décrit l'algorithme de couplage utilisé. Au contraire des algorithmes de couplage classiques, il utilise un opérateur de Steklov-Poincaré du domaine fluide qui est linéarisé. La prise en compte du phénomène dit « de masse ajoutée » est, quant à elle, décrite à la section D.5 p. 141.

#### D.3.4.1 Analyse du problème et discussion

Précédemment, il a été montré que les algorithmes de couplage classiques supposent de manière implicite que la résolution des différentes non-linéarités de chacun des milieux soient résolues avant chaque étape (itération) de couplage. Dans le domaine de l'hydrodynamique navale, la résolution totale du problème structure à chaque itération de couplage ne pose pas de problème particulier mais la résolution du problème fluide demande des temps de simulation d'un tout autre ordre de grandeur.

En effet, la résolution du problème fluide représente la très grande majorité du temps de simulation pour plusieurs raisons. La nécessité de discrétiser finement le domaine fluide, la résolution du couplage vitesse-pression et la présence importante de non-linéarités obligent à itérer un certain nombre de fois sur un nombre important de variables avant d'atteindre une solution convergée. Dans le cadre des applications visées par ces travaux, le problème structure demande nettement moins de temps de calcul car le nombre de variables n'est pas aussi important. Ceci est d'autant plus vrai lorsque uniquement des corps rigides sont considérés.

Afin de limiter au maximum le nombre d'itérations du solveur fluide, l'idée principale utilisée dans ces travaux est celle déjà utilisée au sein du solveur ISIS-CFD [Leroyer, 2004]. Cette méthode consiste à réaliser les itérations de couplage fluide-structure au sein des itérations non-linéaires du problème fluide (algorithme de couplage dit non-linéaire), c.-à-d. qu'à chaque itération non-linéaire fluide, une itération de couplage fluide-structure est réalisée. L'opérateur fluide utilisé est ainsi l'opérateur linéarisé (cf. section D.3.2.2.2 p. 119) et il est noté  $S_f^*$ .

Cette considération ne s'applique pas à la résolution du problème structure qui est très rapide en comparaison. L'opérateur de Poincaré-Steklov du problème structure est donc inchangé sans que cela pénalise les temps de résolution. Ainsi, à chaque itération de couplage fluide-structure, la résolution du problème fluide est incomplète alors que la convergence du solveur structure est, quant à elle, atteinte numériquement. Cependant, il est important de remarquer qu'elle n'est pas atteinte d'un point de vue physique car les efforts fluides convergés ne sont toujours pas connus.

Cette approche est difficile à réaliser avec un solveur industriel car il n'est pas toujours possible de communiquer avec eux au cours du processus itératif de résolution du problème fluide<sup>10</sup>. C'est peut-être la raison pour laquelle il existe peu de référence sur cette approche. Cependant, quelques travaux ont été réalisés sur la résolution de l'équation de Burgers couplée avec l'équation d'une interface mobile [Rajaomazava III *et al.*, 2001]. Ces travaux montrent une diminution nette du nombre total d'itérations par rapport à un algorithme de type DFMT-Block Newton.

La situation n'est peut être pas aussi simple lorsque qu'il est dit qu'il existe peu de références sur cette approche. Les opérations qui sont réalisées derrière l'opérateur de Steklov-Poincaré du fluide ne sont pas souvent définies clairement. Cependant, il est peu probable que le problème fluide soit parfaitement résolu lorsque une méthode

---

9. Les opérateurs  $S_f$  et  $S_s^{-1}$  sont rarement linéaires.

10. Ce point limite donc l'utilisation de cet algorithme avec des solveurs fluides permettant cette communication.

d'accélération d'Aitken est utilisée du fait du caractère « géométrique » de cette méthode d'accélération. De manière plus précise, lorsque la méthode de Gauss-Seidel par blocs est utilisée, cela revient à se demander si les non-linéarités sont résolues au sein de chaque bloc ou de manière globale. Dans l'approche proposée ici, seules les non-linéarités du côté structure sont résolues par bloc. Les non-linéarités du côté du fluide sont résolues globalement, c.-à-d. au sein des itérations de couplage. Cette solution a déjà été proposée pour des applications en aéroélasticité [Badia et Codina, 2000] ou la résolution de l'équation de Burgers [Rajaomazava III *et al.*, 2001].

Cet algorithme n'ayant pas de dénomination propre pour l'instant, il sera dénommé DFMT-BGS-IFC (« Direct-Force Motion Transfert - Block Gauss Seidel - Internal Fluid Coupling ») par la suite. Il est également envisageable d'utiliser des méthodes d'accélération de la convergence avec ce type d'algorithme. Cependant, les efforts fluides possèdent souvent un comportement oscillant amorti pendant le processus de résolution des non-linéarités et peuvent également osciller le long d'une ligne moyenne au sein des itérations temporelles. Ceci empêche d'utiliser les méthodes classiques d'accélération de la convergence car elles s'appuient sur une approximation géométrique des différents opérateurs fluide et structure [Kassiotis, 2009].

Il est important de remarquer que, étant donnée sa construction, cet algorithme dépend de la méthode de résolution des non-linéarités du problème fluide. Les propriétés observées lors de ces travaux peuvent donc être différentes avec un solveur fluide différent.

### D.3.4.2 Algorithme DFMT-BGS-IFC

L'algorithme décrit précédemment est présenté sous différentes formes ci-dessous. Il diffère uniquement de l'algorithme DFMT-BGS (cf. section D.3.3.3 p. 124) du fait de l'utilisation d'un opérateur de Steklov-Poincaré linéarisé pour le problème fluide. Cet opérateur est noté  $\mathcal{S}_f^*$  (cf. section D.3.2.2.2 p. 119). Seule la formulation en effort est présentée ci-dessous et en annexe (cf. algorithme G.3.5 p. 347 en annexe).

$$\lambda^\Gamma \Big|_{n+1}^{i+1} = -\mathcal{S}_f^* \left( \mathcal{S}_s^{-1} \left( \lambda^\Gamma \Big|_{n+1}^i \right) \right) \quad \equiv \quad \begin{cases} \delta^\Gamma \Big|_{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_s^{-1} \left( \lambda^\Gamma \Big|_{n+1}^i \right) \\ \lambda^\Gamma \Big|_{n+1}^{i+1} = -\mathcal{S}_f^* \left( \delta^\Gamma \Big|_{n+1}^{i+1} \right) \end{cases} \quad (\text{D.3.19})$$

### D.3.4.3 Note sur la prédiction de la cinématique

Au sein des présents travaux, la prédiction de la cinématique est donnée par le solveur structure. Cependant, cette prédiction est différente de la prédiction utilisée au sein même de ce solveur structure lors de l'initialisation de la solution au pas de temps courant. En effet, à la première itération de couplage, ce solveur structure est itéré jusqu'à convergence comme cela se fait aux itérations suivantes.

Cette méthode permet d'estimer les efforts et contraintes évalués par le solveur structure dès le début des itérations de couplage. Seuls les efforts fluides ne sont pas actualisés. Par conséquent, lorsque tous les efforts structurels restent constants entre deux pas de temps (les efforts de gravité en sont un exemple parfait), cela revient à réaliser une estimation à accélération constante. Dans le cas contraire, cette estimation n'est pas réalisée à accélération constante.

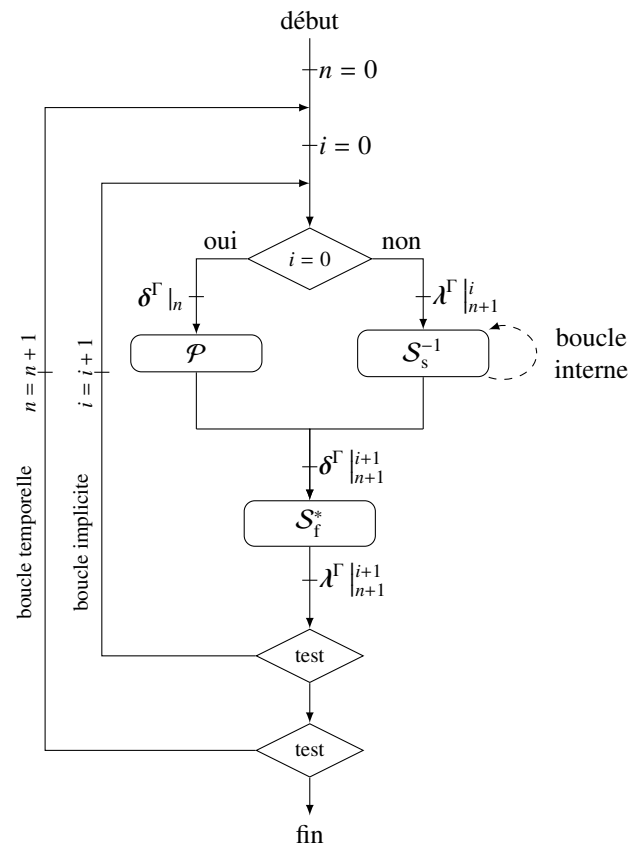


Figure D.3.5 : DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Formulation en effort

## D.4 Cas particulier des poutres

### D.4.1 Introduction

Dans le domaine des interactions fluide-structure, l'étude des structures déformables nécessite souvent d'ajouter des étapes d'interpolation et/ou de reconstruction des quantités au niveau de l'interface entre le fluide et les structures considérées. Au contraire, dans le cas de corps rigides, le transfert des différentes informations entre les deux solveurs (cinématique et effort) s'effectue naturellement car la structure n'est pas réellement modélisée par un maillage mais par des points ponctuels.

Lorsque des structures déformables discrétisées par des éléments volumiques sont considérées, il est rare que le maillage fluide et le maillage structure coïncident au niveau de l'interface fluide-structure car les prérequis en matière de finesse de discrétisation ne sont pas identiques. Il est donc nécessaire d'interpoler la cinématique et les efforts fluides d'une discrétisation vers une autre.

Dans le cas qui nous intéresse ici, c.-à-d. les éléments de type poutre, le maillage fluide et le maillage structure ne peuvent en aucun cas coïncider car la structure volumique est représentée par un élément filaire. Il est nécessaire d'interpoler et/ou de reconstruire certaines quantités. Pour cela, il faut se baser sur les informations permettant de représenter une poutre au niveau discret. Il a été montré à la section C.2.8 p. 102, qu'une poutre est couramment représentée par un certain nombre de sections rigides. Une première étape consiste à reconstruire aussi fidèlement que possible l'ensemble de la géométrie de la poutre à partir de ces informations. L'autre étape consiste à transférer les efforts fluides vers ces sections de manière conservative afin de ne pas produire ou dissiper numériquement de l'énergie au niveau de l'interface fluide-structure.

L'objectif de cette section est de présenter ces différentes étapes. Avant de présenter les deux étapes importantes, la description d'une poutre au sein du solveur fluide est réalisée à la section D.4.2. Les deux étapes sont, quant à elles, présentées aux sections D.4.3 et D.4.4 p. 136.

### D.4.2 Description d'une poutre au sein du solveur fluide

Au sein du solveur fluide, une poutre est décrite par  $\text{Seg}$  segments soit  $\text{Seg} + 1$  nœuds (cf. figure D.4.1). Chaque nœud représente une section rigide (cf. section C.1.5 p. 80). Un point appartenant à la poutre est paramétré par une abscisse notée  $r$ . La partie entière de cette abscisse représente le numéro de segment auquel le point appartient. La partie décimale représente le rapport  $s/l$  où  $l$  est la longueur du segment considéré et  $s$  l'abscisse curviligne de ce point sur ce segment (cf. section D.4.3.1.3 p. 133).

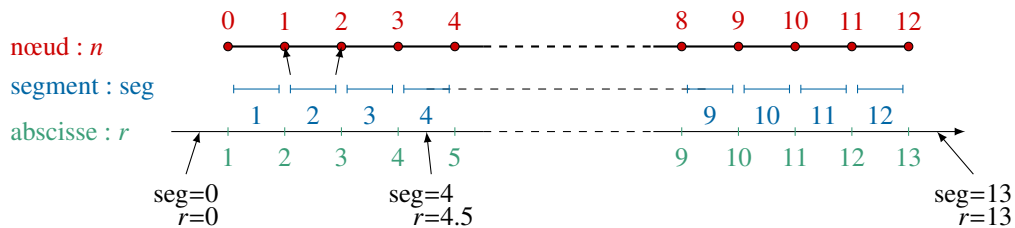


Figure D.4.1 : Poutre – Description d'une poutre au sein du solveur fluide –  $\text{Seg} = 12$

### D.4.3 Reconstruction de la géométrie

L'étape de reconstruction de la géométrie à partir des informations discrètes (positions et orientations) peut être réalisée selon différentes méthodes d'interpolation. Dans le cadre de ces travaux, deux méthodes d'interpolation ont été comparées : l'interpolation d'Hermite et celle de Lagrange. Ces deux méthodes consistent à construire des polynômes interpolateurs d'ordre 3 (interpolation d'Hermite) ou d'ordre 2 (interpolation de Lagrange). La méthode de reconstruction de la fibre neutre est réalisée dans un premier temps (cf. section D.4.3.1 page suivante) puis, c'est au tour de l'orientation des sections d'être interpolée (cf. section D.4.3.2 p. 134).



### D.4.3.1 Reconstruction de la fibre neutre

#### D.4.3.1.1 Interpolation d'Hermite

La méthode d'interpolation d'Hermite s'appuie sur la connaissance de la valeur d'une quantité et de sa dérivée en deux points différents. Il y a donc 4 quantités connues et, par conséquent, le polynôme d'interpolation est d'ordre 3. Soient  $\xi$  le paramètre d'interpolation compris entre 0 et 1 et  $\mathcal{L}$  le polynôme d'interpolation de Lagrange. Soient  $q$  et  $q'$  la quantité interpolée et sa dérivée. L'interpolation de Lagrange consiste à poser :

$$\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{L}_{00}(\xi) q_0 + \mathcal{L}_{10}(\xi) q'_0 + \mathcal{L}_{01}(\xi) q_1 + \mathcal{L}_{11}(\xi) q'_1 \quad (D.4.1)$$

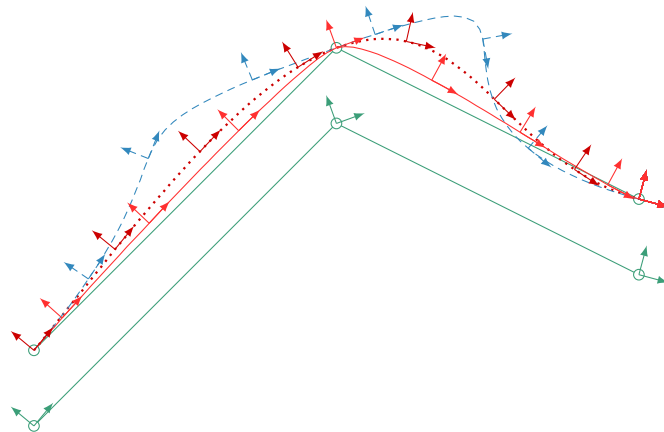
où :

$$\mathcal{L}_{00} = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad \mathcal{L}_{10} = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \quad \mathcal{L}_{01} = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad \mathcal{L}_{11} = \xi^3 - \xi^2 \quad (D.4.2)$$

Dans le cas de la fibre neutre, la quantité interpolée est la position  $p$  et la direction de la dérivée est donnée par la première normale de la matrice d'orientation des sections<sup>11</sup>. Par conséquent, il reste à déterminer la norme de la dérivée. Aucune des informations disponibles ne permet de déterminer cette quantité. Deux méthodes empiriques (l'une globale et l'autre locale) sont donc proposées. Tout d'abord, il a été remarqué que le polynôme d'Hermite donne qualitativement de bons résultats lorsque la distance entre les deux points est de l'ordre de l'unité. La norme de la dérivée peut donc être pondérée par cette distance. Néanmoins, en faisant cela, cette norme devient différente en un nœud si ce nœud est la première ou la deuxième extrémité d'un segment car les différents nœuds ne sont pas obligatoirement équirépartis (surtout après déformation). La première méthode empirique consiste donc à imposer la norme de la dérivée comme étant partout identique (approche globale) et égale à la moyenne de la longueur des segments. Cette méthode suppose donc que les différents nœuds sont suffisamment équirépartis. Une version locale est également proposée. Elle permet d'éviter le problème présenté ci-dessus tout en restant locale. Avec cette méthode, la norme de la dérivée est évaluée (dans le cas général) par les formules suivantes :

$$\|p'_0\| = \frac{1}{2} (\|p_0 - p_{-1}\| + \|p_0 - p_1\|) \quad \|p'_1\| = \frac{1}{2} (\|p_0 - p_1\| + \|p_1 - p_{1+1}\|) \quad (D.4.3)$$

où  $p_0$  et  $p_1$  sont les positions des nœuds considérés. Dans le cas des extrémités, la norme de la dérivée est simplement fixée comme étant égale à la longueur du segment considéré. Une illustration de ce problème est proposée à la figure D.4.2. L'orientation est évaluée par la méthode présentée à la section D.4.3.2.1 p. 134.



**Figure D.4.2 :** Interpolation d'Hermite – Illustration du problème de la pente avec l'interpolation d'Hermite : — données d'entrée, ..... méthode proposée, — norme trop faible ( $\approx 0.5 * \|p_0 - p_1\|$ ) et - - - norme trop forte ( $\approx 2.5 * \|p_0 - p_1\|$ )

11. Ce point est discuté plus en détail à la section D.4.3.3 p. 134.

### D.4.3.1.2 Interpolation de Lagrange

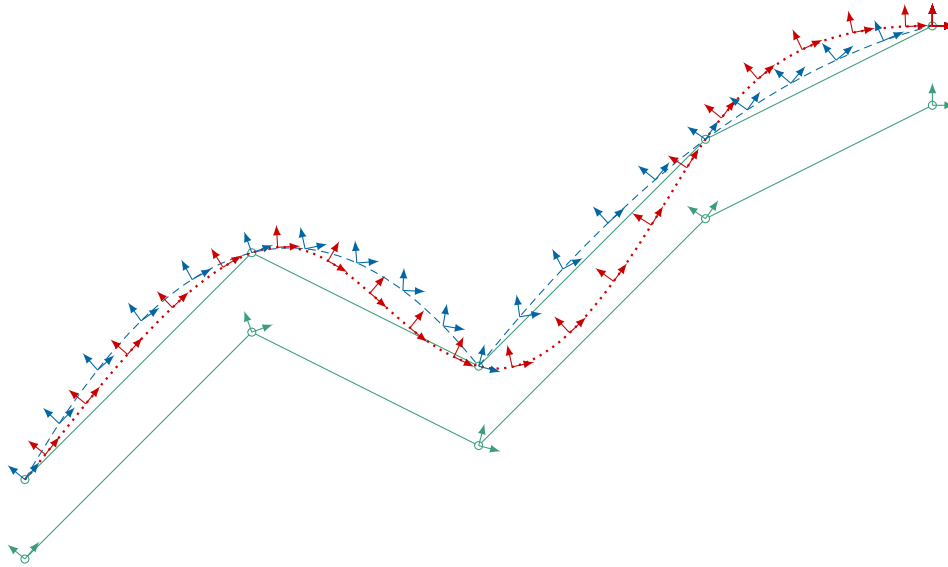
La méthode d'interpolation de Lagrange s'appuie sur la connaissance de la valeur d'une quantité en trois points différents. Il y a donc 3 quantités connues et, par conséquent, le polynôme d'interpolation est d'ordre 2. Cette interpolation a déjà été présentée (cf. section C.2.8.3 p. 103) mais elle est rappelée ci-dessous. Le polynôme d'interpolation d'Hermite est noté  $\mathcal{H}$ . Sinon, les notations précédentes sont de nouveau utilisées et le paramètre d'interpolation  $\xi$  est toujours compris entre 0 et 1. La quantité intermédiaire est imposée à  $\xi = 1/2$ . L'interpolation de Lagrange consiste à poser :

$$\mathcal{H}(\xi) = \mathcal{H}_0(\xi) \mathbf{q}_0 + \mathcal{H}_{0.5}(\xi) \mathbf{q}_{0.5} + \mathcal{H}_1(\xi) \mathbf{q}_1 \quad (\text{D.4.4})$$

où :

$$\mathcal{H}_0 = (2\xi - 1)(\xi - 1) \quad \mathcal{H}_{0.5} = -4\xi(\xi - 1) \quad \mathcal{H}_1 = \xi(2\xi - 1) \quad (\text{D.4.5})$$

Avec cette méthode d'interpolation, il n'y a aucune difficulté particulière. Seul le nombre de nœuds de la poutre doit être un nombre impair (dans le cadre de MBDyn, cela est toujours le cas.). Une comparaison avec l'interpolation d'Hermite est proposée à la figure D.4.3. L'orientation est évaluée par la méthode présentée à la section D.4.3.2.2 page suivante. Il y est notamment montré que des points d'inflexion peuvent apparaître à la liaison entre deux groupes de deux segments. La poutre doit donc être suffisamment discrétisée et régulière pour éviter ce problème, problème qui peut avoir des conséquences importantes au niveau du maillage fluide. Il est bien entendu possible d'augmenter l'ordre du polynôme d'interpolation mais il est connu que les polynômes de Lagrange sont très sensibles au phénomène de Runge (apparition de fortes oscillations avec une augmentation du nombre de points d'interpolation). Il est donc fortement déconseillé d'augmenter l'ordre du polynôme d'interpolation.



**Figure D.4.3 :** Interpolation de Lagrange – Comparaison avec la méthode d'interpolation d'Hermite : — données d'entrée, ..... interpolation d'Hermite et - - - interpolation de Lagrange

### D.4.3.1.3 Abscisse curviligne et longueur d'un segment

Soient  $\mathcal{P}$  un polynôme d'interpolation d'Hermite ou de Lagrange et  $\xi$  le paramètre d'interpolation compris entre 0 et 1. L'abscisse curviligne  $s$  est définie par :

$$s(\xi) = \int_0^\xi \|\mathcal{P}'(t)\| dt \quad (\text{D.4.6})$$

La longueur du segment  $l$  est alors définie par :

$$l = s(1) = \int_0^1 \|\mathcal{P}'(t)\| dt \quad (\text{D.4.7})$$

L'intégrale de l'équation (D.4.6) est résolue numériquement par une méthode de Gauss d'ordre 15. La relation inverse n'existant pas, une méthode itérative de Newton est utilisée pour rechercher le paramètre d'interpolation  $\xi$  à partir de l'abscisse curviligne  $s$  lorsque cela est nécessaire : évaluation des points milieux et des points d'évaluation des efforts par exemple (cf. section C.2.8.3 p. 103).

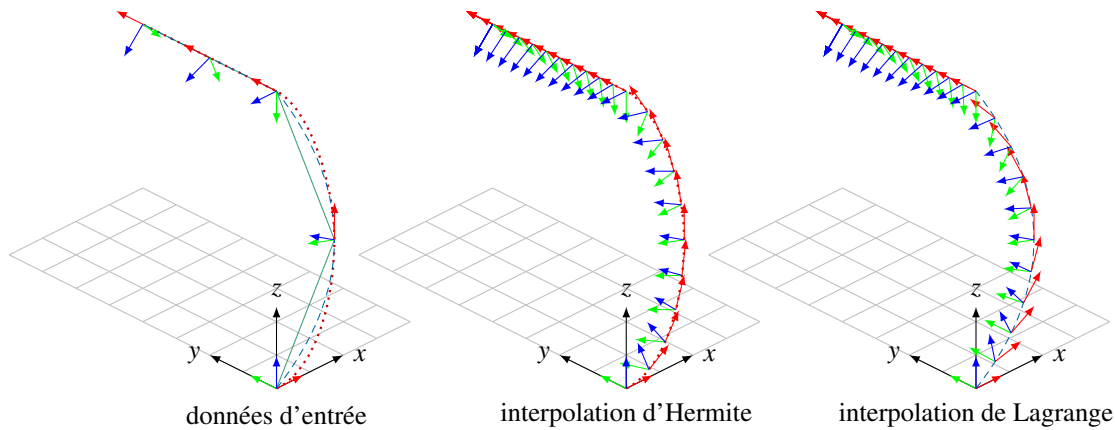
### D.4.3.2 Reconstruction de l'orientation

#### D.4.3.2.1 Interpolation d'Hermite

Comme il a déjà été montré à la section D.4.3.1.1 p. 132, l'interpolation d'Hermite suppose que la fibre neutre est tangente aux vecteurs normaux des sections. Grâce à cette propriété, le premier vecteur de la matrice d'orientation est connu puisqu'il s'agit du premier vecteur du repère de Frenet. Il reste donc à évaluer un vecteur normal à ce vecteur pour pouvoir reconstruire totalement la matrice d'orientation. Pour cela, il est supposé que la torsion, c.-à-d. la rotation selon le premier vecteur du repère de Frenet, évolue linéairement<sup>12</sup> entre les deux nœuds. Cette supposition est notamment vérifiée dans la majorité des modèles de poutre. Un exemple d'illustration est proposé à la figure D.4.4.

#### D.4.3.2.2 Interpolation de Lagrange

Lorsqu'une interpolation de Lagrange est utilisée, la tangente à la fibre neutre n'est pas obligatoirement alignée avec la normale aux sections. Il n'est donc plus possible d'utiliser les informations émanant de la reconstruction de la fibre neutre pour reconstruire l'orientation des sections. Dans ce cas, la reconstruction de l'orientation est totalement indépendante de celle de la fibre neutre. Ici, il est proposé d'interpoler le paramètre d'orientation des sections (paramètre de Gibbs-Rodrigues) de la même façon que la position de la fibre neutre (cf. équation D.4.4 page précédente). Cette méthode est notamment utilisée au sein du solveur MBDyn.



**Figure D.4.4** : Reconstruction de l'orientation – Exemple tridimensionnel : — données d'entrée, ..... interpolation d'Hermite et - - - interpolation de Lagrange

#### D.4.3.3 Comparaison des deux méthodes

De manière générale, la méthode d'interpolation d'Hermite s'applique naturellement dans le cas d'une modélisation poutre de type Euler-Bernoulli (vecteur tangent à la fibre neutre orthogonal aux sections). Au contraire,

12. Un paramétrage normal est supposé ici, c.-à-d. un paramétrage à vitesse constante de norme égale à l'unité.

la méthode d'interpolation de Lagrange est à préférer lorsque qu'une modélisation poutre de type Timoshenko est utilisée du fait qu'elle permet un découplage entre la position de la fibre neutre et l'orientation des sections.

Néanmoins, cela dépend de la situation considérée. En effet, s'il est supposé qu'à l'état initial les sections sont toutes orthogonales à la fibre neutre, alors, à l'état déformé, la non-orthogonalité des sections par rapport à la fibre neutre résulte de l'effet de cisaillement. Suivant les caractéristiques géométriques et matérielles de la poutre modélisée, cet effet de cisaillement peut être plus ou moins important par rapport aux autres effets (flexion, torsion, etc.). Le cas d'une poutre encastree à une extrémité et soumise à un effort ponctuel à l'autre extrémité est utilisé pour illustrer ce point (cf. figure D.4.5).

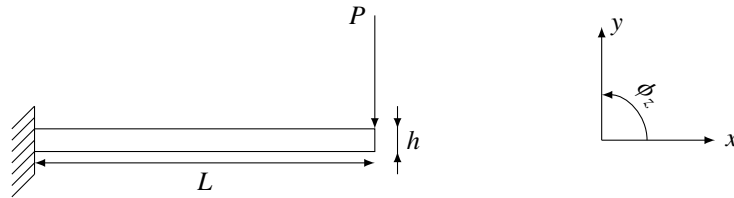


Figure D.4.5 : Une poutre encastree à une extrémité

La longueur, l'épaisseur et la largeur de la poutre sont respectivement notées  $L$ ,  $h$  et  $l$ . La solution analytique en HPP (Hypothèse des Petites Perturbations) pour une poutre de Timoshenko est donnée par [Timoshenko et Goodier, 1934] :

$$y(x) = -\frac{P}{6EI_y}x^2(3L-x) - \frac{P}{kGS}x \quad \phi_z(x) = -\frac{P}{2EI_y}x(2L-x) \quad (D.4.8)$$

où  $y$  est la position verticale de la fibre neutre,  $x$  la première coordonnée ( $x = 0$  correspond à l'extrémité encastree et  $x = L$  à l'extrémité libre) et  $\phi$  l'angle des sections. Le dernier terme de la première équation correspond à l'effet de cisaillement et disparaît dans le cas d'une poutre de type Euler-Bernoulli. Le matériau considéré est de l'acier et le facteur de correction de l'effet de cisaillement  $k$  n'est pas utilisé ( $k = 1$ ). La solution analytique est imposée aux extrémités et en un certain nombre de points équirépartis. Les interpolations d'Hermite et de Lagrange sont ensuite reconstruites et l'erreur d'interpolation est évaluée sur une dizaine de points de chaque segment. L'erreur totale est alors évaluée comme étant la norme quadratique des erreurs d'interpolation. Elle est présentée pour différentes valeurs de l'effort  $P$  à la figure D.4.7. La déformée et l'orientation des sections sont également présentées à la figure D.4.6. Il est vrai que la solution analytique ne peut théoriquement pas s'appliquer avec des efforts  $P$  aussi importants que ceux utilisés ici. Cependant, l'objectif principal est de comparer les deux méthodes d'interpolation sur une situation donnée. La solution analytique est uniquement utilisée pour se référer à un cas bien connu.

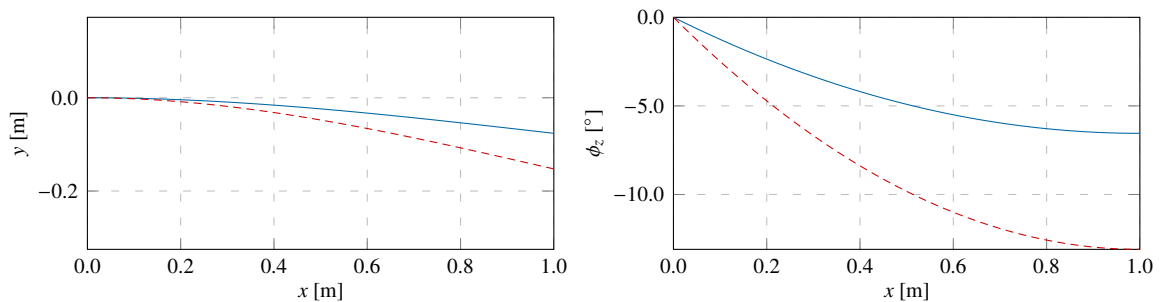
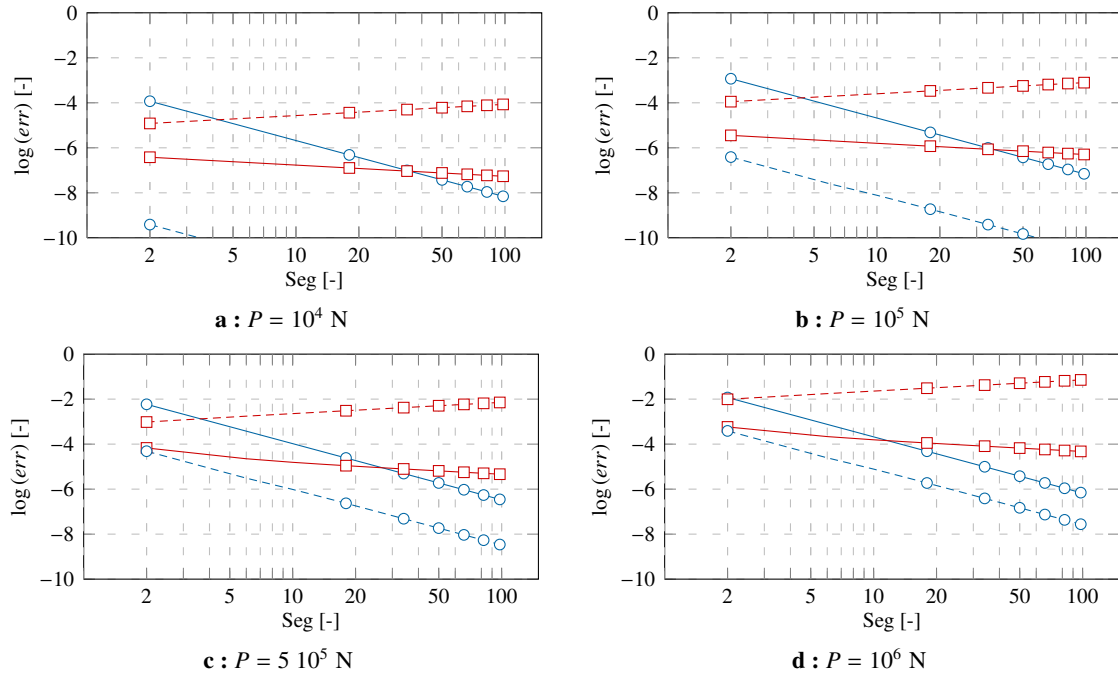


Figure D.4.6 : Une poutre encastree à une extrémité – Déformée (gauche) et angle de rotation des sections (droite) : —  $P = 5 \cdot 10^5$  N et - - -  $P = 1 \cdot 10^6$  N

Ces différentes figures montrent que, dans ce cas-ci, la déformée est reconstruite plus précisément par une interpolation de Lagrange si le nombre de segments est élevé et par une interpolation d'Hermite dans le cas contraire (malgré la prise en compte du cisaillement au niveau de la solution analytique). Le nombre de segments délimitant la transition entre ces deux modèles d'interpolation dépend de l'amplitude de la déformée (de l'amplitude de  $P$  ici). Pour information, il vaut 36, 35, 27 et 12 lorsque  $P$  vaut respectivement  $10^4$  N,  $10^5$  N,  $5 \cdot 10^5$  N et  $10^6$  N. L'erreur d'interpolation sur l'orientation des sections est, quant à elle, toujours inférieure avec l'interpolation de Lagrange car la normale aux sections n'est pas alignée avec la tangente à la fibre neutre



**Figure D.4.7** : Une poutre encastrée à une extrémité – Erreur d'interpolation : —○—  $y$  interpolation de Lagrange, —□—  $y$  interpolation d'Hermite, - -○- -  $\phi_z$  interpolation de Lagrange et - -□- -  $\phi_z$  interpolation d'Hermite

(solution de Timoshenko). L'angle entre la tangente et la normale des sections est noté  $\gamma_z$  et est constant tout le long de la poutre :

$$\gamma_z(x) = y'(x) - \phi_z(x) = -\frac{P}{kGS} \quad (\text{D.4.9})$$

En conclusion de cette section, si un modèle poutre de type d'Euler-Bernoulli est utilisé, il est préférable de s'appuyer sur une interpolation d'Hermite. Dans le cas contraire (modélisation des effets de cisaillement), une interpolation de Lagrange est théoriquement nécessaire. Il est important de remarquer que, au sein du solveur MBDyn, seul le modèle de Timoshenko est disponible car il n'est pas possible d'imposer l'orthogonalité entre les sections et la fibre neutre puisque cette dernière n'est pas réellement modélisée.

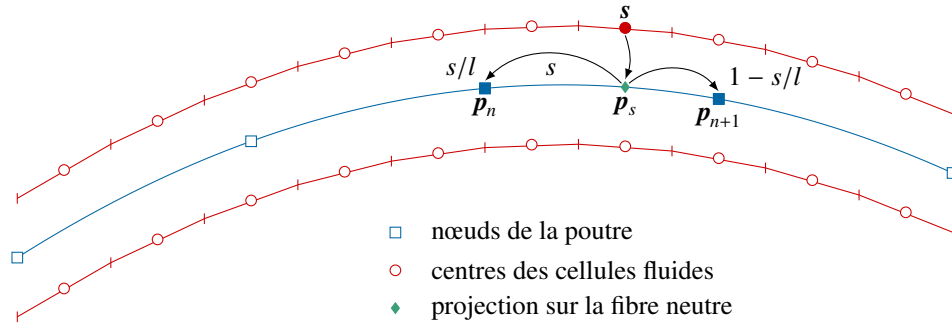
Avec une interpolation d'Hermite, il est nécessaire de déterminer la norme de la tangente car seule l'orientation des sections est connue. Une méthode locale basée sur la distance entre différents points est proposée pour lever cette indétermination. Les propriétés de l'interpolation d'Hermite sont ensuite utilisées pour reconstruire l'orientation des sections. Notamment, la torsion est supposée évoluer linéairement entre deux points.

L'interpolation de Lagrange est, quant à elle, plus simple à mettre en œuvre car la position et l'orientation des sections peuvent être reconstruites de manière identique. Par contre, du fait de sa construction, des points d'inflexion peuvent apparaître. Il est donc nécessaire que la poutre soit suffisamment régulière et discrétisée pour éviter de trop grandes erreurs d'interpolation.

#### D.4.4 Transfert des efforts fluides

Comme il a déjà été énoncé en introduction, le transfert des efforts fluides vers les nœuds représentatifs de la poutre doit s'effectuer de manière conservative pour éviter de dissiper ou de créer de l'énergie. Afin de simplifier l'implémentation, le maillage de peau de la poutre est triangulé dans un premier temps.

De manière générale, le torseur des efforts s'exerçant sur une face fluide appartenant au corps modélisé par une poutre (efforts de pression et de frottement) est transporté sur la fibre neutre (cf. figure D.4.8 page suivante). Il est ensuite réparti (transporté) sur les nœuds qui composent le segment considéré en fonction du ratio  $s/l$  où  $s$  est la distance curviligne entre le premier point du segment considéré et le point projeté et  $l$  la longueur du segment considéré (cf. section D.4.3.1.3 p. 133).

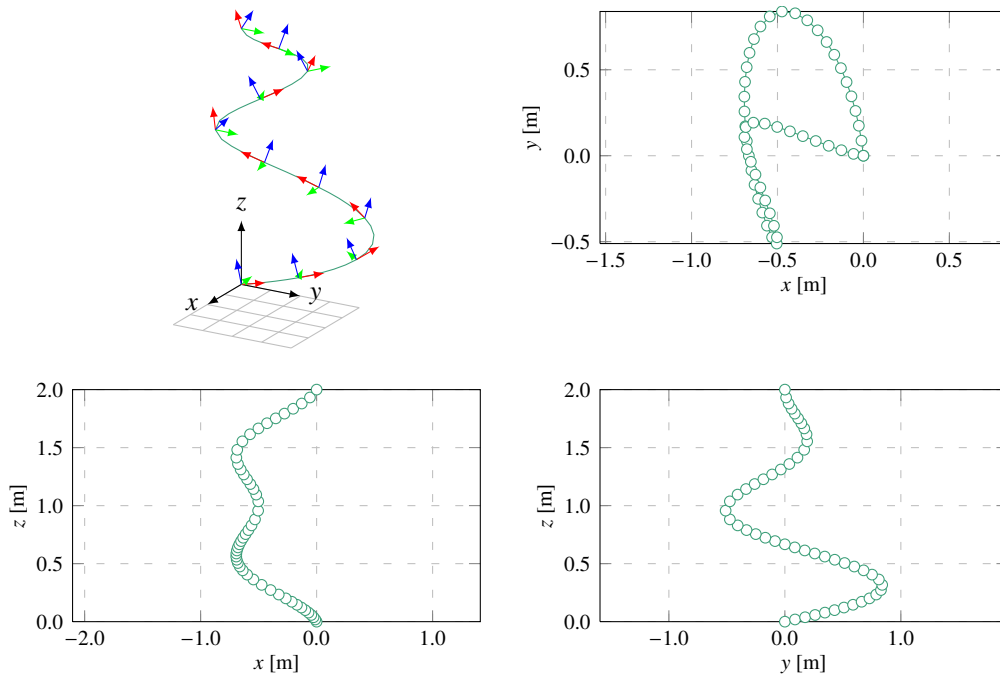


**Figure D.4.8 :** Transfert des efforts fluides vers les nœuds d'une poutre – Principe de base

Lorsque le plan d'une section rigide intersecte une cellule fluide, cette dernière est coupée en conséquence et les deux (ou plus) sous-cellules sont traitées de la même façon que précédemment. Un exemple tridimensionnel complexe est présenté à la figure D.4.9 où la position de la fibre neutre est donnée par :

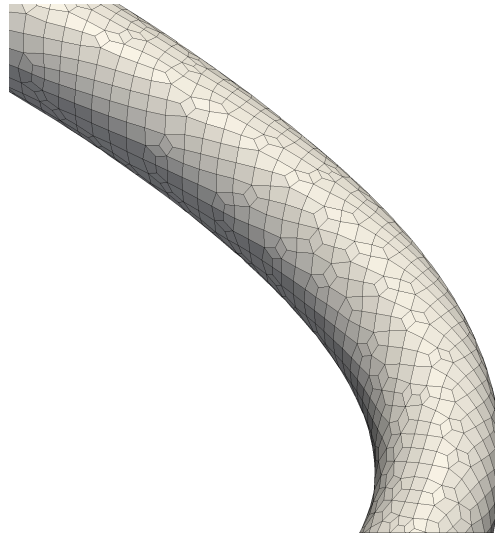
$$x(t) = (0.5 - t) \cos(3\pi t) - 0.5 \quad y(t) = (1 - t) \sin(3\pi t) \quad z(t) = 2t \quad (\text{D.4.10})$$

où  $t \in [0 : 1]$ . Le premier vecteur de l'orientation des sections est supposé identique à la tangente à cette courbe (interpolation d'Hermite). Le troisième vecteur est supposé contenu dans le plan du premier vecteur et de l'axe  $z$  du repère général. Des visualisations de l'abscisse locale (cf. section D.4.2 p. 131) et du maillage de peau avant et après manipulation sont proposées aux figures D.4.10 et D.4.11.

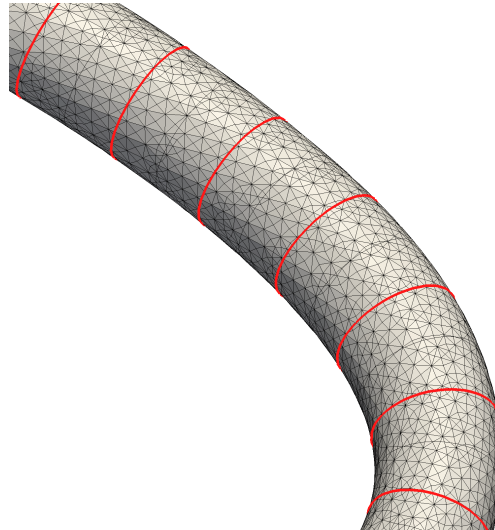


**Figure D.4.9 :** Exemple tridimensionnel – Données d'entrée

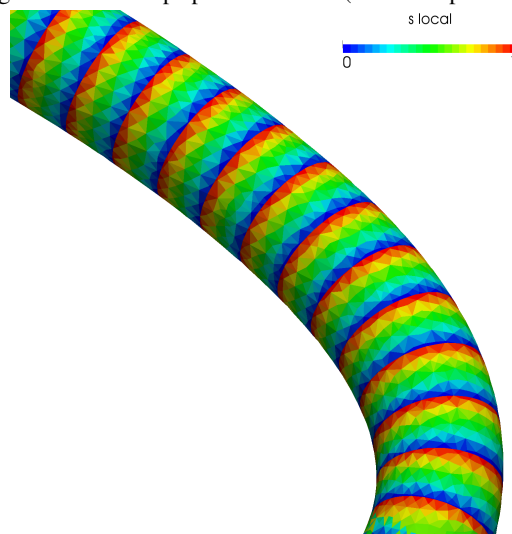
Une autre étape de validation a consisté à imposer un champ de pression analytique sur une poutre droite de longueur égale à l'unité et vérifier que les efforts et moments transmis aux différents nœuds de la poutre correspondaient bien à ce champ de pression imposé. Par exemple, une poutre d'axe  $y$  de longueur et de largeur égales à l'unité subit un effort de pression unitaire uniforme sur sa face  $x = -e/2$  ( $e$  étant l'épaisseur de la poutre). Cette poutre est discrétisée par 21 nœuds équirépartis. Les efforts et moments, ainsi que le maillage et l'abscisse locale, sont présentés à la figure D.4.12. Le moment est exprimé à la première extrémité de la poutre. Il est intéressant de remarquer que, par construction, les nœuds aux extrémités subissent des efforts deux fois plus petits que les autres nœuds. D'autres profils de champ de pression (parabolique, sinusoïdal) ont également été testés.



**a** : Maillage de peau – Zoom

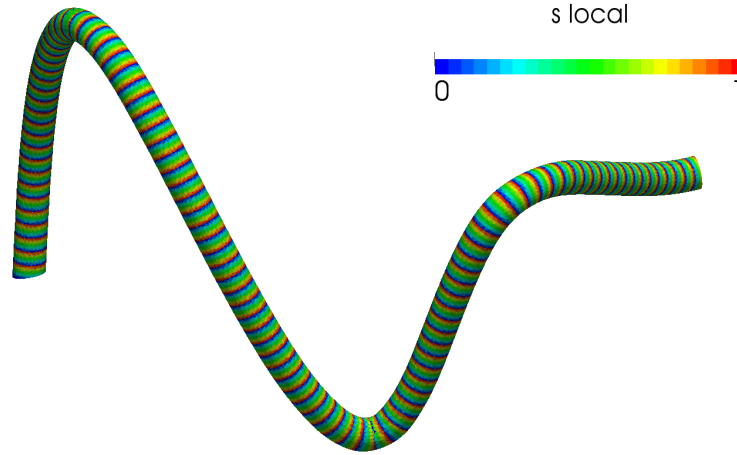


**b** : Triangulation et découpe par les sections (une découpe sur deux) – Zoom

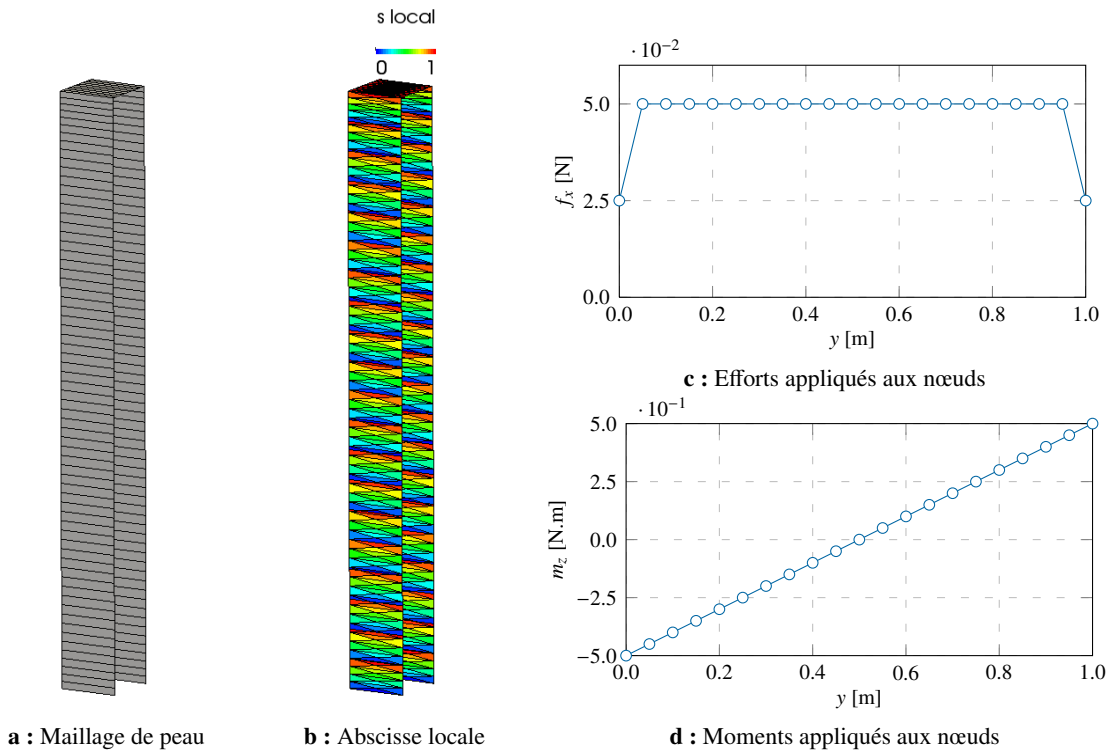


**c** : Abscisse locale – Zoom

**Figure D.4.10** : Exemple tridimensionnel – Validation qualitative – Validation qualitativeinterpolation de Lagrange



**Figure D.4.11 :** Exemple tridimensionnel – Validation qualitative – Interpolation de Lagrange – Abscisse locale – Vue générale



**Figure D.4.12 :** Transfert des efforts fluides – Une poutre subissant un effort de pression unitaire sur un côté – Maillage, abscisse locale, efforts et moments appliqués aux nœuds

### D.4.5 Transfert de la cinématique de la poutre

Le transfert de la cinématique de la poutre vers les nœuds représentatifs du corps correspondant au niveau du maillage fluide s'effectue plus simplement que le transfert des efforts fluides. Soient  $s$  un nœud du maillage de peau fluide,  $p$  la projection de ce point sur la fibre neutre,  $s$  la distance curviligne de ce point et  $l$  la longueur du segment correspondant. Lors d'une phase d'initialisation, la quantité  $s/l$  et le vecteur  $t = s - p$  sont évalués et sauvegardés. Une fois la simulation commencée, les nouvelles position et orientation du point  $p$  sont évaluées à partir de la méthode d'interpolation utilisée (Hermite ou Lagrange) et du ratio  $s/l$  évalué à l'état initial. La nouvelle position du point  $s$  est ensuite évaluée à partir des nouvelles position et orientation du point  $p$  par la formule des mouvements de corps rigide, la distance de transport étant le vecteur  $t$  évalué à l'état initial.



### D.4.6 Note sur l'implémentation

Les informations nécessaires aux différentes étapes d'interpolation peuvent demander des temps de calcul assez importants si le nombre de cellules fluides est grand. En effet, l'évaluation des abscisses curvilignes et des projections sur la fibre neutre nécessite de passer par des évaluations d'intégrales et des méthodes d'optimisation<sup>13</sup>. Néanmoins, il n'est pas nécessaire de les réaliser à chaque pas de temps mais a minima lors d'une phase de prétraitement ou à chaque étape de remaillage lorsque le raffinement automatique du maillage fluide est activé.

---

13. Dans le cadre de ces travaux, c'est une méthode de Newton avec une évaluation de la dérivée au second ordre qui est utilisée.

## D.5 Le problème de la masse ajoutée

### D.5.1 Définition de la masse ajoutée

#### D.5.1.1 Introduction

La résolution d'une problématique fluide-structure dans le domaine naval nécessite de se pencher sur la notion de masse ajoutée<sup>14</sup>. La masse ajoutée est une notion artificielle utilisée classiquement dans les formulations approchées des problèmes hydrodynamiques. Elle oblige à utiliser un traitement numérique particulier au niveau du couplage fluide-structure lorsqu'elle est « importante » par rapport aux inerties des corps considérés. En effet, elle est la source de fortes instabilités (cf. section D.5.3 p. 158).

Le terme de masse ajoutée porte souvent à confusion car il ne repose pas sur une notion physique simple. Ce terme a été introduit dans le cadre de l'étude des fluides non-visqueux (fluide parfait) lorsque l'écoulement est irrotationnel, c.-à-d. dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels. D'un point de vue physique, il est parfois dit que la masse ajoutée représente la « masse du volume de fluide qui se déplace avec le solide (rigide ou déformable) » [White, 1998], [Panton, 2005]. Cette définition ne permet pas de la quantifier mathématiquement, mais surtout, elle apporte une réelle confusion car ce n'est pas d'une masse qu'il est question mais d'un effort.

Pour rapidement fixer les idées, une première définition est proposée. Lorsqu'un corps se meut dans fluide, il subit des efforts de la part de ce fluide qui sont liés à son accélération. Ces efforts sont parfois appelés efforts de masse ajoutée. Cette définition ne doit cependant pas être prise à la lettre. Avant d'énoncer une définition plus précise, il est proposé d'en présenter quelques unes parmi les plus classiques afin de faire le lien avec celle qui est retenue.

#### D.5.1.2 Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini

Soit un corps rigide placé dans un domaine infini contenant un fluide monophasique. De plus, les hypothèses classiques de la théorie des écoulements potentiels (écoulement incompressible, fluide non-visqueux et la vitesse du fluide est supposée dériver d'un potentiel scalaire (cf. équation D.5.2 page suivante)) sont supposées vérifiées. Lorsque ce corps est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme (ou de manière équivalente lorsqu'il est fixe mais que l'écoulement possède une vitesse non-nulle et constante à l'infini), il ne subit aucun effort de résistance de la part du fluide (paradoxe de D'Alembert [D'Alembert, 1752], [Batchelor, 2000] et [Hoffman et Johnson, 2010]). Par contre, lorsque celui-ci est animé d'un mouvement accéléré, l'effort de résistance<sup>15</sup> n'est plus nul. Cet effort ne dépend pas de sa vitesse mais uniquement de son accélération. De plus, la relation liant l'effort à l'accélération est linéaire.

Pour démontrer ce résultat, il est possible de se baser sur des considérations énergétiques relativement simples [Brennen, 1982], [Panton, 2005]. Cependant, lorsque la méthode de calcul repose sur ces considérations, il n'est pas possible d'évaluer la valeur des efforts fluides dans les autres directions que celle de l'accélération du corps (mouvements de translation) ou selon son axe de rotation instantanée (mouvements de rotation). Une méthode plus générale consiste à s'appuyer sur la théorie des écoulements potentiels. D'après les hypothèses de la théorie potentielle, les équations de Navier-Stokes deviennent les équations d'Euler. Soient le bilan de masse et de quantité de mouvement suivants<sup>16</sup> :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (\text{D.5.1})$$

En outre, l'écoulement est supposé irrotationnel. Par conséquent la vitesse de l'écoulement dérive d'un potentiel<sup>17</sup>  $\phi$ . Ainsi, il est possible de montrer que les équations suivantes sont vérifiées au sein de la totalité du

14. Également appelée masse virtuelle, effort d'inertie du fluide, masse apparente ou masse d'eau ajoutée selon les auteurs ou les applications.

15. C'est l'effort de résistance qui est souvent pris comme exemple mais il ne faut pas oublier que les efforts dans les autres directions et les moments ne sont également pas spécialement nuls.

16. Le membre de gauche est présenté sous la forme convective et la masse volumique est transférée au membre de droite (cf. section B.1.9 p. 33).

17. Si la vitesse dérive d'un potentiel, alors son rotationnel est nul (le rotationnel d'un gradient est nul). Pour que la réciproque soit vraie, le domaine spatial doit respecter certaines conditions (connexe par arcs et simplement connexe) et la vitesse doit être suffisamment

domaine fluide :

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \Delta \phi = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (D.5.2)$$

La première équation exprime le lien entre la vitesse du fluide et son potentiel  $\phi$ . La deuxième est obtenue directement à partir du bilan de masse et la définition du potentiel de vitesse. La dernière est le résultat de l'intégrale du bilan de quantité de mouvement<sup>18</sup> (équation de Bernoulli). La constante  $C(t)$  de cette dernière équation est souvent fixée comme étant nulle du fait qu'elle ne possède pas d'impact au moment de l'évaluation des efforts. Comme le Laplacien du potentiel de vitesse est indépendant des autres quantités, il suffit de le résoudre pour pouvoir calculer la vitesse dans un premier temps puis la pression dans un second temps (cf. équation D.5.2). De surcroît, le Laplacien étant linéaire, il existe une infinité de solution. Il est donc nécessaire de rajouter des conditions aux limites. Notamment, sur la surface  $S$  du corps considéré, une condition de glissement est imposée. Soit l'équation :

$$\overline{\text{grad}}(\phi) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G)] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (D.5.3)$$

La résultante des efforts<sup>19</sup> de pression exercés par le fluide sur le corps est donnée par :

$$\mathbf{f} = - \iint_S p \cdot \mathbf{n} ds = \rho \left[ \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_S \frac{\mathbf{u}^2}{2} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_S gz \cdot \mathbf{n} ds \right] \quad (D.5.4)$$

Le corps étant totalement immergé, la dernière intégrale est constante par la formule de Green-Ostrogradski et représente la poussée d'Archimède (cf. équation B.1.6 p. 29). Il reste donc à déterminer la dérivée temporelle du potentiel de vitesse. Comme les conditions aux limites sont linéaires, il est possible de montrer que le potentiel de vitesse peut être exprimé sous la forme suivante [Batchelor, 2000] :

$$\phi = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \quad (D.5.5)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  sont les vitesses linéaire et angulaire du corps considéré (elles ne dépendent donc que du temps) et  $\boldsymbol{\Phi}$  et  $\boldsymbol{\Theta}$  sont des vecteurs de potentiel de vitesse qui ne dépendent que du vecteur position  $\mathbf{x}$  exprimé dans un repère lié au corps. Ainsi,  $\Phi_j$  et  $\Theta_j$  représentent le potentiel de vitesse obtenu pour une accélération unitaire du degré de liberté  $j$  en translation et en rotation.

Les conditions aux limites des vecteurs  $\boldsymbol{\Phi}$  et  $\boldsymbol{\Theta}$  sur la surface  $S$  du corps considéré sont obtenues à partir de l'équation (D.5.3). Comme cette condition aux limites est valable quels que soient les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\omega}$ , il en vient :

$$\overline{\text{grad}}(\boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \overline{\text{grad}}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \quad \text{sur } S \quad (D.5.6)$$

Dans la suite de la démonstration, seuls les degrés de liberté en translations et la résultante des efforts de pression sont considérés<sup>20</sup>. Dans ces conditions, la fonction  $\boldsymbol{\Phi}$  dépend uniquement du vecteur  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_G$  où  $\mathbf{x}_G$  est le vecteur position du centre de gravité du corps. Par conséquent, la dérivée temporelle du potentiel de vitesse est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{v} \cdot \left( \overline{\text{grad}}(\boldsymbol{\Phi}) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \right) \\ &= \dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{v} \cdot \left( \overline{\text{grad}}(\boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (D.5.7)$$

régulière. Ces conditions sont tout le temps rencontrées en hydrodynamique. C'est la raison pour laquelle, la réciproque est couramment utilisée.

18. Le terme de convection doit au préalable être réécrit en utilisant le fait que le rotationnel de la vitesse est nul [Panton, 2005].

19. De manière identique, il est possible de calculer les moments s'exerçant sur le corps. Afin de simplifier la présentation, seuls les forces sont considérés dans cette partie.

20. La démarche est identique pour les degrés de liberté en rotation mais les équations se compliquent car il est nécessaire de prendre en compte l'orientation du corps lorsque la dérivée temporelle du potentiel de vitesse est évaluée.

Ainsi, en intégrant l'équation (D.5.7) dans l'équation (D.5.4), l'équation suivante est obtenue :

$$\mathbf{f} = \rho \left[ \iint_S (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{\Phi}) \cdot \mathbf{n} ds + \iint_S \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{n} ds \right] \quad (\text{D.5.8})$$

La résultante des efforts de pression est composée de deux parties indépendantes. Ces dernières dépendent uniquement de l'accélération du corps (premier terme du membre de droite) et de la vitesse (second terme du membre de droite). D'après le paradoxe de D'Alembert, le terme dépendant uniquement de la vitesse est nul quelle que soit la vitesse du corps<sup>21</sup>. Le terme dépendant uniquement de l'accélération peut, quant à lui, se réécrire sous la forme d'un produit matriciel :

$$\mathbf{f} = \rho \iint_S (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{\Phi}) \cdot \mathbf{n} ds = -\mathbf{MA} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad \text{MA}_{ij} = - \iint_S \rho \Phi_j n_i ds \quad (\text{D.5.9})$$

Du fait des propriétés du vecteur  $\mathbf{\Phi}$ , la matrice  $\mathbf{MA}$  ne dépend que de la géométrie du corps considéré et de la masse volumique du fluide qui l'entoure. De plus, elle est constante dans un repère lié au corps. Il est également possible de montrer qu'elle est symétrique par le biais du théorème de Green-Riemann (cf. équation B.1.7 p. 29) et l'application des conditions aux limites (cf. équation D.5.6 page précédente) :

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_V \left( \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k x_k} - \Phi_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k x_k} \right) dv = \iint_S \Phi_i \overline{\text{grad}}(\Phi_j) \cdot \mathbf{n} ds - \iint_S \Phi_j \overline{\text{grad}}(\Phi_i) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \iint_S \Phi_i n_j ds - \iint_{\partial \Omega_a} \Phi_j n_i ds \end{aligned} \quad (\text{D.5.10})$$

Ces résultats restent valables dans le cadre d'un corps rigide possédant six degrés de liberté [Batchelor, 2000]. La matrice  $\mathbf{MA}$  est alors de taille 6x6 et ce sont la totalité des accélérations des degrés de liberté en translation et en rotation qui sont utilisés (cf. section D.5.1.6 p. 145).

Il est également intéressant de remarquer que, comme la matrice de masse ajoutée ne dépend pas de la vitesse de l'écoulement mais uniquement de son accélération, le fluide peut être considéré comme étant au repos. Le terme de convection peut donc être négligé. En outre, l'intégrale des efforts de gravité étant constant dans ce cas-ci (poussée d'Archimède), le terme de production volumique des équations d'Euler n'est également pas pris en compte. Il est donc équivalent de résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{D.5.11})$$

En conclusion de cette section, les effets de masse ajoutée se traduisent par l'apparition d'efforts et de moments non-nuls lorsque le corps est en mouvement accéléré<sup>22</sup>. Dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini, l'évaluation de ces efforts est simple car ce sont les seuls efforts et moments qui ne sont pas nuls<sup>23</sup>. De surcroît, les efforts et les moments sont des fonctions linéaires des accélérations du corps rigide considéré. Ils peuvent donc s'exprimer sous forme matricielle. Les coefficients de cette matrice ne dépendent que de la géométrie du corps considéré et de la masse volumique du fluide environnant. Par conséquent, l'évaluation de la matrice de masse ajoutée est constante dans un repère lié au corps et elle peut être évaluée en considérant l'écoulement comme étant au repos.

### D.5.1.3 Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu non infini

Lorsque le milieu n'est plus infini, c.-à-d. lorsqu'il existe une paroi rigide ou d'autres corps à proximité par exemple, les fonctions  $\mathbf{\Phi}$  et  $\mathbf{\Theta}$  dépendent également de la position et de l'orientation relative de ces éléments. Par exemple, dans un milieu confiné, les efforts de masse ajoutée définis à la section précédente ont tendance à

21. Il est également possible de le démontrer. Cependant, il est nécessaire de se baser sur des solutions élémentaires de l'équation de Laplace [Batchelor, 2000].

22. Ici, le cas d'un fluide accéléré n'a pas été présenté car il est nécessaire de préciser les repères utilisés de manière plus précise [Brennen, 1982].

23. La théorie des écoulements potentiels permet également d'évaluer des efforts de portance et/ou de trainée lorsque des artefacts spécifiques sont utilisés (circulation imposée, condition de Kutta, etc.) [Kundu et M., 2002].

fortement augmenter [Longatte *et al.*, 2009]. La matrice de masse ajoutée dépend donc de la configuration spatiale lorsque le milieu fluide n'est plus infini. Comme cette configuration est amenée à se modifier au cours du temps, la matrice de masse ajoutée dépend donc également du temps. Cependant, le principe de superposition est toujours vérifié. La matrice de masse ajoutée peut donc de nouveau être évaluée en considérant l'écoulement comme étant au repos aux différents instants où elle est évaluée.

### D.5.1.4 Cas des écoulements monophasiques visqueux

Lorsque le fluide est visqueux, la séparation de l'effort en une partie dépendant uniquement de la vitesse et une partie dépendant uniquement de l'accélération ne peut plus s'appliquer. En plus des efforts de masse ajoutée, le corps peut potentiellement subir des efforts liés aux phénomènes visqueux ou des efforts liés à l'historique de l'écoulement par exemple (la force de Basset en fait partie [Abbad, 2003]) [Brennen, 1982]. La définition de la force de masse ajoutée doit donc être précisée.

Dans le cas de corps possédant des mouvements harmoniques, l'effort fluide est souvent séparé en une partie en phase avec la vitesse et une autre partie en phase avec l'accélération. Le coefficient de masse ajoutée est alors évalué comme étant la valeur moyenne de la partie en phase avec l'accélération. Ce coefficient dépend donc de la vitesse du fluide incident, de la viscosité du fluide, de l'historique de l'écoulement, de la dynamique de la structure considérée, etc. [Uzunoglu *et al.*, 2001], [Brennen, 2008]. En particulier, des coefficients diagonaux de masse ajoutée négatifs peuvent être trouvés car les corps oscillants peuvent potentiellement revenir dans le sillage qu'ils ont créés [Vikestad *et al.*, 2000].

Cette définition est surtout utilisée lorsque la structure considérée ne possède qu'un unique degré de liberté de translation ou de rotation. En effet, il paraît difficile de supposer que la totalité des effets précédemment cités ne dépendent pas des couplages entre les degrés de liberté du corps étudiés. De plus, comme cette définition prend en compte la totalité des effets d'histoire, les résultats obtenus ne sont théoriquement valables que pour une configuration donnée. Par conséquent, l'extrapolation des résultats à une configuration légèrement différente peut s'avérer fautive.

En conclusion, le simple fait de prendre en compte les effets visqueux peut complètement modifier la définition de la masse ajoutée et rendre difficile son évaluation. Avant de pousser plus loin cette réflexion, le cas des écoulements potentiels à surface libre est présenté<sup>24</sup>.

### D.5.1.5 Cas des écoulements potentiels avec surface libre

Dans le domaine de l'architecture navale, les effets de masse ajoutée sont couramment évalués par des codes potentiels fréquentiels ou plus rarement ils sont estimés à partir de résultats tirés de la littérature [Korotkin, 2009]. Les codes potentiels fréquentiels permettent l'étude de la « *réponse d'un ensemble de structures de positions moyennes fixes, sollicitées par une houle cylindrique* » [Delhommeau, 1987]. Ils reposent sur la théorie des écoulements potentiels mais résolvent également les équations de la surface libre (en fond fini ou infini) par une méthode de singularités. Certaines des conditions aux limites sont linéarisées afin de rendre possible la résolution des équations. Le principe de superposition est donc de nouveau supposé même si, en toute rigueur, il n'est pas vérifié [Brennen, 1982]. Ainsi, les codes potentiels fréquentiels ne sont théoriquement valables que dans le domaine linéaire, c.-à-d. lorsque les perturbations de la surface libre sont faibles par rapport à l'amplitude de la houle.

Ce type de solveur s'attache à la résolution de deux problèmes élémentaires linéarisés : le problème de radiation et le problème de diffraction. Le problème de radiation consiste à évaluer les efforts s'exerçant sur une structure en mouvement oscillant imposé lorsque la surface libre est initialement calme, c.-à-d. les efforts d'amortissement (efforts en phase avec la vitesse<sup>25</sup>) et les efforts de masse ajoutée (efforts en phase avec l'accélération). Le problème de diffraction consiste, quant à lui, à évaluer les efforts s'exerçant sur une structure fixe soumise à une houle incidente, c.-à-d. les efforts d'excitation et les efforts de diffraction. Le problème de diffraction-radiation est résolu par sommation des deux solutions élémentaires.

---

24. Dès lors que les phénomènes visqueux sont pris en compte, les remarques réalisées dans cette section restent valables.

25. Le paradoxe de D'Alembert n'est pas vérifié car l'énergie transmise par la structure oscillante peut être transportée à l'infini par le biais du champ de vagues [Landau et Lifshitz, 1987].

Dans ce cas-ci, les efforts de masse ajoutée sont de nouveau définis comme étant la partie des efforts hydrodynamiques en phase avec l'accélération du corps considéré (approche fréquentielle). Cependant, il est possible de les exprimer sous forme matricielle de manière identique au cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini [Delhommeau, 1987], c.-à-d. sous la forme :

$$\mathbf{f}_{ma} = -\mathbf{MA} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}} \quad (\text{D.5.12})$$

où cette fois-ci, la matrice de masse ajoutée  $\mathbf{MA}$  dépend de la géométrie du corps, de la configuration spatiale (profondeur finie, présence d'autres corps) et de la fréquence des accélérations du corps considéré. Au contraire du cas monophasique en milieu infini, des efforts d'amortissement, c.-à-d. des efforts en phase avec la vitesse, apparaissent du fait de la présence de la surface libre. Ces efforts peuvent également se mettre sous une forme matricielle identique et cette matrice possède des propriétés identiques à celles de la matrice de masse ajoutée, c.-à-d. qu'elle est symétrique [Delhommeau, 1987].

En conclusion, les codes potentiels fréquentiels permettent d'évaluer la part des efforts fluides qui sont en phase avec la vitesse et celle en phase avec l'accélération. La définition de la masse ajoutée comme étant la partie proportionnelle à l'accélération est donc pertinente dans ce cadre. Cependant, comme il a déjà été énoncé à la section précédente, cette définition est difficilement utilisable lorsque les effets visqueux sont pris en compte. En outre, cela suppose que les structures étudiées possèdent des mouvements oscillants harmoniques (approche fréquentielle). Dans un cadre plus général (approche temporelle), ceci n'est pas obligatoirement vérifié et d'autres formulations doivent être utilisées pour prendre en compte l'historique de l'écoulement [Cummins, 1962].

#### D.5.1.6 Définition retenue

L'effet de masse ajoutée peut également être défini comme étant la réponse du fluide à une accélération impulsionnelle du corps considéré [Leonard et Roshko, 2001], [Söding, 2001], [Guyon *et al.*, 2001] et [Wakaba et Balachandar, 2007]. Cette réponse peut être évaluée par l'étude des temps caractéristiques des différents phénomènes (cf. section D.5.1.10 p. 148) mais également par la résolution de la différence des équations régissant deux écoulements identiques (identifiés par  $e1$  et  $e2$ ) à un instant  $t$  mais dont les conditions aux limites diffèrent uniquement sur le plan de l'accélération du corps [Söding, 2001]. Cette définition est très générale, car, dans le cas incompressible, l'équation est identique quel que soit le type d'écoulement considéré (potentiel, visqueux, diphasique, turbulent, etc.). Effectivement, comme le champ de vitesse fluide est identique à l'instant considéré, les termes liés à la vitesse du fluide s'annulent au sein du bilan de quantité de mouvement (cf. section B.1.12 p. 39). Ainsi, le bilan de masse et le bilan de quantité de mouvement qui régissent la différence entre ces deux écoulements sont donnés par les équations ci-dessous<sup>26</sup> :

$$\frac{\partial u_i^{e1}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{e2}}{\partial x_i} = 0 \quad \rho \frac{\partial u_i^{e1}}{\partial t} - \rho \frac{\partial u_i^{e2}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial p^{e1}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{e2}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{D.5.13})$$

Les champs artificiels de vitesse et de pression servant à évaluer les effets de masse ajoutée sont définis par :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{e1} - \mathbf{u}^{e2} \quad \tilde{p} = p^{e1} - p^{e2} \quad (\text{D.5.14})$$

Les deux bilans régissant ces deux quantités deviennent donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (\text{D.5.15})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \text{grad}(\tilde{p}) \quad (\text{D.5.16})$$

Comme la divergence du champ de vitesse artificielle est nulle, la divergence du bilan de quantité de mouvement est donnée sous forme locale et intégrale par l'équation (D.5.17). Le signe négatif est gardé pour rester cohérent

26. La forme convective des équations de Navier-Stokes est utilisée pour pouvoir sortir la masse volumique (cf. section B.1.9 p. 33)

avec le sens de l'effort. L'application de la formule de Green-Ostrogradski (cf. équation B.1.6 p. 29) permet de se ramener à une intégrale de surface (cf. équation D.5.18).

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad - \iiint_{\Omega_a} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\tilde{p}) \right) dv = 0 \quad (\text{D.5.17})$$

$$- \iint_{\partial\Omega_a} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\tilde{p}) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (\text{D.5.18})$$

D'un point de vue numérique, c'est cette dernière équation qui est résolue (cf. section B.2.7 p. 70). Comme les effets visqueux ne sont pas pris en compte, une condition de glissement (condition de Von Neumann) est appliquée sur la surface du corps rigide considéré. La relation entre la condition de glissement et le champ de pression artificiel est donnée par la version locale du bilan de quantité de mouvement (cf. équation D.5.16 page précédente). Puisque les deux écoulements considérés diffèrent uniquement sur le plan de l'accélération<sup>27</sup>, la condition aux limites est donc de la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\tilde{p}) \cdot \mathbf{n} = \left[ \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{dt} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \right] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (\text{D.5.19})$$

où  $\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}$  sont les vitesses artificielles linéaire et angulaire du corps rigide. Lorsqu'un autre corps rigide est présent, la même condition aux limites est utilisée avec une accélération nulle (corps fixe). Lorsqu'un plan de symétrie est modélisé, la projection du gradient de pression sur la normale de ce plan est également nulle. Au loin, la valeur de la pression ou du gradient peut être fixée comme étant nulle. La totalité des équations et des conditions aux limites étant linéaires, la solution est également linéaire. Ainsi, de manière identique aux cas des écoulements potentiels, les efforts de masse ajoutée peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathbf{f}_{m_a} = -\mathbf{M}\mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\delta}} \quad \text{où} \quad \ddot{\delta}_j = \begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{v}_j & \text{pour } j = 1, 2, 3 \\ \frac{d}{dt} \tilde{w}_{j-3} & \text{pour } j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (\text{D.5.20})$$

$$-\mathbf{M}\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} - \left( \iint_S \tilde{p}_{/j} \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{e}_i & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ - \left( \iint_S \tilde{p}_{/j} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{e}_{i-3} & \text{pour } i = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (\text{D.5.21})$$

avec  $\tilde{p}_{/j}$  le champ de pression artificiel obtenu lorsque le degré de liberté  $j$  du corps rigide subit une accélération unitaire  $\ddot{\delta}_j$ .

### D.5.1.7 Discussion

Cette définition est intéressante pour plusieurs raisons. Premièrement, elle est générale. En effet, que l'écoulement soit potentiel, turbulent ou diphasique, l'équation à résoudre est identique dans tous les cas.

Deuxièmement, du fait de la linéarité des conditions aux limites et de l'équation (D.5.17), les effets de masse ajoutée peuvent de nouveau être exprimés sous forme matricielle.

Troisièmement, les inconnues à déterminer sont six champs scalaires régis par une équation linéaire identique. Seules les conditions aux limites appliquées sur le corps considéré sont modifiées. La résolution de la totalité du problème est donc rapide et peu coûteuse au niveau de la mémoire. De plus, toutes les fonctions nécessaires à la résolution du problème existent déjà dans la majorité des solveurs CFD utilisant une approche volumes finis.

27. Si la vitesse était différente, l'accélération locale s'écrirait :  $\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{dt} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) + \tilde{\mathbf{w}} \wedge \frac{d}{dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G)$ .

Quatrièmement, le maillage utilisé pour la résolution du problème fluide peut être réutilisé. Il est également vrai qu'un maillage plus grossier pourrait être construit car les conditions nécessaires pour résoudre correctement cette équation sont moins strictes que celles pour résoudre les équations de Navier-Stokes (maillage de la couche limite notamment). Cependant, des développements plus poussés seraient nécessaires si l'utilisateur souhaite évaluer la matrice de masse ajoutée à différents instants au cours d'une simulation (gestion des deux maillages, interpolation de la masse volumique). De surcroît, contrairement aux codes potentiels classiques, cette approche permet de prendre en compte des géométries complexes (carènes avec appendices) car aucune simplification géométrique n'est nécessaire.

Cinquièmement, lorsqu'une approche volumes finis par capture d'interface (telle que celle utilisée au sein du solveur ISIS-CFD) est utilisée, la position de la surface libre n'a d'influence que par le biais de la dépendance spatiale de la masse volumique. Ainsi, les déformations de la surface libre sont naturellement prises en compte, et ceci, même si elles sont importantes (déferlement, houle de forte cambrure, « slamming », etc.). Au contraire, lorsque le solveur utilisé s'appuie sur une méthode monophasique pour résoudre un problème avec surface libre (méthodes potentielles, méthodes par suivi d'interface, méthodes particulières, etc.), l'équation de continuité de la position d'une surface fluide [Delhommeau, 1987] doit également être utilisée pour imposer les bonnes conditions aux limites au niveau de cette discontinuité. Cependant, l'équation obtenue fait intervenir la vitesse du champ de vitesse du fluide réel au niveau de cette surface et la dérivée temporelle de la pression artificielle [Söding, 2001]. Ceci complique grandement la résolution d'une part et le rôle de la dérivée temporelle de la pression artificielle reste à déterminer d'autre part.

Sixièmement, il est important de rappeler ici que l'objectif premier est de trouver un moyen permettant de stabiliser l'algorithme de couplage et non pas d'évaluer les masses d'eau ajoutées qui servent principalement dans des approches simplifiées.

Finalement, comme les effets visqueux ne sont pas directement pris en compte, il est possible de valider l'implémentation en comparant les résultats obtenus par cette approche avec quelques résultats bibliographiques ou des résultats provenant de codes potentiels (cf. section B.2.7 p. 70 pour des exemples de validation).

#### D.5.1.8 Symétrie de la matrice de masse ajoutée

Dans le cadre d'un écoulement monophasique, il est assez facile de démontrer que la matrice de masse ajoutée définie précédemment est symétrique. Effectivement, comme la masse volumique est constante, la forme locale de l'équation (D.5.17) montre que le champ de pression artificiel est une solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad (\text{D.5.22})$$

Ainsi, si  $\tilde{p}_{/i}$  et  $\tilde{p}_{/j}$  représentent deux champs de pression artificiels obtenus pour des degrés de liberté différents, leur Laplacien est nul. Le théorème de Green-Riemann (cf. équation B.1.7 p. 29) permet donc d'écrire l'équation suivante :

$$\iint_S \tilde{p}_{/i} \overline{\text{grad}(\tilde{p}_{/j})} \cdot \mathbf{n} ds - \iint_S \tilde{p}_{/j} \overline{\text{grad}(\tilde{p}_{/i})} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (\text{D.5.23})$$

Les termes de gradient de cette équation peuvent se simplifier grâce aux conditions aux limites (cf. équation D.5.19 page suivante). Un développement de l'expression des coefficients de la matrice de masse ajoutée<sup>28</sup> en positions  $ij$  et  $ji$  permet de démontrer que la matrice de masse ajoutée est bien symétrique.

Si maintenant l'écoulement est diphasique, il n'est plus possible d'affirmer que le champ de pression artificiel est la solution d'une équation de Laplace du fait de la dépendance spatiale de la masse volumique. La démonstration du caractère symétrique de la matrice de masse ajoutée est donc nettement plus difficile car le théorème de Green-Riemann ne peut plus s'appliquer.

Il est néanmoins possible de séparer le domaine spatial en deux sous domaines contenant chacun une des deux phases. Dans ce cas, au sein de chacun des domaines, l'écoulement est monophasique et la démonstration précédente peut potentiellement s'appliquer. Il faut néanmoins ajouter les conditions adéquates au niveau de la

28. Il faut considérer l'ensemble des combinaisons possibles (9 cas au total) : mouvement de translation ou de rotation (3 cas) et effort ou moment (3 cas).



surface libre. Cette preuve reste à écrire dans le cadre général proposé. Néanmoins, elle a déjà été réalisée pour les codes potentiels fréquentiels [Delhommeau, 1987] ou dans le cas des écoulements de Stokes [Guyon *et al.*, 2001]. Il est également important de remarquer qu'aucun contre-exemple n'a pu être trouvé au cours de ces travaux et que le caractère symétrique n'est pas utilisé par la suite. La symétrie de la matrice de masse ajoutée est donc principalement une caractéristique permettant de vérifier l'implémentation de la méthode d'évaluation.

### D.5.1.9 Comparaison avec les autres définitions

Dans le cadre des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini, cette définition est équivalente à celle présentée à la section D.5.1.2 p. 141. En effet, à cette section, il a été montré que le problème se simplifie fortement car cela revient à résoudre les équations d'Euler sans le terme de convection et le terme de production volumique. Les équations résolues sont donc identiques (cf. équations D.5.11 p. 143 et D.5.16 p. 145). Si le milieu n'est plus infini, la conclusion est identique et les remarques réalisées à la section D.5.1.3 p. 143 restent valables.

Si les effets visqueux sont modélisés, cette définition est totalement différente de celle présentée à la section D.5.1.4 p. 144. La définition utilisée ne se base pas sur une approche fréquentielle qui prend en compte la totalité des effets. Au contraire, elle essaie de ne modéliser qu'une partie des effets potentiels « temporels ».

Les approches fréquentielles se rapprochent des approches temporelles lorsque la période des mouvements considérés est nulle ou, de manière équivalente, lorsque la fréquence de ces mêmes mouvements est infinie. C'est la raison pour laquelle, les codes potentiels fréquentiels pouvant résoudre le problème de radiation à période nulle peuvent servir à valider cette approche (cf. section B.2.7 p. 70).

### D.5.1.10 Conclusion

Ces quelques sections d'introduction ont présenté quelques unes des interprétations possibles des effets de masse ajoutée. Il est maintenant important de conclure cette introduction en énonçant la définition utilisée au cours de ces travaux pour, à la fois éviter les futures ambiguïtés, mais également pour faire le lien avec la suite de ce rapport.

Il est donc proposé de définir les effets de masse ajoutée comme étant la réponse d'un fluide à une accélération impulsionnelle d'un corps se déplaçant en son sein.

L'analyse de l'équation obtenue (cf. équation D.5.18 p. 146) permet d'affirmer que cette réponse ne dépend ni de la vitesse de l'écoulement, ni de la viscosité du fluide (monophasique ou multiphasique) qui l'entoure. Par contre, c'est une réponse qui dépend linéairement de l'accélération du corps. Si le fluide est monophasique, les coefficients linéaires dépendent uniquement de la forme du corps considéré et de la configuration spatiale instantanée. Si le fluide est multiphasique, ils dépendent également de la répartition spatiale de la masse volumique du fluide qui l'entoure. Par conséquent, dans ce cas et uniquement dans ce cas, les effets d'histoire et les effets visqueux peuvent indirectement influencer cette réponse si la position de la surface libre est impactée par ces effets.

Comme la relation liant les efforts de masse ajoutée à l'accélération du corps considéré est linéaire, il est tentant de décrire les effets de masse ajoutée comme étant la partie des efforts fluides proportionnelle à l'accélération. Si le fluide est non-visqueux et irrotationnel, cette approximation peut être réalisée. Par contre, lorsque les effets visqueux sont pris en compte, il est généralement très difficile de faire la part des différents effets car la totalité des termes des équations de Navier-Stokes doit être prise en compte. C'est donc une définition simplificatrice qui ne peut être utilisée que pour des cas simples ou des analyses de principe (cf. section D.5.3 p. 158).

La définition des effets de masse ajoutée comme étant la réponse impulsionnelle est également intéressante d'un point de vue physique. Pour illustrer ces propos, le bilan de quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes d'un fluide isotherme incompressible newtonien pour un écoulement diphasique est rappelée

ci-dessous<sup>29</sup> (cf. équation B.1.44 p. 35).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] + f_i^v \quad (\text{D.5.24})$$

Soient  $T$ ,  $U$  et  $L$  un temps, une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement. L'échelle de temps caractéristique du terme inertiel est donnée par  $T$ , celle du terme de convection par  $L/U$ , celle du terme lié à la pression est nulle et celle du terme de diffusion visqueuse par  $L^2\rho/\mu$  [Guyon *et al.*, 2001]. Dans la majorité des cas, les efforts volumiques se réduisent aux efforts de gravité. L'échelle de temps du terme de production volumique est donc infinie. En conséquence, lorsque l'échelle de temps caractéristique tend vers zéro (impulsion) :

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{D.5.25})$$

Cette équation est bien identique à celle présentée précédemment (cf. équation D.5.16 p. 145). Cette approche montre également que, lorsque le corps est brutalement accéléré, la réponse du fluide est principalement dominée par les effets potentiels [Wakaba et Balachandar, 2007]. Ainsi, d'un point de vue numérique, lorsque de petits pas de temps sont utilisés (ce qui est généralement le cas), les incréments des efforts fluides peuvent être principalement composés des effets de masse ajoutée. Comme cette réponse est caractérisée par une échelle de temps nulle, de fortes instabilités peuvent apparaître. Effectivement, une mauvaise estimation de l'accélération d'un corps peut potentiellement provoquer une réponse brutale de la part du fluide si la matrice de masse ajoutée définie précédemment est « importante ».

La méthode de résolution numérique de l'équation permettant d'évaluer la matrice de masse ajoutée (cf. équation D.5.25) a déjà été présentée à la section B.2.7 p. 70. Des cas de validation sont maintenant proposés à la section suivante.

Afin de limiter la réponse brutale du solveur fluide, une méthode relativement simple peut être utilisée. Elle est présentée à la section D.5.3 p. 158. Ensuite, les conditions de stabilité sont introduites par l'étude d'un exemple de principe à (cf. section D.5.4 p. 159). Une illustration numérique est ensuite proposée (cf. section D.5.5 p. 161). Enfin, la stabilisation de l'algorithme de couplage vis-à-vis des effets de masse ajoutée est présentée à la section D.5.6 p. 165.

## D.5.2 Validation de la méthode d'évaluation des effets de masse ajoutée

Cette section présente plusieurs cas de validation. Les résultats sont comparés à des résultats analytiques (cas d'un cylindre ou d'une sphère), différents résultats bibliographiques regroupés dans [Blevins, 2001] ou des calculs réalisés par le code potentiel Aqua+ [Delhommeau, 1987].

### D.5.2.1 Un cylindre

Les paramètres géométriques du cylindre et les résultats obtenus par unité de longueur (cas bidimensionnel) sont donnés ci-dessous.

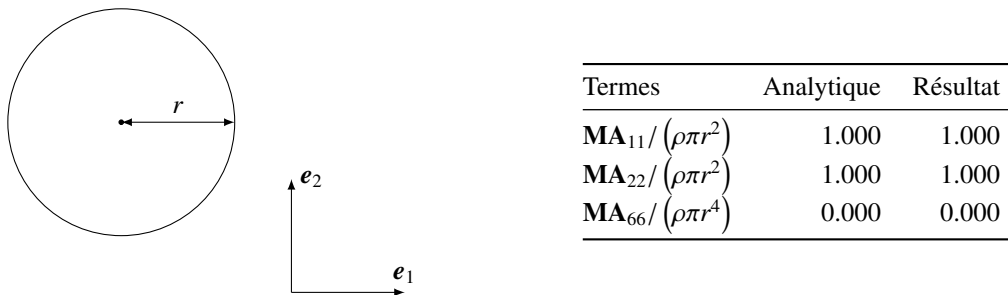


Figure D.5.1 : Cylindre – Géométrie et masse ajoutée

29. Cette équation est présentée sous la forme convective (cf. section B.1.9 p. 33).

### D.5.2.2 Un rectangle

Les paramètres géométriques du rectangle et les résultats obtenus par unité de longueur (cas bidimensionnel) sont donnés ci-dessous. Les résultats obtenus sont cohérents avec les résultats bibliographiques qui sont présentés dans [Blevins, 2001] et [Wendel, 1956] et proviennent initialement de [Lewis, 37]. Ils ont été obtenus par des transformations conformes de la solution du potentiel de vitesse autour d'un cylindre.

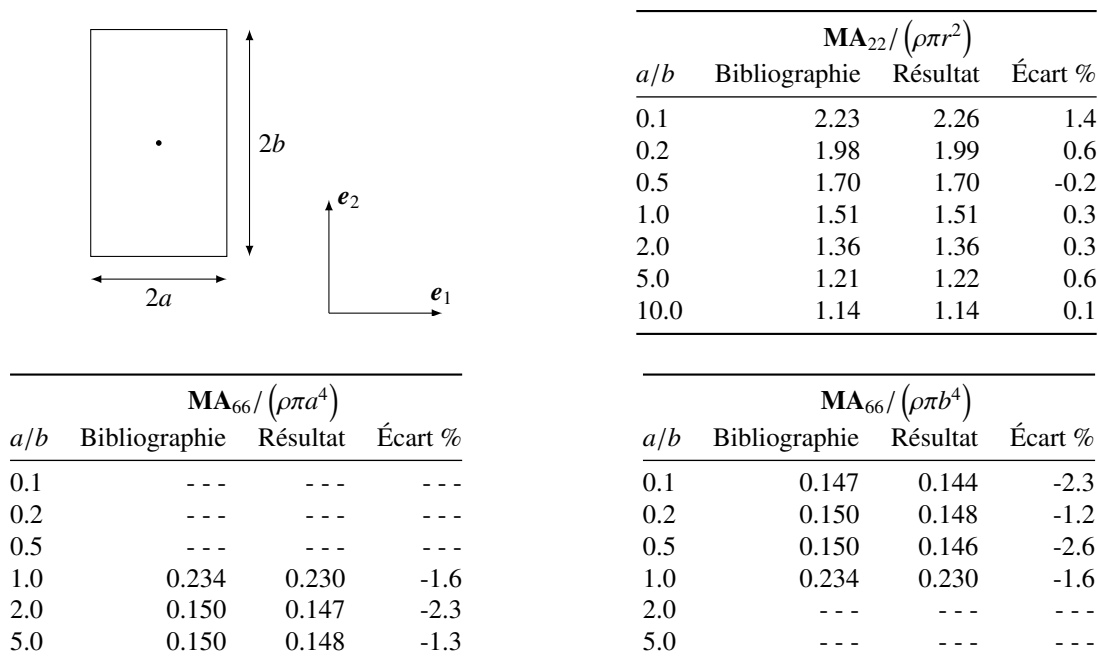


Figure D.5.2 : Rectangle – Géométrie et masse ajoutée

### D.5.2.3 Un cylindre dans un tuyau

Les paramètres géométriques d'un cylindre dans un tuyau et les résultats obtenus par unité de longueur (cas bidimensionnel) sont donnés ci-dessous. Ce cas permet de montrer l'influence du confinement sur les coefficients de masse ajoutée. Les résultats obtenus sont proches de la solution analytique qui est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{MA}_{11} = \left[ \frac{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \right] \cdot \rho\pi r_1^2 \quad (\text{D.5.26})$$

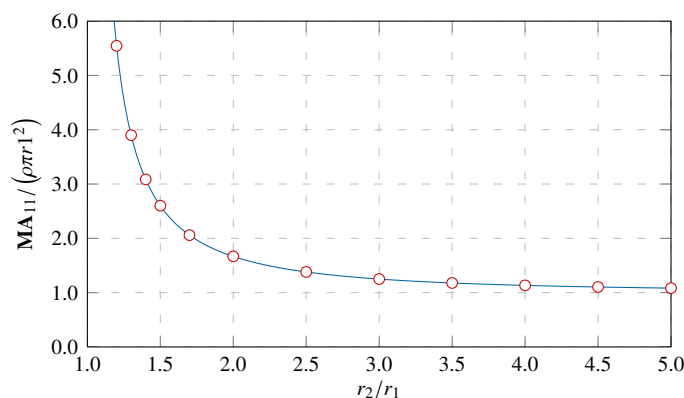


Figure D.5.3 : Cylindre dans un tuyau – Masse ajoutée en fonction du confinement : — solution analytique et ○ résultats

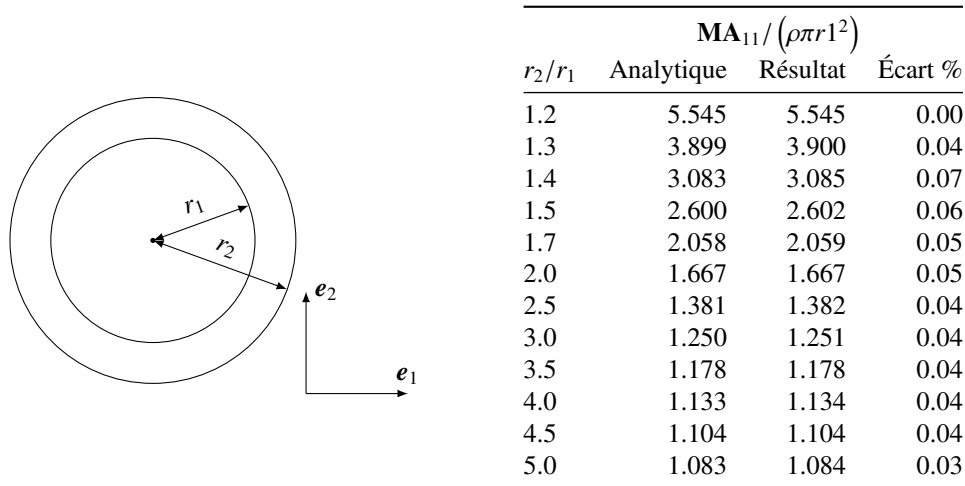


Figure D.5.4 : Cylindre dans un tuyau – Géométrie et masse ajoutée

#### D.5.2.4 Un parallélépipède

Les paramètres géométriques du parallélépipède (cas tridimensionnel) et les résultats obtenus sont donnés ci-dessous. Des écarts importants sont observés par rapport aux résultats bibliographiques présentés dans [Blevins, 2001] et provenant initialement de [Sarpkaya, 1960]. Il est important de remarquer que ces résultats ont été obtenus expérimentalement ce qui peut expliquer les différences observées. Les écarts entre les résultats obtenus et ceux fournis par le code de calcul potentiel Aqua+ sont nettement plus faibles.

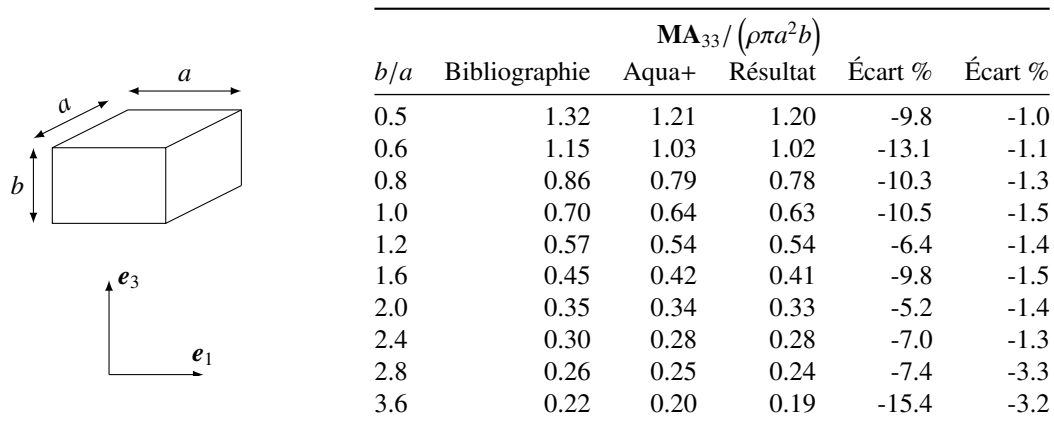


Figure D.5.5 : Parallélépipède – Géométrie et masse ajoutée

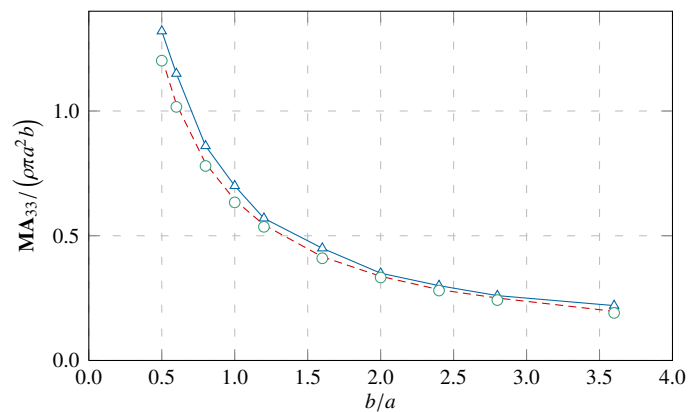
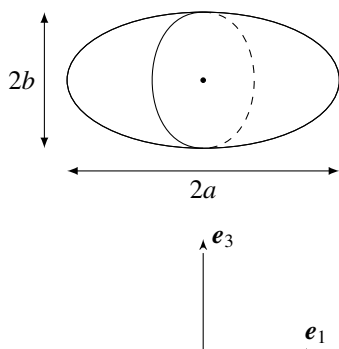


Figure D.5.6 : Parallélépipède – Masse ajoutée en fonction du ratio des longueurs : —△— données bibliographiques, --- résultats Aqua+ et ○ résultats

### D.5.2.5 Un ellipsoïde de révolution

Les paramètres géométriques d'un ellipsoïde de révolution d'axe  $e_1$  (cas tridimensionnel) et les résultats obtenus sont donnés ci-dessous. Les résultats obtenus sont proches des résultats bibliographiques présentés dans [Blevins, 2001] et provenant initialement de [Lamb, 1945]. Ils ont été obtenus analytiquement.



$a/b$	$MA_{11} / (4/3\rho\pi b^3)$		
	Bibliographie	Résultat	Écart %
0.1	0.6148	0.6213	1.1
0.2	0.6016	0.6027	0.2
0.4	0.5712	0.5719	0.1
0.6	0.5447	0.5454	0.1
0.8	0.5211	0.5220	0.2
1.0	0.5000	0.5025	0.5
1.5	0.4557	0.4591	0.7
2.0	0.4200	0.4237	0.9
2.5	0.3908	0.3946	1.0
3.0	0.3660	0.3697	1.0
5.0	0.2956	0.2988	1.1
7.0	0.2510	0.2538	1.1
10.0	0.2071	0.2097	1.2

$a/b$	$MA_{22} / (4/3\rho\pi ab^2)$		
	Bibliographie	Résultat	Écart %
0.1	0.0748	0.0750	0.3
0.2	0.1425	0.1432	0.5
0.4	0.2593	0.2607	0.5
0.6	0.3552	0.3570	0.5
0.8	0.4343	0.4368	0.6
1.0	0.5000	0.5025	0.5
1.5	0.6211	0.6243	0.5
2.0	0.7042	0.7064	0.3
2.5	0.7619	0.7642	0.3
3.0	0.8039	0.8064	0.3
5.0	0.8943	0.8972	0.3
7.0	0.9331	0.9364	0.4
10.0	0.9602	0.9637	0.4

$a/b$	$MA_{66} / (4/15\rho\pi ab^2 (a^2 + b^2))$		
	Bibliographie	Résultat	Écart %
0.1	4.0220	4.0275	0.1
0.2	1.7930	1.7954	0.1
0.4	0.5862	0.5872	0.2
0.6	0.1843	0.1847	0.2
0.8	0.0346	0.0344	-0.4
1.0	---	---	---
1.5	0.0951	0.0955	0.4
2.0	0.2394	0.2402	0.3
2.5	0.3652	0.3661	0.2
3.0	0.4657	0.4671	0.3
5.0	0.6999	0.7009	0.1
7.0	0.8067	0.8066	0.0
10.0	0.8835	0.8827	-0.1

Figure D.5.7 : Ellipsoïde – Géométrie et masse ajoutée

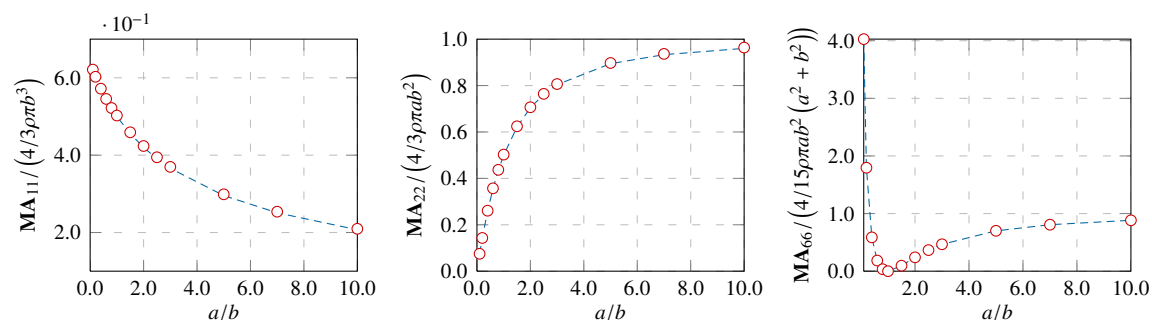
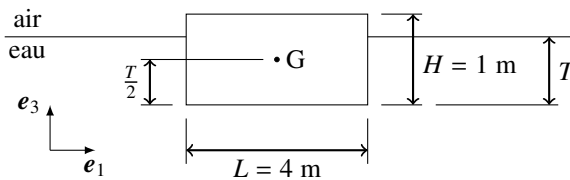


Figure D.5.8 : Ellipsoïde – Masses ajoutées en fonction du ratio des longueurs : --- données bibliographiques et ○ résultats

## D.5.2.6 Une barge parallélépipédique

Les paramètres géométriques d'une barge parallélépipédique et les résultats obtenus par unité de longueur (cas bidimensionnel) sont donnés ci-dessous. Comme le code Aqua+ ne peut traiter que des corps 3D, la troisième dimension (selon le vecteur  $e_2$ ) a été extrudée sur une très grande longueur pour éviter qu'elle n'influence de manière significative les résultats (barge infiniment longue). Une étude de convergence a été réalisée et seul les résultats convergés sont présentés. Néanmoins, cela peut être une source d'erreur supplémentaire. La situation est identique au cas d'étude présenté à la section E.2 p. 190.

Les écarts observés sont faibles pour les termes diagonaux, excepté pour la masse ajoutée en cavement avec le tirant d'eau le plus faible. Cette différence peut s'expliquer par la faible valeur de la masse ajoutée concernée. Les écarts sont plus importants en ce qui concerne les termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée. Les résultats obtenus sont cependant plus cohérents que les résultats fournis par le code de calcul Aqua+ car ces termes sont théoriquement symétriques, alors que les résultats obtenus par le code de calcul Aqua+ sont numériquement dissymétriques (cf. figure D.5.10 page suivante). Un travail sur le maillage Aqua+ pourrait être nécessaire pour obtenir une meilleure cohérence des résultats sur ces termes.



$MA_{11} / (\rho LT)$			
$T$	Aqua+	Résultat	Écart %
0.1	0.023	0.028	-
0.2	0.045	0.044	-1.0
0.3	0.065	0.063	-3.1
0.4	0.085	0.082	-4.2
0.5	0.105	0.100	-4.6
0.6	0.125	0.119	-4.1
0.7	0.144	0.138	-4.0
0.8	0.163	0.157	-3.9
0.9	0.182	0.175	-3.7

$MA_{33} / (\rho LT)$			
$T$	Aqua+	Résultat	Écart %
0.1	16.58	16.72	0.8
0.2	8.63	8.76	1.5
0.3	5.96	6.05	1.5
0.4	4.60	4.67	1.5
0.5	3.77	3.83	1.5
0.6	3.21	3.26	1.5
0.7	2.81	2.85	1.4
0.8	2.50	2.54	1.4
0.9	2.26	2.29	1.3

$MA_{55} / (\rho T (HL^3 + LH^3) / 12)$			
$T$	Aqua+	Résultat	Écart %
0.1	5.95	5.95	0.1
0.2	3.03	3.08	1.7
0.3	2.06	2.10	1.7
0.4	1.57	1.59	1.7
0.5	1.27	1.29	1.7
0.6	1.07	1.08	1.6
0.7	0.92	0.94	1.6
0.8	0.81	0.83	1.5
0.9	0.73	0.74	1.4

$MA_{15}$			
$T$	Aqua+	Résultat	Écart %
0.1	$2.39 \cdot 10^1$	$2.56 \cdot 10^1$	7.0
0.2	$4.81 \cdot 10^1$	$5.71 \cdot 10^1$	18.8
0.3	$7.42 \cdot 10^1$	$8.95 \cdot 10^1$	20.6
0.4	$1.01 \cdot 10^2$	$1.23 \cdot 10^2$	21.1
0.5	$1.31 \cdot 10^2$	$1.58 \cdot 10^2$	20.5
0.6	$1.65 \cdot 10^2$	$1.96 \cdot 10^2$	19.0
0.7	$2.05 \cdot 10^2$	$2.40 \cdot 10^2$	17.4
0.8	$2.52 \cdot 10^2$	$2.91 \cdot 10^2$	15.4
0.9	$3.09 \cdot 10^2$	$3.50 \cdot 10^2$	13.4

$MA_{51}$			
$T$	Aqua+	Résultat	Écart %
0.1	$4.24 \cdot 10^1$	$2.61 \cdot 10^1$	-38.3
0.2	$9.03 \cdot 10^1$	$5.79 \cdot 10^1$	-35.9
0.3	$1.27 \cdot 10^2$	$9.05 \cdot 10^1$	-28.8
0.4	$1.61 \cdot 10^2$	$1.24 \cdot 10^2$	-23.4
0.5	$1.97 \cdot 10^2$	$1.59 \cdot 10^2$	-19.6
0.6	$2.37 \cdot 10^2$	$1.97 \cdot 10^2$	-16.6
0.7	$2.81 \cdot 10^2$	$2.41 \cdot 10^2$	-14.2
0.8	$3.33 \cdot 10^2$	$2.92 \cdot 10^2$	-12.3
0.9	$3.93 \cdot 10^2$	$3.51 \cdot 10^2$	-10.7

Figure D.5.9 : Barge parallélépipédique – Géométrie et masse ajoutée

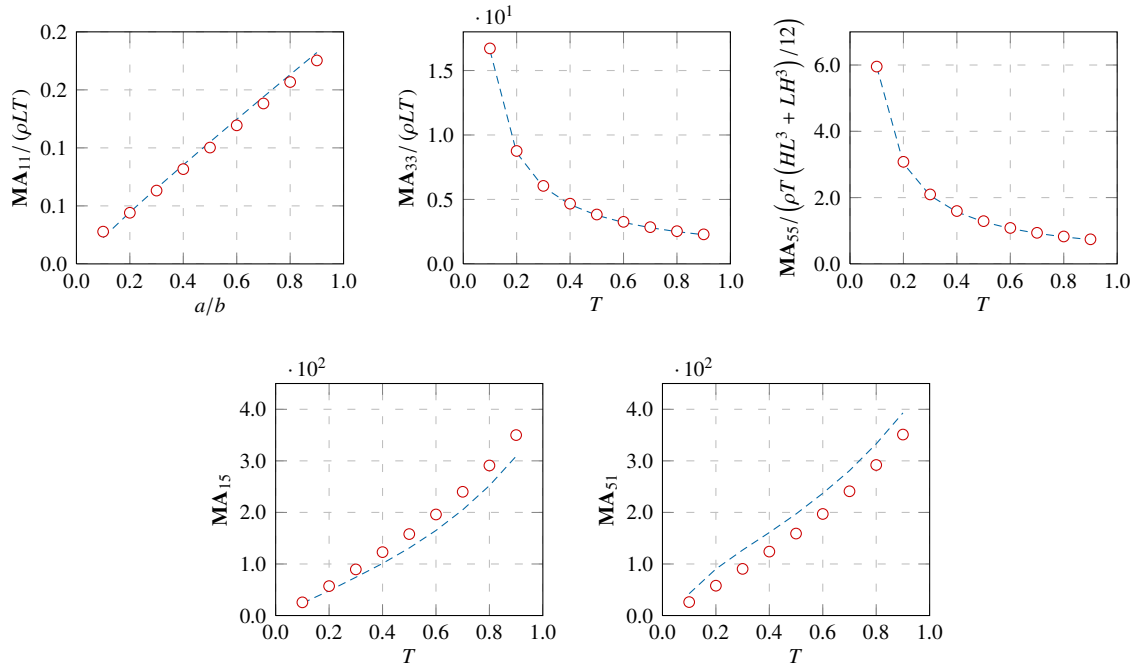


Figure D.5.10 : Barge parallélépipédique – Masses ajoutées en fonction du tirant d'eau : --- résultats Aqua+ et ○ résultats

### D.5.2.7 Un cargo Series 60

Ce cas de validation consiste à appliquer la méthode proposée sur un cargo Series 60 ( $C_B = 0.6$ ,  $L_{WL} = 125$  m) à l'échelle réelle (cf. figure D.5.16 p. 157). Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec le code potentiel Aqua+. Pour chaque solveur, deux maillages sont utilisés. Pour Aqua+, les maillages utilisés sont composés de 1400 et 5600 cellules surfaciques (demi navire). Les maillages volumiques sont, quant à eux, composés de 2.9 et 3.6 millions de cellules et la carène est respectivement discrétisée par 53 000 et 161 000 cellules (navire entier). Des vues des deux maillages les moins fins sont proposées aux figures D.5.11 et D.5.12. Des comparaisons de champs de pression sont également proposées à la figure D.5.15. Par la suite, les maillages les moins fins et les plus fins sont respectivement différenciés par les chiffres 1 et 2.



Figure D.5.11 : Cargo Series 60 – Maillage Aqua+ 1

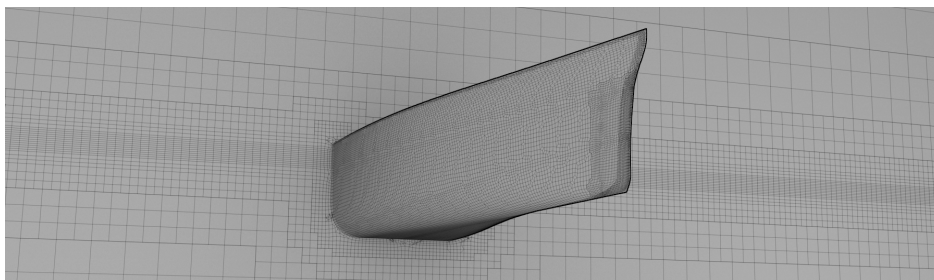


Figure D.5.12 : Cargo Series 60 – Maillage ISIS-CFD 1

Les matrices de masse ajoutée **MA** obtenues sont présentées au tableau D.5.1. Seuls les termes significatifs sont donnés. Afin de faciliter l'analyse, des différences termes à termes sont données aux équations (D.5.27), (D.5.28) et (D.5.29). À l'exception des termes de couplage entre les mouvements d'embarée et de lacet et les mouvements d'embarée et de roulis, les différences entre les deux maillages Aqua+ sont en-dessous de 2% (cf. équation D.5.27 page suivante). Des différences de l'ordre de 10% et 4% sont observées pour les exceptions précédemment citées. Ces termes sont plus difficiles à évaluer car ils résultent uniquement de la faible dissymétrie avant/arrière du navire. Les différences entre les deux maillages ISIS-CFD sont moins marquées

car les termes diffèrent de moins de 1.5% (cf. équation D.5.28). Les différences entre les deux solveurs sont, quant à elles, données par l'équation (D.5.29). Des différences notables apparaissent uniquement sur les termes de couplage cités précédemment. Dans les autres cas, les différences observées sont inférieures à 4.5%. La non convergence des résultats Aqua+ peut expliquer les différences importantes entre les deux solveurs. Malgré des discrétisations très différentes, les résultats obtenus restent proches. Ceci permet de valider la méthode proposée sur un cas d'application industrielle.

Ce cas de validation industriel permet également d'analyser l'influence du nombre d'itérations (prise en compte des non-orthogonalités du maillage) sur l'évaluation de la masse ajoutée. Il est évident que cela dépend fortement de la qualité du maillage mais l'analyse réalisée ici est donnée à titre indicatif. La figure D.5.13 représente la valeur absolue de la différence entre la solution courante et la solution finale (après plus de 20 itérations) et ceci en fonction des itérations de résolution. Au-delà de 3 itérations, les différences ne dépassent pas les 3% et une seule itération est suffisante pour obtenir une bonne estimation de la masse ajoutée. C'est notamment une propriété intéressante lorsqu'il est souhaitable d'évaluer les effets de masse ajoutée à différents instants. Sur ce cas-ci, le résidu (cf. figure D.5.14 page suivante) diminue de 2 ordres uniquement après 7 itérations. Ce nombre important peut s'expliquer par le fait que dès la première itération, la solution obtenue est très proche de la solution finale. Il est également possible de remarquer que les coefficients de relaxation acceptables sont compris entre 0.7 et 0.9.

Aqua+					ISIS-CFD				
1.60e5	5.38e6	-1.68e5	2.81e6	2.01e7	1.66e5	0	-1.72e5	0	2.04e7
-1.67e5	2.79e6	9.11e6	3.33e7	-2.56e7	0	5.47e6	0	2.90e6	0
1.99e7	-5.82e6	-2.57e7	-1.08e8	5.93e9	-1.73e5	0	8.84e6	0	-2.61e7
					0	2.92e6	0	3.21e7	0
					2.05e7	0	-2.61e7	0	4.33e9
					0	-4.39e6	0	-1.06e8	-5.62e5
									6.00e9
1.59e5	5.34e6	-1.67e5	2.70e6	1.99e7	1.65e5	0	-1.72e5	0	2.04e7
-1.66e5	2.69e6	9.03e6	3.29e7	-2.56e7	0	5.48e6	0	2.95e6	0
1.98e7	-5.22e6	-2.56e7	-1.06e8	5.90e9	-1.72e5	0	8.85e6	0	-2.61e7
					0	2.96e6	0	3.23e7	0
					2.05e7	0	-2.61e7	0	4.33e9
					0	-4.45e6	0	-1.06e8	0
									6.02e9

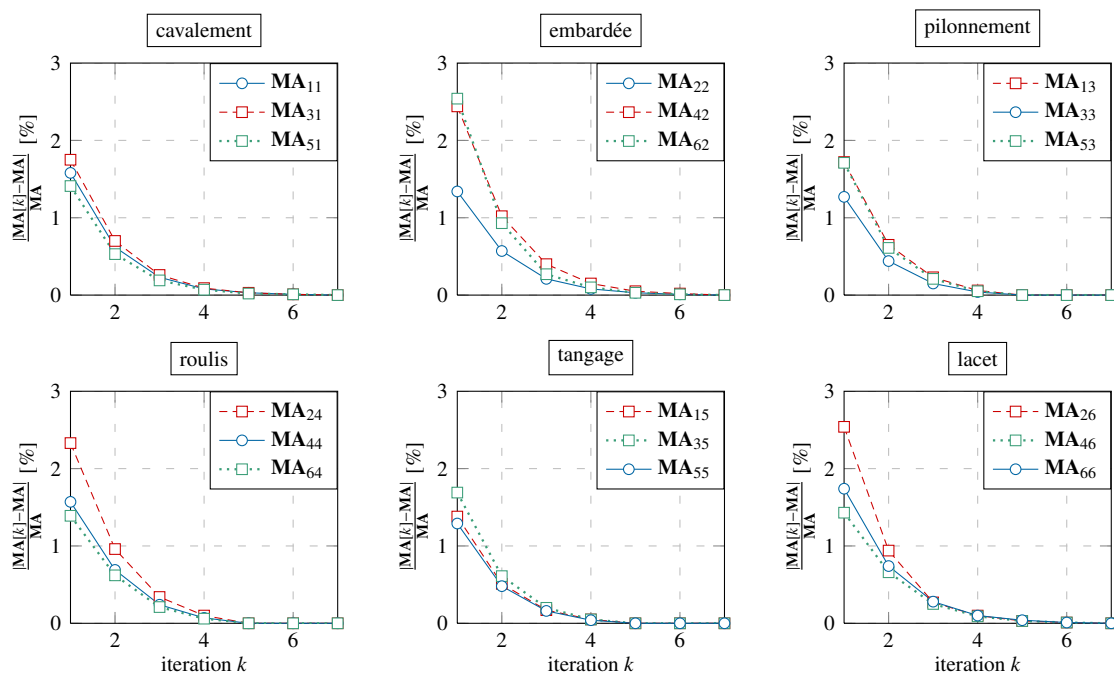
**Tableau D.5.1 :** Cargo Series 60 – Matrice de masse ajoutée **MA** – Maillages 1 (première ligne) et maillages 2 (deuxième ligne)

$$\mathbf{E}_{\text{Aqua+ 2}}^{\text{Aqua+ 1}}[\%] = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.8 & -0.3 & -3.9 & -0.6 & -10.5 \\ -0.3 & -3.5 & -0.8 & -1.2 & -0.0 & -1.7 \\ -0.5 & -10.3 & -0.1 & -1.9 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5.27})$$

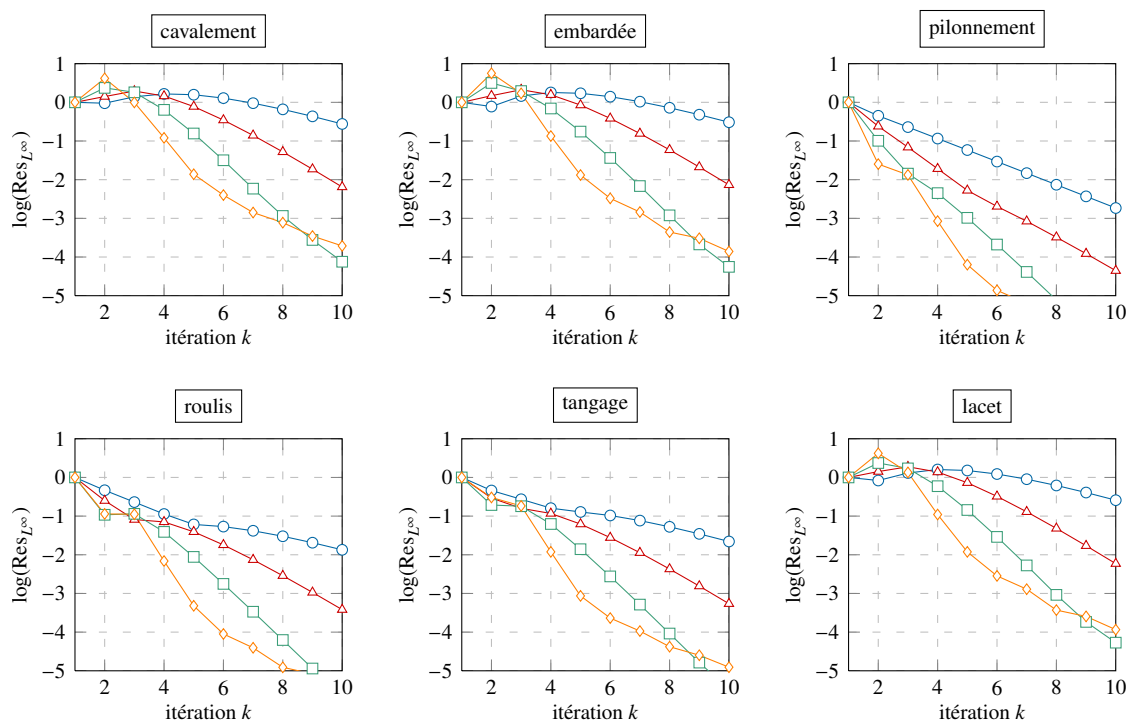
$$\mathbf{E}_{\text{ISIS 2}}^{\text{ISIS 1}}[\%] = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.2 & 1.6 & 0.1 & 1.4 \\ -0.3 & 1.4 & 0.1 & 0.8 & 0.2 & 0.0 \\ -0.1 & 1.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5.28})$$

$$\mathbf{E}_{\text{Aqua+ 2}}^{\text{ISIS 2}}[\%] = \begin{bmatrix} 4.2 & 2.5 & 3.0 & 9.3 & 2.4 & -14.8 \\ 3.8 & 9.8 & -2.0 & -1.9 & 1.9 & -0.1 \\ 3.3 & -14.7 & 1.8 & -0.4 & -1.5 & 2.0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5.29})$$

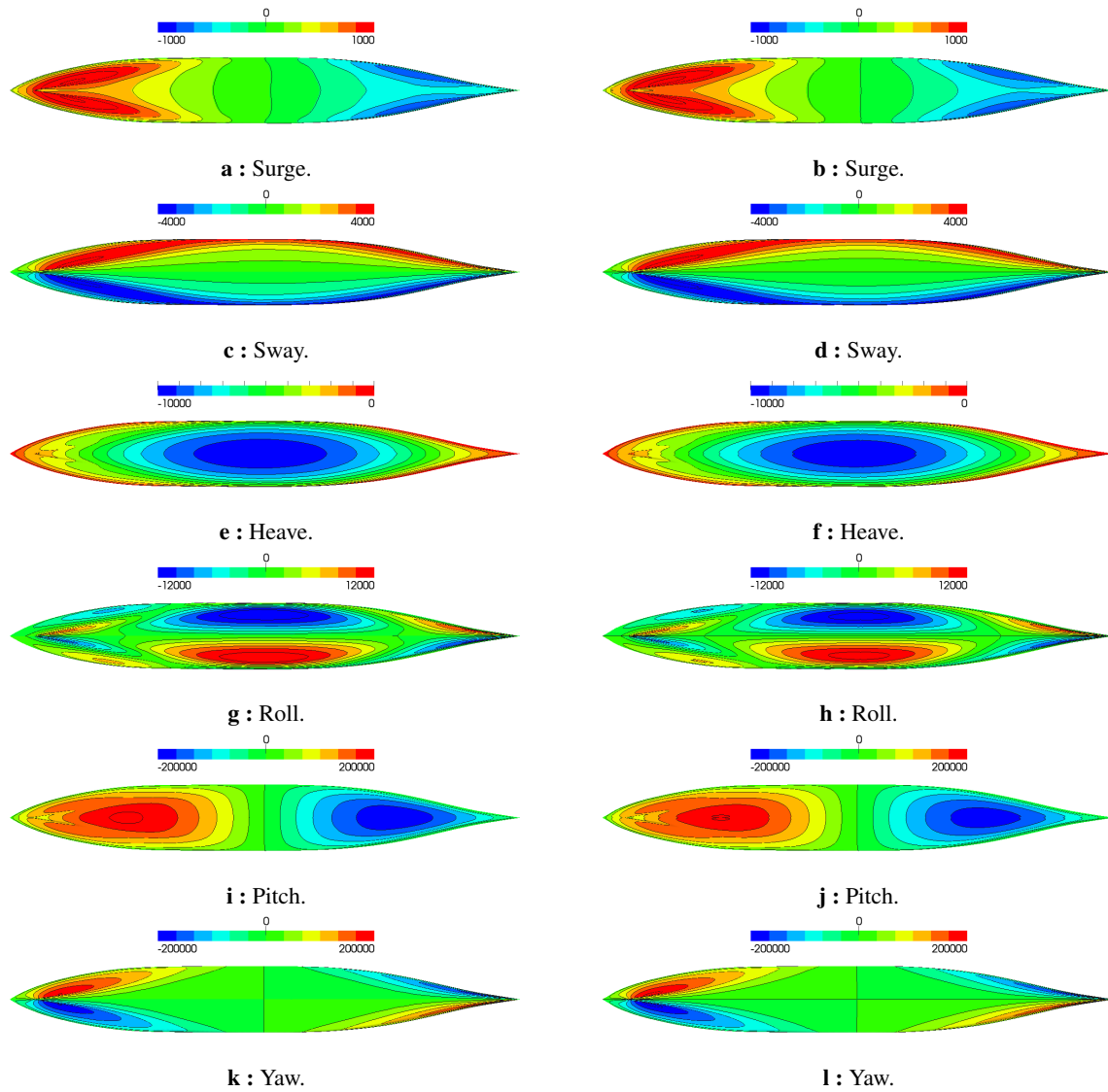




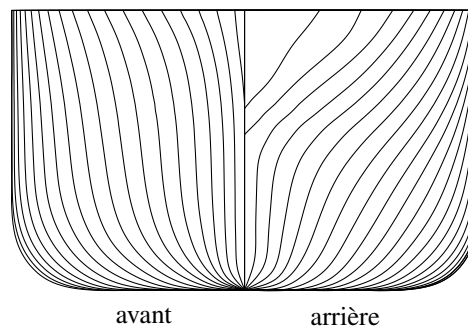
**Figure D.5.13 :** Cargo Series 60 – Pourcentage d’écart entre la solution courante et la solution finale – Maillage ISIS-CFD 2



**Figure D.5.14 :** Cargo Series 60 – Logarithme du résidu pour plusieurs coefficient de relaxation en fonction des itérations – Maillage ISIS-CFD 2 :  $\alpha = 0.3$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 0.7$  et  $\alpha = 0.9$



**Figure D.5.15 :** Cargo Series 60 – Champs de pression [Pa] pour chaque degré de liberté avec les maillages les plus fins (maillages 2) – Vue de dessous – Aqua+ (gauche) et ISIS-CFD (droite)



**Figure D.5.16 :** Cargo Series 60 – Géométrie

### D.5.3 Généralités sur le problème de la masse ajoutée

Afin d'expliciter l'origine numérique des instabilités dues au phénomène de masse ajoutée, il est possible d'analyser un cas mono-dimensionnel [Söding, 2001]. Ce cas consiste à résoudre un problème numérique caractérisé par l'équation (D.5.30). Les notations suivantes sont utilisées :  $y$  la position du corps,  $m$  la masse du corps et  $f$  la totalité des efforts s'exerçant sur ce corps. Les efforts de masse ajoutée sont retranchés artificiellement aux efforts totaux. Ainsi,  $m_a$  est le coefficient de masse ajoutée et  $\bar{f}$  la partie restante des efforts. Pour les besoins de la démonstration, ce reste est supposé indépendant de l'accélération. L'entier  $i$  représente les itérations de résolution implicite.

$$m \cdot \ddot{y}^{i+1} = f^i = \bar{f}^i - m_a \cdot \ddot{y}^i \quad (\text{D.5.30})$$

Dans le cas d'une résolution classique d'équation différentielle ordinaire<sup>30</sup>, l'équation (D.5.30) s'écrit plutôt de la façon suivante :

$$(m + m_a) \cdot \ddot{y}^{i+1} = \bar{f}^i \quad (\text{D.5.31})$$

Dans ce cas, l'équation (D.5.31) ne présente pas d'instabilité particulière vis-à-vis des effets de masse ajoutée. Elle peut donc être résolue par les méthodes classiques d'intégration des équations différentielles ordinaires (cf. annexe G.2 p. 334). Dans le cas d'un couplage fluide-structure partitionné, il n'est pas possible de séparer l'effort fluide de cette façon. C'est donc bien l'équation (D.5.30) qu'il faut résoudre mais cette équation est instable lorsque  $m_a > m$  (cf. section D.5.5 p. 161).

L'idée sous-jacente des méthodes de stabilisation consiste donc à annuler au maximum l'influence du terme déstabilisateur en introduisant dans chacun des membres un terme additionnel. Ce terme est quelque fois appelé masse ajoutée artificielle. Par la suite, il est noté  $\bar{m}_a$ . L'idée générale est donc de résoudre l'équation suivante :

$$(m + \bar{m}_a) \cdot \ddot{y}^{i+1} = f^i + \bar{m}_a \cdot \ddot{y}^i = \bar{f}^i - \underbrace{m_a \cdot \ddot{y}^i + \bar{m}_a \cdot \ddot{y}^i}_{\text{Annulation}} \quad (\text{D.5.32})$$

La masse ajoutée artificielle est couramment adimensionnalisée par la masse. Le coefficient de masse ajoutée artificielle est noté  $\bar{C}_a$  et vaut  $\bar{m}_a/m$ . La valeur de l'accélération sans prise en compte de l'effet de masse ajoutée est notée  $\tilde{y}^i$ . L'équation (D.5.32) peut également s'écrire de façon à faire apparaître un coefficient de relaxation  $\alpha$ <sup>31</sup> défini par  $\alpha = 1/(1 + \bar{C}_a)$  :

$$\ddot{y}^{i+1} = \ddot{y}^i + \frac{1}{1 + \bar{C}_a} \cdot \left( \frac{f^i}{m} - \ddot{y}^i \right) = \ddot{y}^i + \alpha \cdot (\tilde{y}^i - \ddot{y}^i) \quad (\text{D.5.33})$$

En approximant l'accélération avec son équivalence en effort<sup>32</sup>, l'équation (D.5.32), il est possible de montrer qu'ajouter un terme de masse ajoutée artificielle revient, dans une certaine mesure, à relaxer les efforts fluides :

$$m \cdot \ddot{y}^{i+1} = \frac{1}{1 + \bar{C}_a} \cdot f^i + \frac{\bar{C}_a}{1 + \bar{C}_a} \cdot m \cdot \ddot{y}^i = \alpha \cdot f^i + (1 - \alpha) \cdot m \cdot \ddot{y}^i \quad (\text{D.5.34})$$

$$\approx \alpha \cdot f^i + (1 - \alpha) \cdot f^{i-1} \quad (\text{D.5.35})$$

L'idée principale des méthodes de stabilisation est donc d'introduire un terme fictif de masse ajoutée ce qui peut également être vu comme une relaxation de la cinématique ou des efforts fluides. Théoriquement, le coefficient de relaxation doit être d'autant plus faible que le coefficient de masse ajoutée est grand [Söding, 2001]. Une analyse approfondie du coefficient de relaxation maximum assurant la convergence a été réalisée dans [Causin *et al.*, 2005] sur un modèle simplifié d'artère pour un schéma d'intégration explicite. Des travaux similaires ont également été réalisés sur l'influence des schémas de discrétisation temporelle [Förster *et al.*, 2007] sur une cavité à fond flexible pour ces méthodes explicites. Il y est notamment montré qu'une augmentation de la précision des schémas d'intégration temporelle ne permet pas de stabiliser un algorithme de couplage explicite lorsque le coefficient de masse ajoutée est important. Cependant, ils peuvent être utilisés dans le cas contraire

30. Les modèles de manœuvrabilités utilisent majoritairement cette approche par exemple.

31. Afin de simplifier la présentation, l'effort  $f$  est supposé ne pas dépendre de la cinématique du corps. Ce point est discuté plus en détail à la section D.5.6 p. 165.

32. Il est donc supposé que  $m\ddot{y}^i \approx f^{i-1}$ . Ce point est également discuté de manière approfondie à la section D.5.6 p. 165

(aérodynamique par exemple). Le lien entre la diminution du pas de temps et l'augmentation du caractère instable de l'algorithme de couplage y est également montré par une estimation de l'opérateur de masse ajoutée.

En ce qui concerne les algorithmes de couplage implicites, différentes méthodes de relaxation peuvent être utilisées comme la méthode de Aitken [Kassiotis, 2009] ou la méthode du gradient [Wall *et al.*, 2006a] mais comme il a été énoncé à la section D.3.3.4 p. 124, ces méthodes s'appuient sur la résolution complète du problème fluide à chaque itération de couplage ce qui entraîne des coûts de calcul importants.

C'est pour limiter l'impact des méthodes de couplage implicites que des méthodes hybrides (semi-implicites) commencent à apparaître. Par exemple, il a été proposé de traiter uniquement les termes de masse ajoutée de manière implicite (les termes visqueux et de convection étant traités explicitement) [Fernández *et al.*, 2005], [Fernández *et al.*, 2006], [Astorino *et al.*, 2009], [Breuer *et al.*, 2012]. Cette méthode semble efficace pour stabiliser l'algorithme de couplage mais il est nécessaire de modifier en profondeur le solveur fluide. En effet, cette méthode repose sur une méthode de projection de Chorin-Temam<sup>33</sup> au lieu des méthodes classiques de prédiction-correction de type SIMPLE [Fernández, 2011]. Des variantes de ce principe peuvent également être trouvées [Quaini, 2009]. De manière identique, il a été proposé que la position de l'interface soit évaluée de manière explicite alors que le champ de pression et de vitesse du fluide, ainsi que les déplacements d'une structure déformable sont évalués implicitement [Soyibou et Cornel, 2008], [Soyibou, 2009], [Fernández, 2011]. Ces algorithmes appartiennent à la famille des algorithmes semi-implicites. Malgré une augmentation de la stabilité du schéma, la précision de l'algorithme de couplage ne peut être aussi élevée qu'avec une approche implicite.

En conclusion, la meilleure approche semble être de stabiliser le schéma de couplage par une relaxation de la cinématique ou des efforts. Il est cependant évident qu'il ne faut pas relaxer abusivement sous peine d'augmenter les temps de simulation de manière importante. Une analyse approfondie de l'influence de ce coefficient de relaxation doit donc être réalisée. Plus précisément, il est important de vérifier s'il existe un lien avec la masse ajoutée « physique ».

L'introduction de la masse ajoutée au sein du code structure (et non pas une simple relaxation arbitraire) pour stabiliser le schéma de couplage a déjà été réalisée. Cette masse ajoutée a été évaluée par des codes potentiels et appliquée simplement [Young, 2008] ou de manière plus complexe [Durand, 2012]. Des estimations analytiques ont également été utilisées quand cela était possible [Belanger *et al.*, 1995], [Mitra *et al.*, 2006], [Lorentzon, 2009]. Cependant, cela nécessite d'être intrusif au niveau du solveur structure, ce qui peut potentiellement être problématique.

Une fois que le lien entre la masse ajoutée « physique » et la vitesse de convergence de l'algorithme de couplage utilisé est explicité, il peut être intéressant de mettre en place une évaluation dynamique du coefficient de masse ajoutée au cours de la simulation pour qu'il s'adapte dynamiquement aux mieux à la physique comme cela a déjà été suggéré [Belanger *et al.*, 1995], [Söding, 2001].

#### D.5.4 Approche théorique sur les corps rigides

L'analyse de la stabilité des schémas numériques dans le cadre d'une problématique d'interaction fluide-structure présentant des efforts de masse ajoutée importants a été initiée pour des corps rigides dans [Söding, 2001] pour des schémas explicites et implicites. Les travaux réalisés ici se basent uniquement sur une résolution implicite, raison pour laquelle la présentation ci-dessous rappelle uniquement les résultats pour ce type d'algorithme.

L'équation présentée à la section précédente (cf. équation D.5.30 page précédente) est rappelée ci-dessous. Soient  $y$  la position du corps,  $m$  la masse du corps,  $f$  la totalité des efforts s'exerçant sur ce corps,  $\bar{f}$  la partie des efforts supposée indépendante de l'accélération et  $m_a$  le coefficient de masse ajoutée.

$$m \cdot \ddot{y} = f = \bar{f} - m_a \cdot \ddot{y} \quad (\text{D.5.36})$$

33. La résolution de la vitesse du fluide et de la pression sont découplées par une décomposition du champ de vitesse en une partie solénoïde (partie dont la divergence est nulle) et une partie irrotationnelle (décomposition de Helmholtz). De manière simplifiée, la méthode de projection de Chorin-Temam consiste à évaluer un premier champ de vitesse en négligeant le terme du gradient de pression (prédiction). Le champ de pression et la correction de vitesse sont ensuite évalués implicitement par la résolution d'une équation de Poisson. Au contraire de l'étape de prédiction, l'étape de correction est résolue de manière implicite.

Le schéma utilisé étant implicite, une méthode de type point-fixe est utilisée. Pour chaque pas de temps, cela revient à itérer sur  $i$  l'équation suivante :

$$m \cdot \ddot{y}^{i+1} = \bar{f}^i - m_a \cdot \ddot{y}^i \quad (D.5.37)$$

Afin d'étudier la stabilité, la fonction d'erreur est utilisée. Elle est notée  $\epsilon$  et permet d'écrire l'équation suivante :

$$m \cdot (\ddot{y}^{i+1} + \epsilon^{i+1}) = \bar{f}^i - m_a \cdot (\ddot{y}^i + \epsilon^i) \quad (D.5.38)$$

En soustrayant l'équation (D.5.37) à équation (D.5.38), l'équation suivante est obtenue :

$$\epsilon^{i+1} = \frac{m_a}{m} \epsilon^i \quad (D.5.39)$$

La convergence est donc assurée si et seulement si :

$$C_a = \frac{m_a}{m} < 1 \quad (D.5.40)$$

Le domaine de stabilité de la méthode peut être étendu aux situations présentant une masse ajoutée plus grande que la masse du corps en sous-relaxant l'accélération par  $\alpha$ , c.-à-d. en itérant sur  $i$  l'équation suivante :

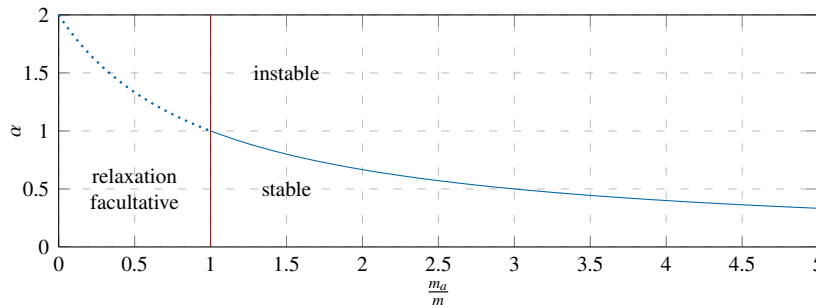
$$m \cdot \ddot{y}^{i+1} = \alpha \cdot (\bar{f}^i - m_a \cdot \ddot{y}^i) + (1 - \alpha) \cdot m \cdot \ddot{y}^i \quad (D.5.41)$$

De manière identique au cas sans relaxation, la convergence est assurée si et seulement si :

$$\alpha < \frac{2}{1 + \frac{m_a}{m}} = \frac{2}{1 + C_a} \quad (D.5.42)$$

L'équation précédente peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\overline{C_a} > \frac{C_a - 1}{2} = \overline{C_{a\min}} \quad (D.5.43)$$



**Figure D.5.17 :** Coefficient de relaxation minimum pour stabiliser le couplage implicite en fonction du ratio de la masse ajoutée sur la masse du corps

Cette approche théorique met en avant plusieurs points importants. Si la masse ajoutée est plus faible que l'inertie du système mécanique, les méthodes implicites de couplage sont théoriquement stables vis-à-vis de ce problème. De plus, il est également possible de légèrement sur-relaxer la solution en théorie. Si la masse ajoutée est très proche ou plus grande que l'inertie du corps, il est nécessaire de stabiliser le schéma de couplage. Relaxer l'accélération permet de stabiliser l'algorithme de couplage. Plus la masse ajoutée est importante, plus la relaxation doit être importante (coefficient de relaxation faible) comme le montre la figure D.5.17. Les critères de stabilité des schémas de couplage implicites ne dépendent pas du pas de temps.

### D.5.5 Illustration sur un modèle analytique de corps rigide

Ce cas d'étude correspond à un cylindre infini de rayon  $r$  égal à 0.5 m de densité  $d$ , placé sans mouvement initial dans un fluide pesant. En deux dimensions, ceci consiste à résoudre numériquement l'équation suivante :

$$\rho_f d \pi r^2 \ddot{y} = -C_a \rho_f \pi r^2 \ddot{y} - C_d \frac{1}{2} \rho_f 2r \dot{y} |\dot{y}| + \rho_f g \pi r^2 (1 - d) \quad (\text{D.5.44})$$

avec :

- $d$  : la densité du cylindre ;
- $\rho_f$  : la masse volumique du fluide ;
- $r$  : le rayon du cylindre ;
- $C_d$  : le coefficient de traînée ;
- $C_a$  : le coefficient de masse ajoutée ;
- $g$  : l'accélération de la pesanteur.

Ce modèle analytique ne représente pas la réalité car cette situation est plus complexe qu'il n'y paraît. Tout d'abord, le coefficient de traînée est ici considéré constant. Or, il est connu que pour un écoulement stationnaire, ce coefficient dépend fortement du nombre de Reynolds de l'écoulement [Hoerner, 1965] car des structures tourbillonnaires plus ou moins stables apparaissent dès que le nombre de Reynolds est plus grand que 5 [Blevins, 1977]. En outre, les coefficients de traînée sont obtenus à partir d'écoulement stationnaire. Ce modèle ne prend donc pas en compte la période transitoire de formation de ces structures tourbillonnaires, structures qui influencent la valeur du coefficient de traînée.

De plus, la force de mémoire, ou force de Basset, est également négligée. Cette force d'hystérésis modélise le temps nécessaire à la couche limite pour se redévelopper après une variation de vitesse. Elle dépend principalement de la diffusion de la vortécité au sein de l'écoulement [Abbad, 2003] et il en existe plusieurs modèles analytiques [Melot, 2006]. Cependant, la prise en compte de l'histoire de l'écoulement est introduite par une intégrale d'une fonction dépendant de l'accélération du cylindre durant la période précédente ce qui complique la résolution numérique.

L'objectif de ce travail n'étant pas de modéliser précisément le comportement du cylindre mais d'illustrer simplement la problématique de la masse ajoutée, cette modélisation est considérée comme suffisante. Les valeurs numériques utilisées sont données au paragraphe ci-dessous.

Le coefficient de masse ajoutée d'un cylindre dans un fluide parfait est théoriquement égal à 1 [Blevins, 1977]. Le coefficient de traînée d'un cylindre dans un écoulement bidimensionnel permanent reste constant et est égal à 1.18 pour un nombre de Reynolds compris entre  $10^4$  et  $4.10^5$  [Hoerner, 1965]. La masse volumique du fluide est fixée à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , l'accélération de la pesanteur est fixée à  $-9.81 \text{ m.s}^{-2}$  selon l'axe  $y$ . Dans un premier temps, la densité du cylindre est fixée à 0.9. Afin de simplifier les notations, les constantes du problème sont rassemblées. L'équation (D.5.44) est donc réécrite de la façon suivante :

$$C_0 \ddot{y} = C_1^a \ddot{y} + C_2^d \dot{y} |\dot{y}| + C_3^g \quad (\text{D.5.45})$$

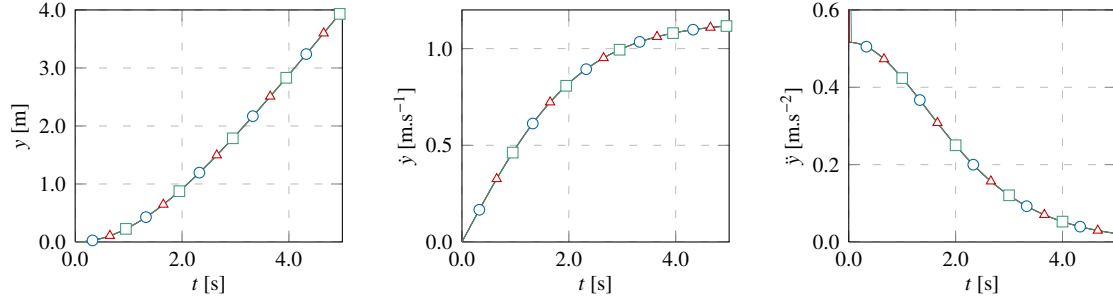
Le coefficient de masse ajoutée adimensionnel du cylindre est également défini par :

$$C_a = \frac{-C_1^a}{C_0} = \frac{1}{d} \quad (\text{D.5.46})$$

L'équation (D.5.45) est résolue numériquement par le schéma d'intégration temporel d'ordre 2 BDF-2 (cf. annexe G.2 p. 334). Les itérations implicites sont réalisées par une méthode de Picard dont la tolérance est fixée arbitrairement à  $10^{-9}$ . Les deux premiers pas de temps sont résolus par un schéma d'intégration de Runge-Kutta 4 (cf. annexe G.2 p. 334).

Pour utiliser les méthodes classiques de résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires, le terme de masse ajoutée doit être ramené à gauche. Ceci est équivalent au système différentiel suivant :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1}^{i+1} \\ \dot{y}_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \Delta t \left[ \frac{C_2^d}{C_0 - C_1^a} \dot{y}_{n+1}^i |\dot{y}_{n+1}^i| + \frac{C_3^g}{C_0 - C_1^a} \right]$$



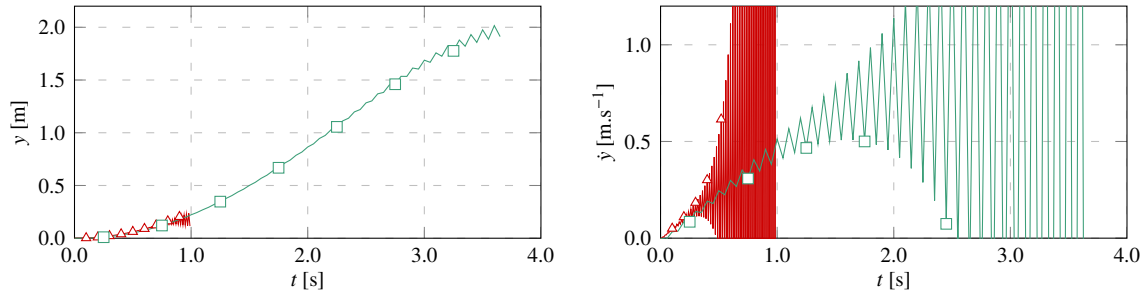
**Figure D.5.18 :** Sphère libre – Cinématique en fonction du temps – Résolution classique d’ODE –  $d = 0.9$  : —○—  $\Delta t=0.005$  s, —△—  $\Delta t=0.010$  s et —□—  $\Delta t=0.050$  s

Dans ce cas, la solution est toujours stable et ceci, même pour des grands pas de temps comme le montre la figure D.5.18.

Pour simuler, un couplage fluide-structure non-monolithique, il est nécessaire de laisser les efforts de masse ajoutée dans le membre de droite, c.-à-d. résoudre implicitement :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1}^{i+1} \\ \dot{y}_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \Delta t \left[ \frac{C_1^a}{C_0} \ddot{y}_{n+1}^i + \frac{C_2^d}{C_0} \dot{y}_{n+1}^i |\dot{y}_{n+1}^i| + \frac{C_3^g}{C_0} \right]$$

Sans traitement particulier du dernier membre de droite, la solution est fortement instable comme le montre la figure D.5.19. L’instabilité apparaît d’autant plus rapidement que le pas de temps est faible ce qui va dans le sens des observations déjà rapportées [Causin *et al.*, 2005] et [Förster *et al.*, 2007]. Ceci s’explique naturellement par l’instabilité intrinsèque du schéma et le nombre d’itérations nécessaires pour atteindre un temps donné qui est d’autant plus grand que le pas de temps est faible. De surcroît, plus le pas de temps est petit et plus variation de l’effort fluide entre chaque pas de temps est dominée par l’effort de masse ajoutée.



**Figure D.5.19 :** Sphère libre – Cinématique en fonction du temps sans traitement particulier du membre de droite –  $d = 0.9$  : —△—  $\Delta t=0.010$  s et —□—  $\Delta t=0.050$  s

Afin de simplifier les notations et la compréhension de la méthode employée, la partie représentative des efforts est notée de la manière suivante :

$$f_{n+1}^i = \frac{C_1^a}{C_0} \ddot{y}_{n+1}^i + \frac{C_2^d}{C_0} \dot{y}_{n+1}^i |\dot{y}_{n+1}^i| + \frac{C_3^g}{C_0} \quad (\text{D.5.47})$$

La méthode employée ici afin de rendre le schéma stable est de relaxer les efforts fluides par un coefficient noté  $\alpha$  (cf. section D.5.3 p. 158). Ainsi, le nouveau système d’équations à résoudre est de la forme :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1}^{i+1} \\ \dot{y}_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \Delta t \left[ \alpha f_{n+1}^i + (1 - \alpha) f_{n+1}^{i-1} \right]$$

Plusieurs pas de temps et coefficients de relaxation sont testés. La solution est bien parfaitement identique à pas de temps égal à celle obtenue par une résolution classique d’ODE (voir précédemment) et ceci, quel que soit le pas de temps ou le coefficient de relaxation utilisé. Le nombre d’itérations implicite est donné au tableau D.5.2. Le nombre d’itérations est d’autant plus important que le pas de temps est grand. Il est également d’autant plus faible que le coefficient de relaxation est proche de celui évalué par le coefficient de masse ajoutée « physique ».

Ceci est également observé lorsque la densité du cylindre est fixée à 0.5 (au lieu de 0.9) (cf. tableau D.5.3). Ce cas permet également de vérifier que la limite théorique du coefficient de relaxation pour stabiliser le schéma est bien retrouvée. En effet, pour cette densité, la limite haute est de 0.66 (cf. équation D.5.43 p. 160).

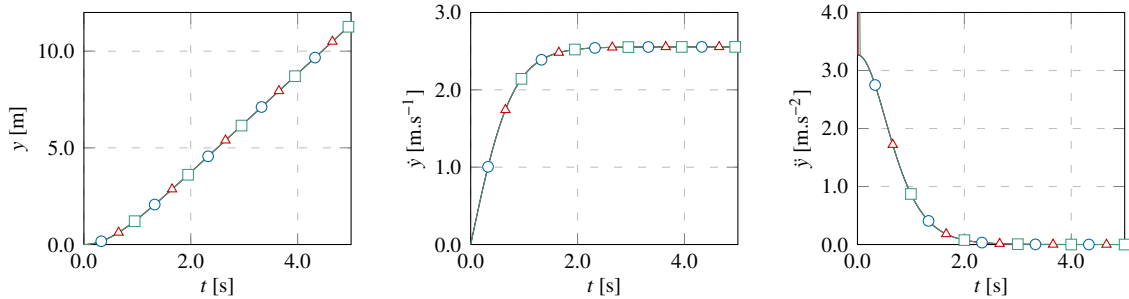
	$\frac{\alpha}{C_a}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45	0.48	0.5	0.55	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Delta t$		9.00	4.00	2.33	1.50	1.22	1.1	1.00	0.82	0.67	0.43	0.25	0.11
0.001		16	11	8	5	6	3	4	13	7	12	23	79
0.005		30	17	11	7	11	4	5	11	10	17	32	114
0.010		36	19	12	8	12	5	6	12	11	19	37	134
0.050		50	25	15	9	15	6	8	15	14	25	52	280

**Tableau D.5.2 :** Sphère libre – Nombre moyen d’itérations implicites –  $d = 0.9 - C_a \approx 1.1$

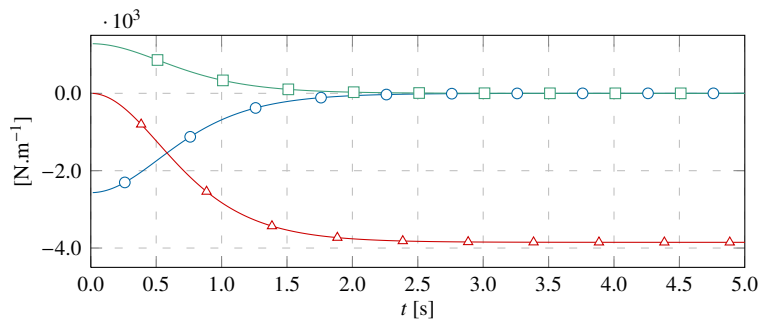
	$\frac{\alpha}{C_a}$	0.1	0.2	0.3	0.33	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Delta t$	$\overline{C_a}$	9.00	4.00	2.33	2.03	1.50	1.22	1.00	0.82	0.67	0.43	0.25	0.11
0.001		13	8	5	3	6	8	12	19	35	↗	↗	↗
0.005		21	11	6	4	8	12	17	27	53	↗	↗	↗
0.010		25	12	6	4	9	13	20	32	65	↗	↗	↗
0.050		32	15	6	7	14	21	33	62	269	↗	↗	↗

**Tableau D.5.3 :** Sphère libre – Nombre moyen d’itérations implicites –  $d = 0.5 - C_a \approx 2.0$

Afin d’étudier plus en détail le cas  $d = 0.5$ , plusieurs graphiques sont proposés. La cinématique est présentée en fonction du temps à la figure D.5.20. Les différents termes des efforts sont donnés à la figure D.5.21. Finalement, le nombre d’itérations implicites en fonction du temps est fourni à la figure D.5.22. Ainsi, lorsque les efforts de masse ajoutée deviennent négligeables par rapport aux autres efforts modélisés, c.-à-d. lorsque l’accélération devient nulle dans ce cas-ci, le nombre d’itérations implicite nécessaire pour atteindre la convergence diminue.



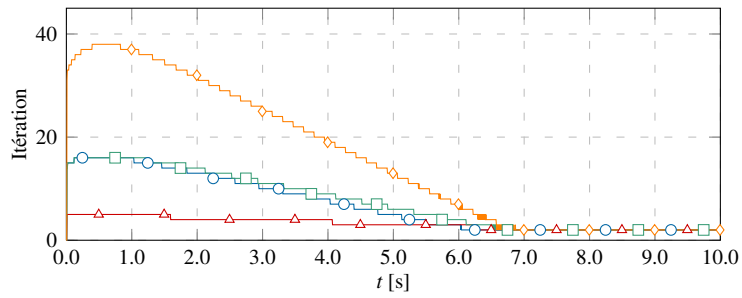
**Figure D.5.20 :** Sphère libre – Cinématique en fonction du temps avec masse ajoutée artificielle –  $d = 0.5$  :  $\circ$   $\Delta t=0.005$  s,  $\triangle$   $\Delta t=0.010$  s et  $\square$   $\Delta t=0.050$  s



**Figure D.5.21 :** Sphère libre – Décomposition des efforts –  $d = 0.5$  :  $\circ$   $C_1^a \ddot{y}$ ,  $\triangle$   $C_2^d \dot{y}$  et  $\square$   $C_1^a \ddot{y} + C_2^d \dot{y} + C_3^g$

Il est également important de remarquer que pour des pas de temps plus importants, le schéma peut diverger. Dans ce cas, la stabilité du schéma d’intégration temporelle rentre également en jeu car, théoriquement, la stabilité du problème fluide-structure est indépendante du pas de temps lorsqu’un algorithme de couplage implicite est utilisé.





**Figure D.5.22 :** Sphère libre – Nombre d’itérations en fonction du temps –  $d = 0.5$  –  $C_a = 2.0$  :  $\alpha = 0.20$  ( $\overline{C_a} = 4.00$ ),  $\alpha = 0.33$  ( $\overline{C_a} = 2.03$ ),  $\alpha = 0.45$  ( $\overline{C_a} = 1.22$ ) et  $\alpha = 0.55$  ( $\overline{C_a} = 0.82$ )

Cette section avait pour objectif d’illustrer le problème de la masse ajoutée d’un point de vue théorique. Comme il a déjà été énoncé précédemment, ce modèle analytique ne peut pas représenter une situation réelle pour plusieurs raisons : simplification des coefficients, non-prise en compte de la force d’histoire, etc. Les conclusions énoncées doivent donc être vérifiées sur un cas d’application réaliste (cf. section E.2 p. 190). Notamment, l’influence du coefficient de relaxation sur le nombre d’itérations implicites n’est peut-être pas aussi importante. Effectivement, la méthode de couplage utilisée entre ISIS-CFD et MBDyn n’attend pas que le solveur fluide converge à chaque itération de couplage. Ceci peut potentiellement changer de manière importante les quelques conclusions énoncées au cours de cette étude de principe.

## D.5.6 Algorithme DFMT-BGS-IFC et masse ajoutée

### D.5.6.1 Introduction

Comme il a déjà été montré au sein des sections précédentes, la prise en compte de l'effet de masse ajoutée au sein de l'algorithme de couplage peut être rapprochée, dans une certaine mesure, d'une relaxation de la cinématique ou des efforts. De plus, le coefficient de relaxation peut être évalué à partir de la masse ajoutée. Ainsi, dans le cas où la structure possède un unique degré de liberté en translation, le coefficient de relaxation, noté  $\alpha$ , peut être déterminé par le coefficient de masse ajoutée artificielle  $\bar{C}_a$  par :

$$\mathbf{H} = \alpha \cdot \mathbf{I}_d \quad \alpha = \frac{1}{1 + \bar{C}_a} \quad (\text{D.5.48})$$

Grâce à des modèles analytiques simplifiés, il est possible d'estimer à la fois une limite haute du coefficient de relaxation (cf. section D.5.4 p. 159) et sa valeur optimale (cf. section D.5.5 p. 161). Cependant, ces modèles analytiques ne représentent pas correctement les différentes étapes de l'algorithme de couplage utilisé.

La différence principale réside dans les caractéristiques de l'algorithme de couplage qui, afin de réduire le nombre d'itérations fluide, n'attend pas que le problème fluide soit résolu entièrement (algorithme DFMT-BGS-IFC). Par conséquent, les efforts fluides manipulés ne sont pas représentatifs d'un état physique convergé pour deux raisons principales :

- les non-linéarités fluides ne sont résolues entièrement qu'à la fin du pas de temps ;
- les variables fluides (pression et vitesse) sont relaxées au cours du processus de résolution du problème fluide pour des raisons de stabilité.

Il est ainsi nécessaire de vérifier l'influence de ce coefficient de relaxation sur un cas pratique (cf. section E.2 p. 190) mais ce n'est pas l'unique point à analyser. La technique de la masse ajoutée artificielle ne peut pas toujours être mise en place de manière rigoureuse. Pour illustrer ce point, la situation mono-dimensionnelle présentée à la section D.5.4 p. 159 est réutilisée. L'équation à résoudre est donc de la forme :

$$m \cdot \ddot{y} = f = \bar{f} - m_a \cdot \ddot{y} \quad (\text{D.5.49})$$

où  $f$  représente la totalité des efforts s'appliquant sur le corps,  $\bar{f}$  la partie des efforts indépendante de l'accélération et  $m_a$  la masse ajoutée. De manière plus précise, l'effort  $f$  est composé de l'effort fluide (effort noté  $f_f$ ) et des efforts structurels extérieurs (efforts notés  $f_s$ ) : effort de gravité, efforts de liaison, etc. Il est également supposé que les efforts structurels sont indépendants de l'accélération. L'équation (D.5.49) est donc équivalente à :

$$m \cdot \ddot{y} = \underbrace{\bar{f}_f - m_a \cdot \ddot{y}}_{f_f} + f_s \quad (\text{D.5.50})$$

Cette équation est résolue dans le cadre d'une formulation en effort et il est supposé que les itérations de couplage sont déjà commencées ( $i \neq 0$ ). Dans le cas général, l'opérateur de relaxation généralisé est noté  $\mathbf{R}$ . Pour une quantité simple<sup>34</sup>, il peut être défini de par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}|_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{x}|_{n+1}^i + \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x}|_{n+1}^{i+1} - \mathbf{x}|_{n+1}^i) \quad (\text{D.5.51})$$

L'opérateur  $\mathbf{R}$  peut également dépendre du temps (c.-à-d. de  $n$ ). Les méthodes de prise en compte de l'effet de masse ajoutée sont décrites à partir de la section D.5.6.3 p. 167. Dans un premier temps, une discussion est réalisée sur un cas monodimensionnel. Le cas d'un corps possédant six degrés de liberté est traité dans un deuxième temps. A chaque fois, les avantages et inconvénients de chacune des méthodes sont explicités.

<sup>34</sup>. Cette définition n'est pas rigoureuse si la quantité  $\mathbf{x}$  représente la cinématique d'un corps rigide possédant six degrés de liberté par exemple. En effet, l'opérateur de relaxation généralisé est dans ce cas non-linéaire. Ce point est explicité ultérieurement.

### D.5.6.2 Notations des corps rigides à 6 degrés de liberté

Lorsque l'étude se base uniquement sur des corps rigides, il est usuel de ne plus définir l'inconnue cinématique du problème couplé fluide-structure comme étant la cinématique de l'interface entre le fluide et le corps rigide considéré (cf. section D.2 p. 113) mais comme étant la cinématique de ce corps rigide. De manière identique, l'inconnue structurelle définie auparavant comme étant le champ des efforts surfaciques généralisés devient la résultante des efforts généralisés (efforts et moments). Cette modification pratique a déjà été réalisée de manière implicite aux sections précédentes. L'avantage de cette formulation est, bien entendu, la forte compacité des informations transmises entre solveurs.

D'un point de vue pratique, les opérateurs de Steklov-Poincaré et de Poincaré-Steklov sont légèrement modifiés. Par exemple, le solveur fluide doit reconstruire le mouvement de l'interface fluide-structure à partir du mouvement du corps rigide et évaluer non plus le champ de contrainte à cette interface mais uniquement sa résultante en termes d'effort généralisé. De la même manière, vis-à-vis de l'algorithme de couplage, le solveur structure ne manipule et ne produit pas les mêmes quantités que dans le cas général. Ces différences n'ayant pas d'impact significatif sur l'exposé réalisé jusqu'à présent, les notations utilisées sont identiques sauf quand il est jugé nécessaire de préciser.

Ainsi, pour un corps rigide, le vecteur cinématique généralisé,  $\delta$  représente les six degrés de liberté du corps considéré. le torseur des efforts extérieurs est, quant à lui, noté  $\lambda$  et défini par :

$$\lambda = [f, m]^t \quad (D.5.52)$$

Pour un corps rigide, le principe fondamental de la dynamique appliqué au corps rigide  $S_1$  en son centre de gravité peut être donné succinctement sous la forme suivante (cf. annexe G.1.1 p. 318) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t \\ \ddot{\delta}_r \end{bmatrix} + \sigma \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \ddot{\delta}_r \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f \\ m \end{bmatrix} \quad (D.5.53)$$

avec :

- $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{I}$  la matrice masse et la matrice d'inertie ;
- $\ddot{\delta}_t$  et  $\ddot{\delta}_r$  les accélérations des degrés de liberté en translation et rotation ( $\ddot{\delta}_t = \dot{v}$  et  $\ddot{\delta}_r = \dot{\omega}$ ) ;
- $f$  et  $m$  les composantes du torseur d'effort extérieur ;
- $\sigma$  la fonction représentative des non-linéarités des degrés de liberté en rotation.

et :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (D.5.54)$$

La matrice d'inertie étant souvent exprimée dans un repère lié au corps rigide (repère noté  $R_g$ ), il est nécessaire de l'exprimer dans le repère galiléen de travail  $R_0$ . Soit l'équation :

$$\mathbf{I}_{(G,S/R_0)} = \mathbf{P}_{(R_0/R_g)} \cdot \mathbf{I}_{(G,S/R_g)} \cdot \mathbf{P}_{(R_0/R_g)}^t \quad (D.5.55)$$

$$= \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)} \cdot \mathbf{I}_{(G,S/R_g)} \cdot \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)}^t \quad (D.5.56)$$

où  $\mathbf{R}_{(R_g \rightarrow R_0)}$  est la matrice d'orientation du corps  $S$  et  $\mathbf{P}_{(R_0/R_g)}$  la matrice de passage correspondante (cf. annexe G.1.2 p. 323). La matrice de masse ajoutée artificielle est une matrice de taille 6x6 pleine et symétrique qu'on peut diviser par blocs de taille 3x3. Elle est notée  $\overline{\mathbf{MA}}$ . Il a également été choisi d'exprimer chacune des sous-matrices dans le repère lié au corps rigide et au niveau de son centre de gravité afin de mieux prendre en compte les éventuels plans de symétrie. Soient les équations suivantes :

$$\overline{\mathbf{MA}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{MA}}_{tt} & \overline{\mathbf{MA}}_{tr} \\ \overline{\mathbf{MA}}_{rt} & \overline{\mathbf{MA}}_{rr} \end{bmatrix} \quad (D.5.57)$$

$$\forall (i, j) \in [t, r] \times [t, r] \quad \overline{\mathbf{MA}}_{ij(G,S/R_0)} = \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)} \cdot \overline{\mathbf{MA}}_{ij(G,S/R_g)} \cdot \mathbf{R}_{(R_0 \rightarrow R_g)}^t \quad (\text{D.5.58})$$

Si aucune spécification n'est réalisée, les matrices ou sous-matrices sont exprimées dans le repère galiléen de référence et au centre de gravité du corps rigide.

### D.5.6.3 Méthode sans relaxation

Cette première méthode est l'idée originale de stabilisation par la technique de la masse ajoutée artificielle. Il est supposé que l'algorithme de couplage se trouve à l'itération de couplage  $i + 1$  et avant la résolution du solveur structure. Par conséquent, une estimation des efforts fluides, c.-à-d. le terme  $f_f|_{n+1}^{i+1}$ , est connue mais les efforts structurels, c.-à-d. le terme  $f_s|_{n+1}^{i+1}$ , sont toujours inconnus puisqu'ils résultent des itérations internes du solveur structure. Cette première méthode consiste donc à résoudre l'équation (D.5.59) en lieu et place de l'équation (D.5.50) :

$$\underbrace{(m + \overline{m}_a)}_{\text{mise en donnée}} \cdot \underbrace{\ddot{y}_{n+1}^{i+1}}_{\substack{\text{évalué par} \\ \text{solveur} \\ \text{structure}}} = \underbrace{f_f|_{n+1}^i}_{\substack{\text{donné par} \\ \text{solveur fluide}}} + \underbrace{f_s|_{n+1}^i}_{\substack{\text{évalué par} \\ \text{solveur} \\ \text{structure}}} + \underbrace{\overline{m}_a \cdot \ddot{y}_{n+1}^i}_{\substack{\text{donné par} \\ \text{algorithme} \\ \text{couplage}}} \quad (\text{D.5.59})$$

L'idée originale consiste donc à ajouter un effort supplémentaire au sein de l'algorithme de couplage (dernier membre de droite) afin d'annuler l'effet de masse ajoutée (cf. équation D.5.32 p. 158). Pour rester consistant, il est nécessaire de compenser cet effort en augmentant partiellement l'inertie de la structure de manière équivalente. D'un point de vue pratique, cela consiste à modifier la mise en donnée réalisée dans le code structure (membre de gauche). Sauf développement particulier, cet algorithme de couplage ne permet pas de modifier dynamiquement la masse ajoutée artificielle (donc le coefficient de relaxation) car il est nécessaire d'avoir un accès direct sur les données d'entrées du solveur structure. Cependant, cette technique de stabilisation a déjà été utilisée avec succès [Leroy, 2004] et [Monroy, 2010]. Si le corps considéré possède 6 degrés de liberté, l'équation (D.5.59) devient :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{MA}}_{tt} & \overline{\mathbf{MA}}_{tr} \\ \overline{\mathbf{MA}}_{rt} & \overline{\mathbf{MA}}_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t|_{n+1}^{i+1} \\ \ddot{\delta}_r|_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} + \sigma \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\delta}_r|_{n+1}^{i+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f_f|_{n+1}^i \\ m_f|_{n+1}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_s|_{n+1}^i \\ m_s|_{n+1}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{MA}}_{tt} & \overline{\mathbf{MA}}_{tr} \\ \overline{\mathbf{MA}}_{rt} & \overline{\mathbf{MA}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t|_{n+1}^i \\ \ddot{\delta}_r|_{n+1}^i \end{bmatrix} \quad (\text{D.5.60})$$

Cette équation diffère de l'équation précédente pour plusieurs raisons. Premièrement, la fonction  $\sigma$  ne contient pas d'inertie ajoutée en plus car il ne faut pas oublier que le phénomène de masse ajoutée est un effort fluide de pression (cf. section D.5.1 p. 141) et non pas une augmentation de l'inertie mécanique du corps rigide [Fossen, 2002]. Par conséquent, la mise en donnée du solveur structure ne doit pas être modifiée sans considérations supplémentaires sous peine de rajouter des termes non physiques dans l'équation du principe fondamental de la dynamique. La méthode de stabilisation par la masse ajoutée artificielle consiste simplement à ajouter un effort stabilisant proportionnel à l'accélération (dernier membre de droite) et à compenser cet ajout dans le membre de gauche pour que, à convergence, le problème résolu soit identique au problème initial.

Deuxièmement, d'un point de vue pratique, la mise en place de cette équation va dans la majorité des cas nécessiter de modifier le solveur structure. Or, ceci peut poser problème si une approche de couplage de codes est utilisée. En effet, les six degrés de liberté deviennent couplés du fait de la non-nullité des matrices  $\overline{\mathbf{MA}}_{rt}$  et  $\overline{\mathbf{MA}}_{tr}$ . Il est donc nécessaire que le solveur structure puisse résoudre le système à 6 inconnues d'une seule traite et non pas 2 systèmes découplés à 3 inconnues. De plus, l'ajout de la matrice  $\overline{\mathbf{MA}}$  dans le membre de gauche ne doit pas modifier l'inertie utilisée dans la fonction  $\sigma$  comme il a déjà été remarqué précédemment.

En conclusion, il est tout à fait envisageable d'utiliser cette méthode dans certains cas restreints. Effectivement, elle a l'avantage d'être rigoureuse et simple à mettre en place lorsque le corps rigide possède un unique degré de liberté ou plus généralement un mouvement plan (dans ce dernier cas, la masse ajoutée artificielle utilisée doit être identique pour les deux degrés de liberté en translation car il est rare de pouvoir définir des inerties différentes selon ces deux degrés de liberté). Dans les autres cas, des modifications au sein du solveur structure seront souvent nécessaires.

### D.5.6.4 Relaxation appliquée à la cinématique

#### D.5.6.4.1 Principe général

Cette section décrit une méthode de prise en compte du phénomène de masse ajoutée sans être intrusif au niveau des solveurs fluide ou structure. Le principal défaut de la méthode précédente était inhérent à la présence du terme de masse ajoutée artificielle dans le membre de gauche de l'équation (D.5.59). L'idée générale de cette méthode consiste donc à transférer ce terme de masse ajoutée artificielle dans le membre de droite. En réalisant cela, il est possible de montrer que cette modification revient à résoudre le problème structure sans prendre en compte l'effet de masse ajoutée (dons sans modification du solveur structure) et appliquer un opérateur de relaxation sur la cinématique de l'interface par la suite. Pour démontrer ce résultat, il est supposé que le corps rigide possède un unique degré de liberté dans un premier temps.

De nouveau, il est supposé que l'algorithme de couplage se trouve à l'itération de couplage  $i + 1$ . Cependant, contrairement à la section précédente, la résolution du solveur structure non modifié est supposée réalisée. Par conséquent, les efforts fluides  $f_f|_{n+1}^i$  et les efforts structurels  $f_s|_{n+1}^i$  sont supposés connus. Les résultats bruts du solveur structure sont marqués par un « tilde ». Soit l'équation suivante :

$$m \cdot \underbrace{\tilde{y}|_{n+1}^{i+1}}_{\substack{\text{évalué par} \\ \text{solveur} \\ \text{structure}}} = \underbrace{f_f|_{n+1}^i}_{\substack{\text{donné par} \\ \text{solveur fluide}}} + \underbrace{f_s|_{n+1}^i}_{\substack{\text{donné par} \\ \text{solveur} \\ \text{structure}}} \quad (\text{D.5.61})$$

L'équation (D.5.59) est réécrite en passant le terme de masse ajoutée artificiel du membre de gauche de l'autre côté :

$$m \cdot \ddot{y}|_{n+1}^{i+1} = \alpha (f_f|_{n+1}^i + f_s|_{n+1}^i) + \alpha \cdot \overline{m}_a \cdot \ddot{y}|_{n+1}^i \quad (\text{D.5.62})$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \overline{m}_a/m} = \frac{1}{1 + C_a} \quad (\text{D.5.63})$$

En divisant l'équation (D.5.62) par la masse  $m$ , puis en remplaçant les termes d'efforts par l'équation (D.5.61) et finalement, en remarquant que  $\alpha \cdot \overline{m}_a/m = 1 - \alpha$ , l'équation représentative d'une relaxation de l'accélération est obtenue :

$$\ddot{y}|_{n+1}^{i+1} = \ddot{y}|_{n+1}^i + \alpha \cdot (\tilde{y}|_{n+1}^i - \ddot{y}|_{n+1}^i) \quad (\text{D.5.64})$$

En résumé, cette seconde méthode consiste à résoudre le système suivant en lieu et place de l'équation (D.5.50) :

$$m \cdot \tilde{y}|_{n+1}^{i+1} = f_f|_{n+1}^i + f_s|_{n+1}^i \quad (\text{D.5.65})$$

$$\ddot{y}|_{n+1}^{i+1} = \ddot{y}|_{n+1}^i + \alpha \cdot (\tilde{y}|_{n+1}^i - \ddot{y}|_{n+1}^i) \quad (\text{D.5.66})$$

Ce système peut également être résumé en une seule équation :

$$\ddot{y}|_{n+1}^{i+1} = \ddot{y}|_{n+1}^i + \alpha \cdot \left( \frac{f_f|_{n+1}^i}{m} + \frac{f_s|_{n+1}^i}{m} - \ddot{y}|_{n+1}^i \right) \quad (\text{D.5.67})$$

Ici, l'étape de prise en compte de l'effet de masse ajoutée intervient donc après le solveur structure, alors que, dans l'approche précédente, elle intervient au sein même du solveur structure. Cet algorithme peut être présenté sous les formes suivantes :

$$\lambda^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = -S_f^* \left( \mathbf{R} \left( S_s^{-1} \left( \lambda^\Gamma|_{n+1}^i \right) \right) \right) \quad \equiv \quad \begin{cases} \tilde{\delta}^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = S_s^{-1} \left( \lambda^\Gamma|_{n+1}^i \right) \\ \delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{R} \left( \tilde{\delta}^\Gamma|_{n+1}^{i+1} \right) \\ \lambda^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = -S_f^* \left( \delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} \right) \end{cases} \quad (\text{D.5.68})$$

Cette méthode est strictement équivalente à la méthode sans relaxation (cf. équation D.5.59 p. 167), uniquement si les deux conditions suivantes sont respectées : le corps rigide possède un unique degré de liberté en rotation (car sinon il y a la présence des non-linéarités de rotation) et si l'effort évalué par le solveur structure  $f_s$  reste constant au cours du temps. En effet, au sein de cette méthode, l'effort évalué par le solveur structure est considéré comme connu et est donc fixé avant l'étape de relaxation. Au contraire, dans la méthode précédente, cet effort était évalué par le solveur structure et pouvait donc s'adapter directement au sein du solveur structure.

D'un point de vue discret et dans le cas mono-dimensionnel, relaxer l'accélération revient également à relaxer la vitesse et la position de manière identique. Effectivement, si un schéma BDF-2 est appliqué sur la vitesse (cf. équation D.5.69) puis la position (cf. équation D.5.70), les expressions relaxées de ces quantités sont bien retrouvées.

$$\dot{y}_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{3} \left[ -\dot{y}_{n-1} + 4\dot{y}_n + 2\Delta t \cdot \left( \alpha \cdot \tilde{\dot{y}}_{n+1}^{i+1} + (1-\alpha) \cdot \dot{y}_{n+1}^i \right) \right] \quad (D.5.69a)$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3} \left[ -\dot{y}_{n-1} + 4\dot{y}_n + 2\Delta t \cdot \tilde{\dot{y}}_{n+1}^{i+1} \right] + (1-\alpha) \cdot \frac{1}{3} \left[ -\dot{y}_{n-1} + 4\dot{y}_n + 2\Delta t \cdot \dot{y}_{n+1}^i \right] \quad (D.5.69b)$$

$$= \alpha \cdot \tilde{\dot{y}}_{n+1}^{i+1} + (1-\alpha) \cdot \dot{y}_{n+1}^i \quad (D.5.69c)$$

$$y_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{3} \left[ -y_{n-1} + 4y_n + 2\Delta t \cdot \left( \alpha \cdot \tilde{y}_{n+1}^{i+1} + (1-\alpha) \cdot y_{n+1}^i \right) \right] \quad (D.5.70a)$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3} \left[ -y_{n-1} + 4y_n + 2\Delta t \cdot \tilde{y}_{n+1}^{i+1} \right] + (1-\alpha) \cdot \frac{1}{3} \left[ -y_{n-1} + 4y_n + 2\Delta t \cdot y_{n+1}^i \right] \quad (D.5.70b)$$

$$= \alpha \cdot \tilde{y}_{n+1}^{i+1} + (1-\alpha) \cdot y_{n+1}^i \quad (D.5.70c)$$

Si le corps rigide possède six degrés de liberté, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_t^{i+1} \\ \tilde{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} + \sigma \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^i \\ \mathbf{m}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s^i \\ \mathbf{m}_s^i \end{bmatrix} \quad (D.5.71a)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t^{i+1} \\ \ddot{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t^i \\ \ddot{\delta}_r^i \end{bmatrix} + \mathbf{H}_a \cdot \left( \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_t^{i+1} \\ \tilde{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t^i \\ \ddot{\delta}_r^i \end{bmatrix} \right) \quad (D.5.71b)$$

Une fois les accélérations  $\ddot{\delta}_t$  et  $\ddot{\delta}_r$  relaxées, il est nécessaire de reconstruire les quantités représentatives des vitesses (linéaire et angulaire) et positions (position dans l'espace et orientation) de manière cohérente avec le schéma en temps utilisé. Du fait de leur caractère linéaire, les vitesses linéaire et angulaire et la position dans l'espace peuvent utiliser le même opérateur de relaxation que celui appliqué à l'accélération (cf. équations D.5.69 et D.5.70). Par contre, du fait de la modification de la vitesse angulaire, l'orientation du corps doit être totalement reconstruite. L'opérateur de relaxation généralisé  $\mathbf{R}$  contient donc cette étape de reconstruction et est non-linéaire par conséquent (cf. section D.5.6.4.2 p. 171).

La recherche de la définition de l'opérateur de relaxation appliquée à l'accélération  $\mathbf{H}_a$  dans le cas d'un corps à six degrés de liberté se réalise de manière identique au cas monodimensionnel à une exception près. En effet, afin de ne pas complexifier le problème, il est préférable de ne pas actualiser la partie représentative des non-linéarités des mouvements de rotation, c.-à-d. le terme lié à la fonction  $\sigma$ . Cela revient à considérer que ce terme agit comme un effort qui, comme les efforts physiques, n'est pas actualisé lors de l'étape de relaxation. En conclusion, le problème à résoudre est de la forme (cf. équation D.5.60 p. 167) :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{tt}} & \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{tr}} \\ \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{rt}} & \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{rr}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t^{i+1} \\ \ddot{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} = \\ & - \sigma \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \ddot{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^i \\ \mathbf{m}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s^i \\ \mathbf{m}_s^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{tt}} & \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{tr}} \\ \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{rt}} & \overline{\mathbf{M}\mathbf{A}_{rr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t^i \\ \ddot{\delta}_r^i \end{bmatrix} \quad (D.5.72) \end{aligned}$$

De manière identique au cas monodimensionnel, les trois premiers termes du membre de droite sont remplacés par l'évaluation réalisée par le solveur structure (cf. équation D.5.71a page précédente), c.-à-d. les termes  $\tilde{\delta}_t$  et  $\tilde{\delta}_r$  qui sont les résultats bruts du solveur. Soit l'équation :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{MA}}_{tt} & \overline{\mathbf{MA}}_{tr} \\ \overline{\mathbf{MA}}_{rt} & \overline{\mathbf{MA}}_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_t^{i+1} \\ \tilde{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_t^{i+1} \\ \tilde{\delta}_r^{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{MA}}_{tt} & \overline{\mathbf{MA}}_{tr} \\ \overline{\mathbf{MA}}_{rt} & \overline{\mathbf{MA}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_t^i \\ \tilde{\delta}_r^i \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}}) \cdot \tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{M} \cdot \tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} + \overline{\mathbf{MA}} \cdot \tilde{\delta}_{n+1}^i \quad (\text{D.5.73})$$

Quelques manipulations matricielles appliquées à l'équation précédente permettent de retrouver l'expression de l'opérateur de relaxation :

$$(\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}}) \cdot \tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{M} \cdot (\tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} - \tilde{\delta}_{n+1}^i) + (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}}) \cdot \tilde{\delta}_{n+1}^i \quad (\text{D.5.74})$$

$$\tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} = (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}})^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot (\tilde{\delta}_{n+1}^{i+1} - \tilde{\delta}_{n+1}^i) + \tilde{\delta}_{n+1}^i \quad (\text{D.5.75})$$

Ainsi par identification entre les équations (D.5.71b) et (D.5.75) :

$$\mathbf{H}_a = (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}})^{-1} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}})^{-1} \cdot (\mathbf{M}^{-1})^{-1} \quad (\text{D.5.76})$$

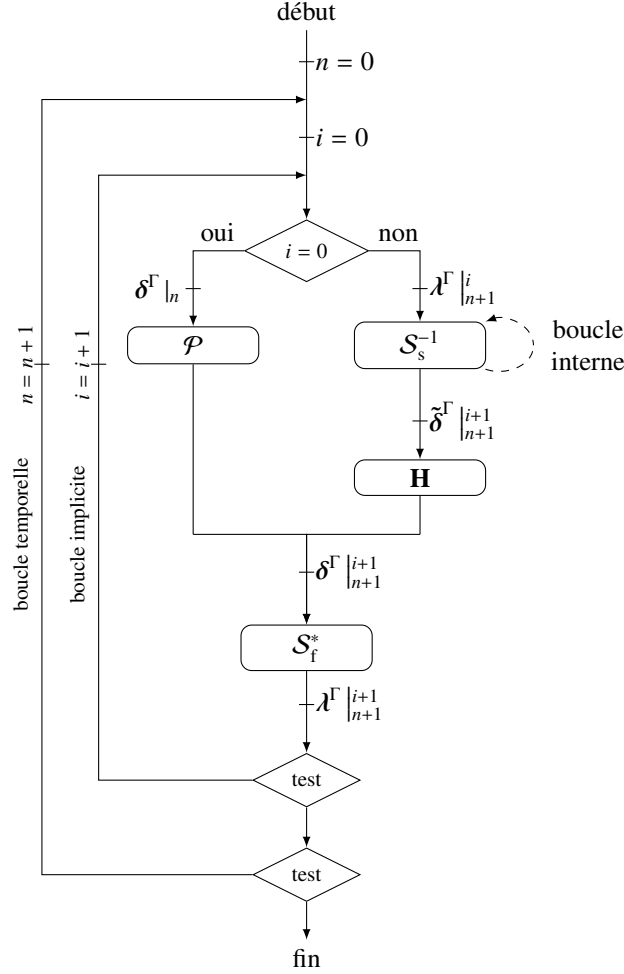
$$= (\mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{MA}}))^{-1} = (\mathbf{I}_d + \mathbf{M}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{MA}})^{-1} \quad (\text{D.5.77})$$

Du fait de sa définition, l'opérateur  $\mathbf{H}_a$  possède une dépendance en temps. Comme il a déjà été énoncé précédemment, l'opérateur généralisé  $\mathbf{H}_a$  consiste à relaxer les accélérations et reconstruire les autres quantités. Cette étape est présentée à la section D.5.6.4.2 page suivante. Finalement, cet algorithme est présenté sous forme algorithmique et graphique (cf. algorithme D.5.1 et figure D.5.23 page suivante).

**Données :**  $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s|_0, \xi^f|_0, \xi^s|_0$

1	$n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2	$t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3	<b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4	$i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5	<b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
6	<b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	
7	$\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^r, \dots)$	Prédiction de la cinématique
8	<b>sinon</b>	
9	$\tilde{\delta}^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème structure
10	$\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathbf{R}(\tilde{\delta}^\Gamma _{n+1}^{i+1})$	Relaxation de la cinématique
11	<b>finsi</b>	
12	$\lambda^\Gamma _{n+1}^{i+1} = -\mathcal{S}_f^*(\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1})$	Résolution du problème fluide
13	$i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
14	<b>fin</b>	
15	$n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
16	$t \leftarrow t + \Delta t$	
17	<b>fin</b>	

**Algorithme D.5.1 :** DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué à la cinématique



**Figure D.5.23 :** DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué à la cinématique

#### D.5.6.4.2 Reconstruction des vitesses et positions

Cette section présente la méthode de reconstruction des vitesses et positions après l'étape de relaxation des accélérations. Cette méthode ne doit pas dépendre de la paramétrisation choisie mais uniquement du schéma d'intégration temporelle utilisé. À titre d'exemple, c'est le schéma d'intégration BDF-2 qui est présenté ici car c'est celui utilisé au cours de ces travaux. Cependant, cette méthode est valable pour tous les schémas d'intégration temporelle implicite mono-pas ou multi-pas. Il est rappelé que les accélérations ont préalablement été relaxées de la façon suivante (cf. équation D.5.71b p. 169) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}_{n+1}^{i+1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}_{n+1}^i + \mathbf{H}_a \cdot \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}_{n+1}^{i+1} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}_{n+1}^i \right) \quad (\text{D.5.78})$$

Comme l'opérateur de relaxation des accélérations  $\mathbf{H}_a$  est matriciel (taille 6x6), la même méthode que celle utilisée en mono-dimensionnel (cf. équation D.5.69 p. 169) peut être utilisée pour reconstruire les vitesses linéaires et angulaires. Soit l'équation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{n+1}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{n+1}^i + \mathbf{H}_a \cdot \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}_{n+1}^{i+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{n+1}^i \right) \quad (\text{D.5.79})$$

La reconstruction des positions linéaires et angulaires ne peut s'effectuer de la même façon du fait du couplage entre les degrés de liberté en translation et en rotation. Ainsi, pour la position linéaire, le schéma BDF-2 est



directement appliqué :

$$\mathbf{x}_{|n+1}^{i+1} = \frac{1}{3} \left[ -\mathbf{x}_{|n-1} + 4\mathbf{x}_{|n} + 2\Delta t \cdot \mathbf{v}_{|n+1}^{i+1} \right] \quad (\text{D.5.80})$$

La méthode reconstruction de l'orientation du corps à partir la vitesse angulaire nécessite plus d'étapes et dépend de la paramétrisation utilisée. Ici, il a été choisi d'utiliser la même paramétrisation que celle utilisée dans MBDyn, c.-à-d. la paramétrisation de Gibbs-Rodrigues (cf. annexe G.1.2.5.3 p. 330). Cependant, toute autre paramétrisation peut être utilisée. En outre, pour éviter les singularités liées à cette paramétrisation, une approche d'actualisation est utilisée (cf. section C.2.3 p. 89). L'orientation de référence utilisée dans ce cas est celle du corps au pas de temps précédent.

La première étape consiste à évaluer les quantités connues dans le repère de référence choisi, c.-à-d. les paramètres de Gibbs-Rodrigues aux deux pas de temps précédents (cf. annexe G.1.2 p. 323). Ils sont respectivement notés  $\mathbf{r}_{/R_n}|_n$  et  $\mathbf{r}_{/R_n}|_{n-1}$ . Du fait de la référence choisie, le paramètre de Gibbs-Rodrigues  $\mathbf{r}_{/R_n}|_n$  est nul. Cependant, afin de rester général, ce terme est gardé tout le long de cette présentation. D'après la relation liant la vitesse angulaire et la dérivée temporelle du paramètre de Gibbs-Rodrigues (cf. équation C.2.6 p. 90), le schéma BDF-2 est utilisé pour évaluer le paramètre de Gibbs-Rodrigues du corps par rapport à l'orientation de référence utilisée, soit l'équation :

$$\mathbf{r}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{3} \left[ -\mathbf{r}_{/R_n}|_{n-1} + 4\mathbf{r}_{/R_n}|_n + 2\Delta t \cdot \dot{\mathbf{r}}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} \right] \quad (\text{D.5.81})$$

$$= \frac{1}{3} \left[ -\mathbf{r}_{/R_n}|_{n-1} + 4\mathbf{r}_{/R_n}|_n + 2\Delta t \cdot \mathbf{G}_{r/R_n} \left( \mathbf{r}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} \right] \quad (\text{D.5.82})$$

Cette équation étant non-linéaire, un simple processus de Picard est utilisé pour sa résolution. La valeur initiale est prise égale à  $\mathbf{r}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{0}$ . La dernière étape consiste à reconstruire la matrice de rotation du corps à partir du paramètre de Gibbs-Rodrigues (cf. équation C.1.10 p. 78) et à la traduire dans le repère global, soit l'équation :

$$\mathbf{R}_{|n+1}^{i+1} = \mathbf{R}_{|n} \cdot \mathbf{R} \left( \mathbf{r}_{/R_n}|_{n+1}^{i+1} \right) \quad (\text{D.5.83})$$

#### D.5.6.4.3 Autre méthode de reconstruction des vitesses et positions

La méthode utilisée pour reconstruire les vitesses et positions s'appuie sur la méthode de résolution et le schéma d'intégration temporelle de MBDyn. De manière générale, lorsqu'un solveur de type « boîte noire » est utilisé, il n'est pas toujours possible de connaître cette méthode et ce schéma d'intégration. La question de la méthode de reconstruction à utiliser se pose donc naturellement. L'idée brièvement présentée ici de manière formelle a été proposée par Alban Leroyer.

La méthode de reconstruction des vitesses et des positions doit obligatoirement converger vers les résultats du solveur structure lorsque la convergence du problème couplé est atteinte. La méthode de reconstruction doit donc s'appuyer sur ce critère. Pour faciliter la présentation, la méthode est illustrée à la figure D.5.24.

Soit une quantité quelconque notée  $\mathbf{c}$  (cette quantité peut représenter la position ou l'orientation). Les résultats bruts du solveur structure sont notés  $\tilde{\mathbf{c}}$  et  $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}$ . La première étape consiste à construire la valeur de  $\mathbf{c}$  au pas de temps précédent à partir d'un schéma mono-pas d'intégration temporelle choisi (Crank-Nicolson par exemple). Cette quantité est notée  $\hat{\mathbf{c}}$  et n'est pas obligatoirement identique à celle évaluée par le solveur structure. La deuxième étape consiste à relaxer la dérivée temporelle de cette quantité (prise en compte des effets de masse ajoutée). La troisième et dernière étape consiste à reconstruire la quantité grâce au schéma d'intégration temporelle choisi et ceci à partir de la reconstruction de la valeur de cette quantité au pas de temps précédent et la valeur relaxée de sa dérivée temporelle.

Il est important de remarquer que, lorsque la convergence est atteinte, les dérivées temporelles manipulées lors de la seconde étape sont égales. Puisque le même schéma d'intégration temporelle est appliqué à la première et à la troisième étape, la valeur des quantités avant et après l'étape de reconstruction sont identiques. La méthode de reconstruction proposée converge donc vers les résultats du solveur structure lorsque la convergence de l'algorithme de couplage est atteinte. Par contre, avant qu'un état convergé soit atteint, les résultats peuvent être différents.

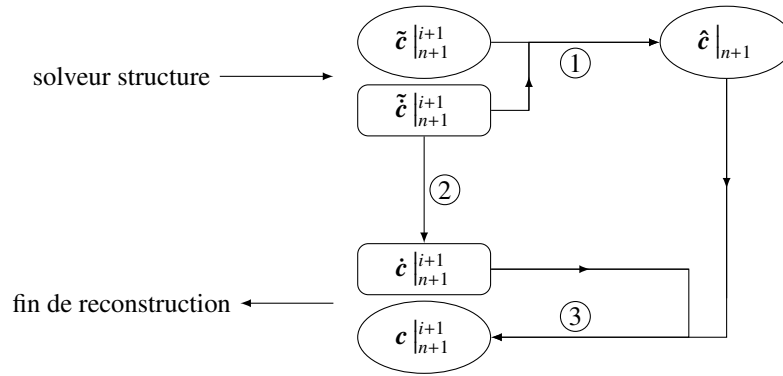


Figure D.5.24 : Autre méthode de reconstruction des vitesses et positions

#### D.5.6.4.4 Prise en compte des actionneurs

Lorsqu'un actionneur (un safran ou un aileron de stabilisation par exemple) est piloté, la relaxation ne doit pas s'appliquer sur ce corps puisque la dynamique de cet actionneur n'est pas résolue mais imposée. De plus, si des interfaces glissantes sont utilisées au niveau du maillage fluide pour prendre en compte le mouvement relatif de cet actionneur par rapport au corps auquel il est lié, ces interfaces doivent rester coincidentes pour éviter des problèmes numériques. L'étape de relaxation doit donc rester cohérente avec les contraintes cinématiques.

Pour rester le plus général possible, c.-à-d. éviter de modéliser les liaisons cinématiques pouvant exister entre deux corps au niveau de l'algorithme de couplage, une méthode simple a été développée. Cette dernière consiste à sauvegarder la position et l'orientation relatives de l'actionneur par rapport au corps qui le pilote avant que n'ait lieu l'étape de relaxation. La cinématique du corps pilotant est ensuite relaxée et reconstruite selon la méthode générale. La position et l'orientation relative de l'actionneur est ensuite réutilisée pour calculer ses nouvelles positions son orientations. Grâce à cette méthode, la position et l'orientation relatives des deux corps sont conservées.

Il reste à reconstruire les vitesses et les accélérations linéaires et angulaires de l'actionneur. Ces dernières sont simplement reconstruites par une méthode inverse (vitesse puis accélération au lieu de vitesse puis position) de celle présentée précédemment (cf. section D.5.6.4.2 p. 171). Si le mouvement de l'actionneur est une fonction de la cinématique du corps qui le pilote, il est possible que cette étape transgresse ponctuellement la loi de pilotage. Néanmoins, comme un algorithme de couplage implicite est utilisé, cette transgression disparaît naturellement une fois que la convergence est atteinte.

#### D.5.6.5 Relaxation appliquée sur les efforts

La méthode précédente permet de prendre en compte l'effet de masse ajoutée sans être intrusif au niveau des solveurs. Cependant, elle nécessite de reconstruire les quantités relatives à la vitesse et la position. Ce dernier point peut s'avérer particulièrement complexe dans le cas de structure déformable par exemple. Il est donc intéressant de proposer une nouvelle méthode également non-intrusive mais plus simple à utiliser dans les cas précédemment cités.

L'idée principale de la méthode présentée dans cette section est d'appliquer un opérateur de relaxation sur les efforts et moments s'exerçant sur les structures considérées car ces quantités sont plus simples à manipuler. En effet, la dérivation temporelle de ces quantités n'intervient pas dans l'expression du problème général. Il n'y a donc aucune reconstruction nécessaire. Cependant, cette dernière méthode repose sur deux approximations présentées ci-dessous. Le cas mono-dimensionnel est de nouveau utilisé dans un premier temps.

Cette méthode reprend l'étape principale de la précédente, c.-à-d. tous les termes de masse ajoutée artificielle sont passés du côté des efforts (cf. équation D.5.62 p. 168). Mais, le terme d'accélération compensateur du membre de droite est remplacé par une approximation en termes d'effort :

$$\ddot{y}_{n+1}^i \approx \frac{1}{m} (f_f^{i-1}|_{n+1} + f_s^{i-1}|_{n+1}) \quad (\text{D.5.84})$$

Ainsi, l'équation (D.5.62) devient l'équation suivante :

$$m \cdot \ddot{y}_{n+1}^{i+1} = \underbrace{\alpha \cdot f_f^i|_{n+1} + (1 - \alpha) \cdot f_f^{i-1}|_{n+1}}_{\text{effort fluide relaxé}} + \underbrace{\alpha \cdot f_s^i|_{n+1} + (1 - \alpha) \cdot f_s^{i-1}|_{n+1}}_{\text{effort structure relaxé}} \quad (\text{D.5.85})$$

Au contraire de la méthode précédente, la dépendance de l'accélération aux itérations précédentes est supprimée. Cette approximation semble avoir des conséquences sur la stabilité de l'algorithme de couplage dans des cas très extrêmes (très faible masse ajoutée artificielle par rapport à la masse ajoutée « physique ») qui, il est vrai, peuvent être évités facilement en gardant une masse ajoutée artificielle proche de la masse ajoutée « physique ». Cette analyse est réalisée lors du cas d'application présenté à la section E.2 p. 190.

De surcroît, il est difficile de relaxer dynamiquement les efforts structures sans intervenir directement au sein du solveur structure. Il est donc nécessaire de supposer que ces derniers ne déstabilisent pas l'algorithme de couplage de manière significative. Ainsi, l'étape de relaxation ne s'applique qu'aux efforts fluides :

$$m \cdot \ddot{y}_{n+1}^{i+1} = \underbrace{\alpha \cdot f_f^i|_{n+1} + (1 - \alpha) \cdot f_f^{i-1}|_{n+1}}_{\substack{\text{effort fluide relaxé par} \\ \text{l'algorithme de couplage}}} + \underbrace{f_s^i|_{n+1}}_{\substack{\text{évalué par} \\ \text{solveur} \\ \text{structure}}} \quad (\text{D.5.86})$$

L'avantage de cette méthode est sa simplicité de mise en œuvre. L'algorithme de couplage doit uniquement réaliser une simple relaxation de l'effort fluide. Cependant, cette méthode ne s'appuie pas de manière rigoureuse sur le phénomène de masse ajoutée. Ceci peut avoir des conséquences sur la stabilité ou la vitesse de convergence de l'algorithme de couplage.

En conclusion, l'étape de prise en compte de l'effet de masse ajoutée intervient après le solveur fluide ce qui la rend très simple à implémenter. Cet algorithme peut être présenté sous les formes suivantes :

$$\lambda_{n+1}^\Gamma = \mathbf{R} \left( -\mathcal{S}_f^* \left( \mathcal{S}_s^{-1} \left( \lambda_{n+1}^\Gamma \right) \right) \right) \quad \equiv \quad \begin{cases} \delta_{n+1}^\Gamma = \mathcal{S}_s^{-1} \left( \lambda_{n+1}^\Gamma \right) \\ \tilde{\lambda}_{n+1}^\Gamma = -\mathcal{S}_f^* \left( \delta_{n+1}^\Gamma \right) \\ \lambda_{n+1}^\Gamma = \mathbf{R} \left( \tilde{\lambda}_{n+1}^\Gamma \right) \end{cases} \quad (\text{D.5.87})$$

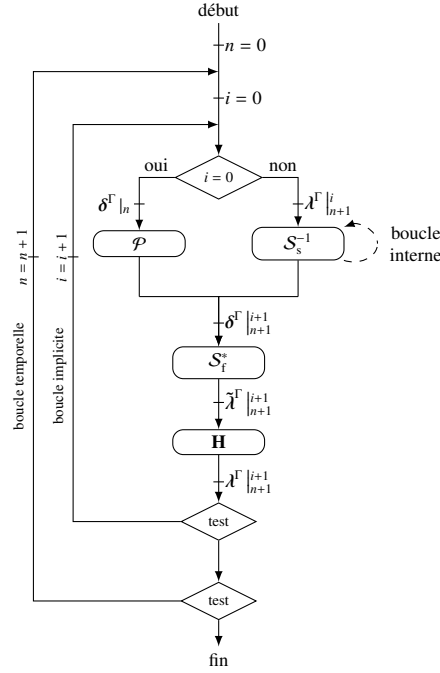
Ici, l'opérateur de relaxation généralisé peut être obtenu de façon identique à la méthode précédente. Il est défini par :

$$\mathbf{R} \left( \tilde{\lambda}_{n+1}^\Gamma \right) = \lambda_{n+1}^\Gamma + \mathbf{H} \cdot \left( \tilde{\lambda}_{n+1}^\Gamma - \lambda_{n+1}^\Gamma \right) \quad (\text{D.5.88})$$

avec :

$$\mathbf{H} = \left( \mathbf{I}_d + \mathbf{M}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{M}} \mathbf{A} \right)^{-1} \quad (\text{D.5.89})$$

Finalement, cet algorithme est présenté sous forme algorithmique et graphique (cf. algorithme D.5.2 page suivante et figure D.5.25 page suivante) et n'a pas été étudié en détail au cours de ces travaux.



**Figure D.5.25 :** DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué aux efforts fluides

**Données :**  $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s|_0, \xi^f|_0, \xi^s|_0$

1	$n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2	$t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3	<b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4	$i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5	<b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
6	<b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	
7	$\delta^{\Gamma} _{n+1} = \mathcal{P}(\delta^{\Gamma} _n, \delta^{\Gamma} _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
8	<b>sinon</b>	
9	$\delta^{\Gamma} _{n+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^{\Gamma} _i)$	Résolution du problème structure
10	<b>finsi</b>	
11	$\tilde{\lambda}^{\Gamma} _{n+1} = -\mathcal{S}_f^*(\delta^{\Gamma} _{n+1})$	Résolution du problème fluide
12	<b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	Si nouvelle itération temporelle
13	$\lambda^{\Gamma} _{n+1} = \tilde{\lambda}^{\Gamma} _{n+1}$	Sauvegarde des efforts
14	<b>sinon</b>	
15	$\lambda^{\Gamma} _{n+1} = \mathbf{R}(\tilde{\lambda}^{\Gamma} _{n+1})$	Relaxation des efforts fluides
16	<b>finsi</b>	
17	$i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
18	<b>fin</b>	
19	$n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
20	$t \leftarrow t + \Delta t$	
21	<b>fin</b>	

**Algorithme D.5.2 :** DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué aux efforts

### D.5.7 Masse ajoutée pour les corps déformables de type poutre

Cette partie n'ayant pas été implémentée au moment de la rédaction de ce manuscrit, seule des considérations et des idées très générales sont présentées.

Tout au long de cette section, une illustration est proposée (cf. figure D.5.26 page suivante). Cette dernière représente la matrice de masse ajoutée d'une poutre caractérisée par deux nœuds possédant six degrés de liberté chacun. Il est rappelé que le terme en position  $(i, j)$  de cette matrice représente l'effort généralisé (force et moment) de masse ajoutée selon la direction  $i$  lorsque le degré de liberté  $j$  possède une accélération unitaire. Il est également supposé que les deux nœuds possèdent une orientation identique. Dans le cas contraire, des changements de repère sont nécessaires.

Les effets de masse ajoutée liés au mouvement et/ou à la déformation d'un corps flexible sont plus difficiles à appréhender. D'un point de vue rigoureux, la matrice des efforts de masse ajoutée d'un corps flexible est de taille égale au nombre de nœuds appartenant à la frontière du corps multiplié par le nombre de degré de liberté de chacun de ces nœuds [Förster *et al.*, 2007], [Sigrist, 2011]. Dans le cas des poutres, la taille de la matrice de masse ajoutée est donc égale au nombre de nœuds de la poutre multiplié par six lorsqu'une modélisation tridimensionnelle est utilisée (cf. figure D.5.26 page suivante cas 1).

Cette approche est souvent nécessaire lorsque l'on souhaite évaluer des modes et fréquences propres d'une structure déformable couplée à un fluide. Lorsque la matrice de masse ajoutée sert uniquement à évaluer un opérateur de relaxation (comme c'est le cas dans ces travaux), il semble possible de réaliser quelques simplifications afin de pas complexifier inutilement l'algorithme de couplage.

Pour commencer, il est nécessaire de déterminer les degrés de liberté pouvant potentiellement créer des effets de masse ajoutée importants. Par définition, les structures de type poutre sont élancées. Il est donc peu probable que les mouvements de cavement<sup>35</sup>, de tangage et de lacet d'un nœud<sup>36</sup> produisent des effets de masse ajoutée susceptibles de déstabiliser l'algorithme de couplage<sup>37</sup>. Cette première considération réduit donc le nombre de calculs pour évaluer la matrice de masse ajoutée par un facteur 2. Pour des raisons identiques, les termes liés aux efforts de cavement, de tangage et de lacet peuvent être négligés (cf. figure D.5.26 page suivante cas 2).

Si le nombre de calculs est nettement divisé, il n'en reste pas moins que le problème reste complexe pour plusieurs raisons. En effet, la taille de la matrice de masse ajoutée du système mécanique reste inchangée et le nombre de calculs pour déterminer cette matrice reste important. La taille de la matrice de masse ajoutée peut notamment être problématique car l'évaluation de l'opérateur de relaxation proposé au cours de ces travaux nécessite de réaliser deux inversions de matrices (cf. section D.5.6.4 p. 168).

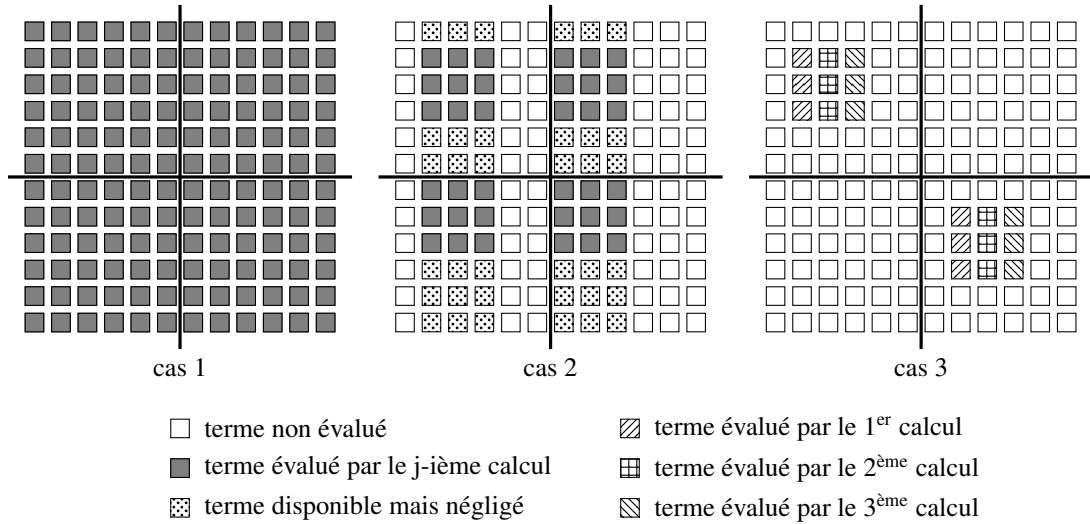
Pour que la méthode développée pour les corps rigides soit facilement applicable, il est nécessaire de définir une matrice de masse ajoutée de taille six pour chaque nœud. Si aucune considération supplémentaire n'est réalisée, cela reviendrait simplement à négliger les termes de couplages entre les différents nœuds de la poutre. Ici, c'est une autre méthode qui est envisagée. Au lieu de réaliser un calcul pour chacun des degrés de liberté de chaque nœud de la poutre, il est proposé de réaliser seulement trois calculs pour estimer les termes importants. Pour chaque degré de liberté potentiellement pertinent (embardée, pilonnement et roulis), une accélération unitaire locale est appliquée à la totalité des nœuds de la poutre. Les efforts de pression résultants sont ensuite intégrés et transmis aux différents nœuds pour remplir les termes de la matrice de masse ajoutée artificielle correspondants (cf. figure D.5.26 page suivante cas 3). Cette méthode a déjà été utilisée avec succès sur des corps flexibles de type membrane où une accélération unitaire normale était appliquée à chaque maille du maillage structure. La matrice de masse ajoutée était alors évaluée par une méthode potentielle et intégrée directement dans le code structure [Durand, 2012].

Il est important de remarquer que, lorsque cette méthode est utilisée, les termes évalués intègrent une partie des termes de couplage entre les différents nœuds mais d'une manière différente. Effectivement, une partie des termes correspondant à un degré de liberté d'un certain nœud résulte du même degré de liberté des autres nœuds. Cela peut se comprendre assez facilement sur un cas caractérisé par deux nœuds possédant un degré de liberté chacun (ce degré de liberté étant le même). Soient  $x_i$  le degré de liberté du nœud  $i$ ,  $f_i^a$  l'effort de masse

35. Ce point est discuté en détail plus tard.

36. Ici, ce n'est pas le mouvement global de la poutre qui est considéré mais bien le mouvement d'un seul et unique nœud.

37. La convention d'orientation des poutres utilisées jusqu'à présente utilisée, c.-à-d. que le premier vecteur du repère des sections est proche de la tangente à la fibre neutre de la poutre.



**Figure D.5.26 :** Différentes matrices de masse ajoutée pour une poutre tridimensionnelle discrétisée par deux nœuds

ajoutée s'exerçant sur ce nœud et  $MA_{ij}$  les coefficients de la matrice de masse ajoutée. Lorsque la première (ou la deuxième) approche est utilisée, les efforts de masse ajoutée sont évalués par :

$$f_1^a = MA_{11}^{(1)}\ddot{x}_1 + MA_{12}^{(1)}\ddot{x}_2 \quad (D.5.90)$$

$$f_2^a = MA_{21}^{(1)}\ddot{x}_1 + MA_{22}^{(1)}\ddot{x}_2 \quad (D.5.91)$$

où  $MA_{11}^{(1)}$  et  $MA_{21}^{(1)}$  sont évalués avec  $\ddot{x}_1 = 1$  et  $MA_{12}^{(1)}$  et  $MA_{22}^{(1)}$  avec  $\ddot{x}_2 = 1$ . Lorsque la troisième approche est utilisée, ces mêmes efforts sont évalués par :

$$f_1^a = MA_{11}^{(3)}\ddot{x}_1 \quad (D.5.92)$$

$$f_2^a = MA_{22}^{(3)}\ddot{x}_2 \quad (D.5.93)$$

où  $MA_{11}^{(3)}$  et  $MA_{22}^{(3)}$  sont évalués avec  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 1$ . Comme le problème de la masse ajoutée est linéaire (cf. section D.5.1 p. 141), il est possible de supposer les égalités suivantes :

$$MA_{11}^{(3)} = MA_{11}^{(1)} + MA_{12}^{(1)} \quad (D.5.94)$$

$$MA_{22}^{(3)} = MA_{21}^{(1)} + MA_{22}^{(1)} \quad (D.5.95)$$

Sous ces conditions, l'approche 3 revient donc à poser :

$$f_1^a = (MA_{11}^{(1)} + MA_{12}^{(1)})\ddot{x}_1 \quad (D.5.96)$$

$$f_2^a = (MA_{21}^{(1)} + MA_{22}^{(1)})\ddot{x}_2 \quad (D.5.97)$$

En conclusion, si les les accélérations des deux nœuds sont identiques, la troisième approche est équivalente à la première approche. Cependant, le lien entre les deux méthodes n'est pas évident à établir dans le cas général (orientation des nœuds différente). Tant que des comparaisons n'auront pas été réalisées, il est difficile de supposer des résultats de la méthode.

À un tout autre niveau, il a été supposé que les effets de masse ajoutée dus au mouvement de cavement des différents nœuds étaient négligeables. Cela est souvent vrai lorsque le mouvement de corps rigide de la poutre est bloqué. Dans le cas contraire, il est pertinent de prévoir également une évaluation des effets de masse ajoutée selon ce degré de liberté et ceci, a minima pour les deux nœuds représentatifs des extrémités de la poutre.

## D.5.8 Masse ajoutée d'une poutre de section carrée

### D.5.8.1 Description

L'objectif de cette section est de présenter et d'analyser les résultats obtenus concernant la masse ajoutée d'un corps flexible de type poutre. La géométrie est une poutre de longueur  $L = 1$  m de section carrée ( $h = 0.1$  m) discrétisée par 11 nœuds. Cette dernière est totalement immergée. La masse volumique de l'eau est fixée à  $\rho = 1000$  kg m<sup>-3</sup>.

### D.5.8.2 Généralités

Au sein du manuscrit, différentes idées permettant de simplifier la prise en compte des effets de masse ajoutée pour un corps flexible de type poutre ont été énoncées. Ces trois méthodes différentes sont illustrées à la figure D.5.27 pour une poutre représentée par deux nœuds. Le premier cas correspond au cas rigoureux, c.-à-d. que la matrice de masse ajoutée d'une poutre est une matrice carrée de dimension égale au nombre de nœuds multiplié par le nombre de degrés de liberté de chaque nœud (soit  $6n$  où  $n$  représente le nombre de nœuds de la poutre). Chaque colonne de cette matrice est évaluée par une résolution de l'équation de masse ajoutée. Ainsi, les efforts généralisés de masse ajoutée s'exerçant sur le nœud  $k$  sont donnés par :

$$f_k^a = \mathbf{MA}_{kk}^{(1)} \cdot \ddot{\delta}_k + \sum_{i=0, i \neq k}^n \mathbf{MA}_{ki}^{(1)} \cdot \ddot{\delta}_i \quad (\text{D.5.98})$$

où  $\mathbf{MA}^{(1)}$  est une sous-matrice évaluée par la méthode 1. Lorsque la deuxième approche est utilisée, certains termes sont négligés du fait des propriétés géométriques des corps longilignes. Seuls les effets liés aux degrés de liberté en embardée, pilonnement, roulis et, si nécessaire, cavaleme, sont gardés. Malgré cette première simplification, les sous-matrices extra-diagonales ne sont pas nulles, ce qui rend difficile l'évaluation de l'opérateur de relaxation puisque ce dernier nécessite deux inversions matricielles. C'est la raison pour laquelle, une approche différente a été envisagée.

Ainsi, au lieu d'appliquer une accélération unitaire à chaque degré de liberté de chaque nœuds, il a été proposé d'appliquer une accélération unitaire à tous les nœuds en même temps pour chaque degré de liberté. Par conséquent, l'équation de masse ajoutée n'est résolue que quatre fois au maximum pour chaque poutre. Les efforts de pression résultants sont ensuite intégrés et transmis aux différents nœuds pour remplir les termes de la matrice de masse ajoutée artificielle correspondants. Il est également important de remarquer que, dans le cas d'une poutre droite, cette approche revient répartir sur les différents nœuds les efforts de pression obtenus dans le cadre d'une évaluation des effets de masse ajoutée pour un corps rigide. C'est la raison pour laquelle ces deux approches sont comparées dans un premier temps (cf. section D.5.8.3.1 page suivante).

En résumé, lorsque la méthode 3 est employée, cela revient à supposer que :

$$\mathbf{MA}_{ij}^{(3)} = \mathbf{0} \quad \text{si } i \neq j \quad (\text{D.5.99})$$

$$\mathbf{MA}_{kk}^{(3)} = \mathbf{MA}_{kk}^{(1)} + \sum_{i=0, i \neq k}^n \mathbf{MA}_{ki}^{(1)} \quad \text{sinon} \quad (\text{D.5.100})$$

où  $\mathbf{MA}^{(3)}$  est une sous-matrice évaluée par la méthode 3. Les efforts généralisés de masse ajoutées sont ainsi donnés par :

$$f_k^a = \mathbf{MA}_{kk}^{(3)} \cdot \ddot{\delta}_k = \mathbf{MA}_{kk}^{(1)} \cdot \ddot{\delta}_k + \sum_{i=0, i \neq k}^n \mathbf{MA}_{ki}^{(1)} \cdot \ddot{\delta}_k \quad (\text{D.5.101})$$

Ainsi, pour que les méthodes 1 et 3 soient presque équivalentes, il est nécessaire que  $\mathbf{MA}_{ki}^{(1)} \approx \mathbf{0}$  lorsque  $i$  est très différent de  $k$  puisque, dans le cas contraire (c.-à-d. lorsque  $i = k - 1$  ou  $i = k + 1$ ), il est cohérent de supposer que  $\ddot{\delta}_i \approx \ddot{\delta}_k$ . L'objectif de cette section est de vérifier cette hypothèse sur un cas d'application simple. Pour cela, les méthodes 2 et 3 sont comparées dans un deuxième temps (cf. section D.5.8.3.2 page suivante).

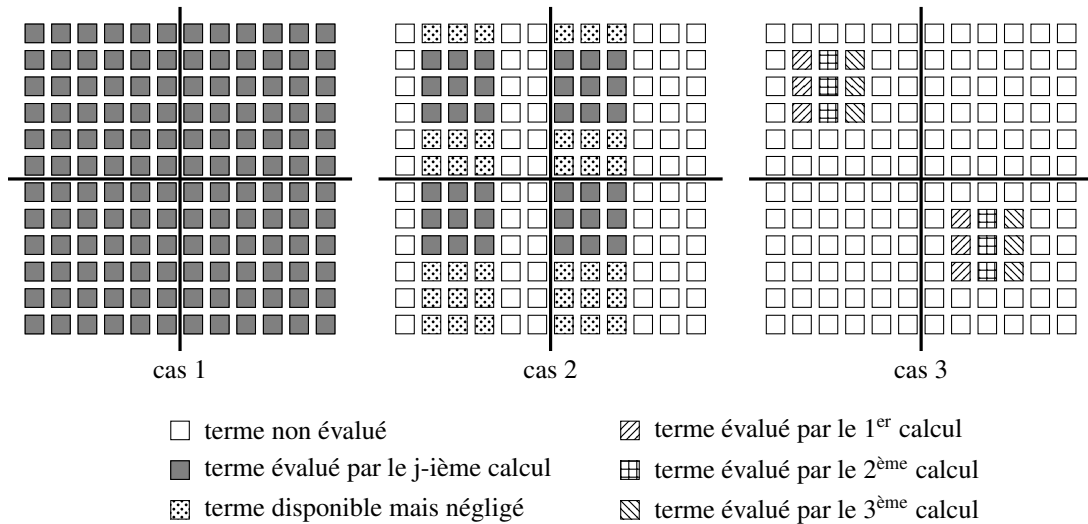


Figure D.5.27 : Différentes matrices de masse ajoutée pour une poutre tridimensionnelle discrétisée par deux nœuds

### D.5.8.3 Résultats et analyses

#### D.5.8.3.1 Méthode 3 et corps rigide

Les différents termes de la matrice de masse ajoutée obtenus en considérant la poutre comme étant rigide sont proposés à l'équation (D.5.102). Seules les quatre premières lignes et colonnes sont présentées puisque les effets liés aux degrés de liberté en tangage et en lacet ne sont pas considérés.

$$\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.29 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 10.29 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0022 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5.102})$$

Dans la suite de cette étude, les termes des matrices de masse ajoutée sont adimensionnalisés selon des coefficients élémentaires définis comme étant les termes diagonaux de la matrice ci-dessus divisés par le nombre de nœuds de la poutre (ici 11).

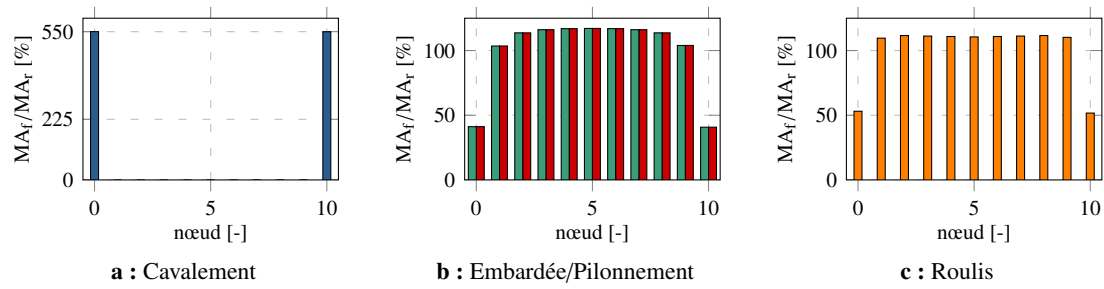
La matrice de masse ajoutée évaluée par la méthode 3 est présentée à la figure D.5.36. De nouveau, les effets liés aux degrés de liberté en tangage et en lacet ne sont pas considérés. Afin de simplifier l'analyse, les termes diagonaux adimensionnalisés sont donnés à la figure D.5.28 par degré de liberté. Il a également été vérifié que la somme des termes liés à chacun des degrés de liberté était bien égale au terme correspondant de la matrice évaluée en considérant la poutre comme étant rigide<sup>38</sup>. Des visualisations des champs de pression obtenus par les deux approches (champs identiques dans le cas d'un poutre droite) sont proposées aux figures D.5.29, D.5.30 et D.5.31 page suivante.

#### D.5.8.3.2 Méthodes 3 et méthode 2

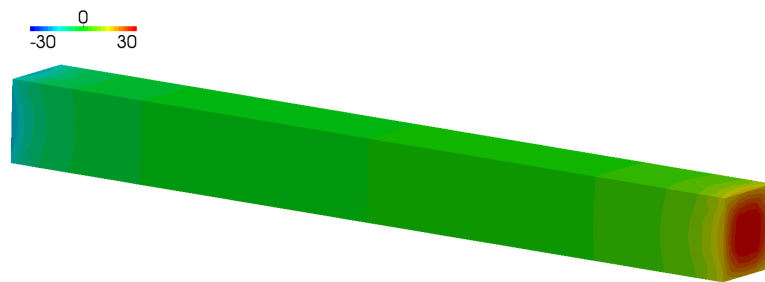
Les matrices de masse ajoutée évaluées par la méthode 2 et la méthode 3 sont présentées aux figures D.5.35 et D.5.36. La matrice obtenue par la méthode 3 est diagonale par bandes. Cette dernière permet de vérifier que l'hypothèse simplificatrice utilisée par la méthode 2 est valable. En effet, les seules sous-matrices extra-diagonales non-nulles sont celles à côté des sous-matrices diagonales. De plus, du fait du caractère linéaire du problème de la masse ajoutée, les sommes des termes des différentes lignes sont bien égales aux termes diagonaux correspondants évalués par la méthode 3. Ceci peut également se voir de manière qualitative par les figures D.5.30 et D.5.33 par exemple. En effet, la somme des champs de pression évalués par la méthode 2 (cf.

38. Cela revient à vérifier que la somme des pourcentages est égale à 1100%.

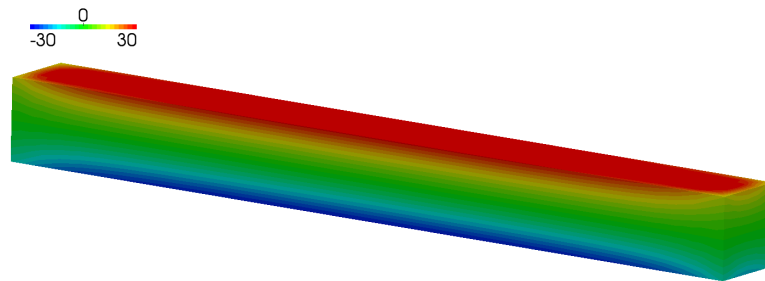




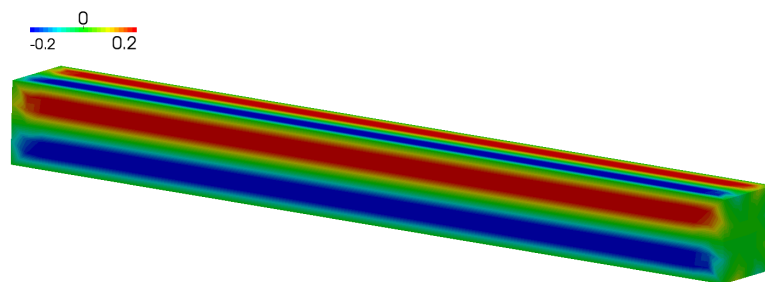
**Figure D.5.28** : Une poutre de section carrée – Contribution des différents nœuds sur la matrice de masse ajoutée – Termes diagonaux adimensionnalisés par les coefficients élémentaires – Cas 3



**Figure D.5.29** : Une poutre de section carrée – Champ de pression pour le degré de liberté en cavement [Pa] – Cas corps rigide et cas 3



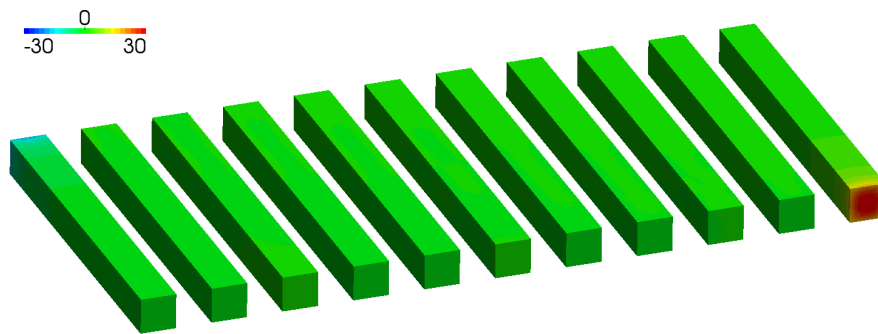
**Figure D.5.30** : Une poutre de section carrée – Champ de pression pour le degré de liberté en pilonnement [Pa] – Cas corps rigide et cas 3



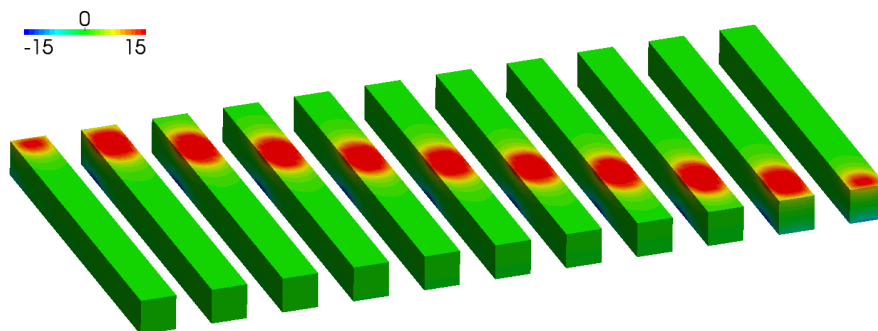
**Figure D.5.31** : Une poutre de section carrée – Champ de pression pour le degré de liberté en roulis [Pa] – Cas corps rigide et cas 3

figure D.5.33) est bien égale au champ de pression évalué par la méthode 3 (cf. figure D.5.30 page précédente). De plus, il est possible de remarquer que les modifications du champ de pression restent très locales lorsque ...

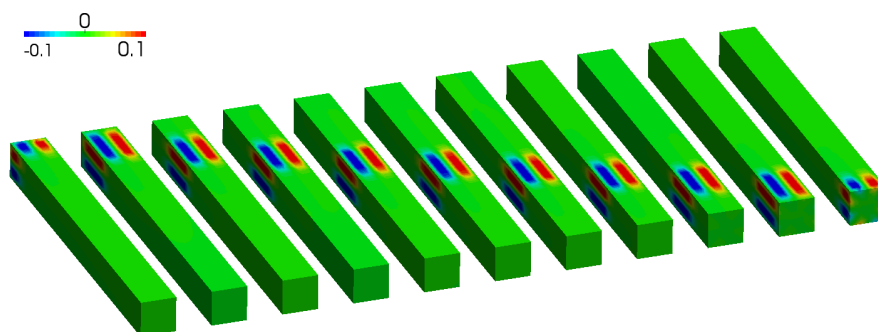
Pour informations, la contribution totale des nœuds voisins représentent environ 45 % pour les mouvements d'embarée et de pilonnement et 35 % pour le mouvement de roulis (cf. figure D.5.35 page suivante). Ainsi, même si il est possible que ces pourcentages évoluent de manière importante avec des géométries différentes, il semble nécessaire de prendre en compte leurs contributions.



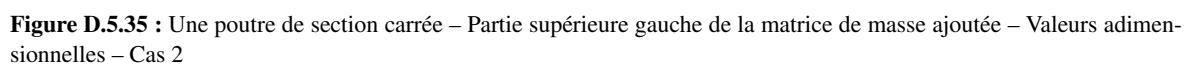
**Figure D.5.32 :** Une poutre de section carrée – Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement [Pa] – Cas 2

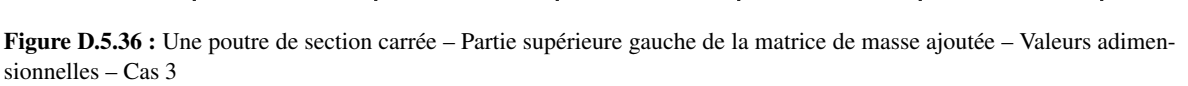


**Figure D.5.33 :** Une poutre de section carrée – Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement [Pa] – Cas 2



**Figure D.5.34 :** Une poutre de section carrée – Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement [Pa] – Cas 2





### D.6 Résumé

Le problème d'interaction fluide-structure est présenté sous une forme générale et formelle par le biais de la formulation de Steklov-Poincaré. Ces opérateurs sont des compositions d'opérateurs élémentaires : opérateurs de résolution des problèmes fluide et structure, opérateur de modification maillage et opérateurs de projection à l'interface entre le fluide et la structure. La formulation de Steklov-Poincaré permet de résumer le problème d'interaction fluide-structure, c.-à-d. la continuité de la cinématique et l'équilibre des efforts au niveau de l'interface entre le fluide et la structure, en une seule équation. La manipulation de cette dernière permet d'aboutir à différentes formulations et, par conséquent, différents algorithmes de couplage partitionnés. Il est important de rappeler que l'approche monolithique a été écartée du fait de sa complexité de mise en œuvre. En outre, lorsqu'une méthode de simulation collaborative est employée, les méthodes partitionnées s'imposent naturellement du fait de la séparation déjà existante des différents solveurs.

Au sein des algorithmes partitionnés, il existe deux grandes catégories. La première regroupe les algorithmes explicites. L'avantage principal de ces derniers est leur faible coût en termes de temps de calcul car l'équation représentative du problème couplé n'est utilisée qu'une seule fois à chaque pas de temps. Néanmoins, la conservation de l'énergie au niveau de l'interface n'est plus assurée. De plus, ces algorithmes sont particulièrement instables vis-à-vis des effets de masse ajoutée, effets particulièrement présents dans le domaine de l'hydrodynamique navale.

La seconde catégorie regroupe les algorithmes implicites qui, par définition, sont itératifs. Ces algorithmes permettent d'assurer la conservation de l'énergie au niveau de l'interface fluide-structure ou, a minima, de contrôler sa perte ou sa création. Au contraire, des algorithmes explicites, l'équation représentative du problème couplé est utilisée jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit atteint. Il en résulte une augmentation importante des temps de simulation. Pour palier ce problème, des méthodes d'accélération peuvent être utilisées : accélération d'Aitken ou méthode de Newton par exemple. Cependant, ces méthodes sont difficiles à mettre en œuvre de manière rigoureuse, ou alors, elles nécessitent de résoudre le problème fluide de manière précise à chaque itération de couplage. Or, dans le domaine de l'hydrodynamique navale, seule la résolution du problème fluide demande des temps de simulation importants. Par conséquent, l'idée principale consiste à résoudre le problème fluide-structure en même temps que la résolution des non-linéarités du problème fluide, et ceci, afin de limiter le nombre d'itérations de résolution de ce problème.

Malgré le caractère implicite de l'algorithme utilisé, sa stabilité n'est pas garantie du fait de la présence des effets de masse ajoutée. Ici, ces derniers sont définis comme étant la réponse du fluide à une accélération impulsionnelle du corps considéré. Il a été montré que les problèmes d'instabilité résultent de l'approche partitionnée et de l'échelle de temps caractéristique de ces effets (échelle de temps nulle). Une des solutions pour stabiliser l'algorithme de couplage consiste à modifier le solveur structure de telle sorte à ce qu'il prenne en compte ces effets déstabilisants. Néanmoins, cette solution nécessite d'être intrusif au niveau du solveur structure. Afin de rester le plus général possible, une variante de cette méthode est proposée.

La méthode de stabilisation utilisée consiste à construire un opérateur de relaxation basé sur les effets de masse ajoutée. Dans un premier temps, les accélérations des corps considérés sont relaxées. Dans un second temps, les vitesses (linéaires et angulaires), les positions et les orientations sont reconstruites à partir du schéma d'intégration temporelle utilisé. Cet opérateur intervient uniquement lors de la transmission des informations du solveur structure vers le solveur fluide. Par conséquent, aucune modification du solveur structure n'est nécessaire.

En complément de la présentation de l'algorithme de couplage utilisé, une autre méthode de relaxation (relaxation appliquée aux efforts), la problématique des corps déformables de type poutre et des cas de validation de la méthode d'évaluation des effets de masse ajoutée ont été présentés.





# Applications

Ce chapitre présente les cas d'application utilisés pour caractériser et valider l'algorithme de couplage mis en place.

Dans un premier temps, l'étude de structures excitées par des lâchers tourbillonnaires a été réalisée afin de valider les premiers développements informatiques de la chaîne de calcul. Ces applications sont brièvement présentées dans ce chapitre et proposées en annexe.

Dans un deuxième temps, l'étude du mouvement de pilonnement d'une barge en déséquilibre hydrostatique à l'état initial a été réalisée afin d'analyser et de valider les développements réalisés vis-à-vis des effets de masse ajoutée sur un cas possédant un unique degré de liberté.

Dans un troisième temps, l'étude d'une frégate soumise à une houle de face a permis de valider l'algorithme de couplage sur un premier cas d'application industrielle.

Dans un quatrième temps, l'étude de parallélépipèdes de faible densité a permis d'analyser les caractéristiques de l'algorithme de couplage sur un cas possédant six degrés de liberté et où les effets de masse ajoutée sont particulièrement importants.

Dans un cinquième temps, l'étude de l'amortissement en roulis d'une frégate par des ailerons actifs illustre la possibilité de prendre en compte des liaisons complexes et des éléments pilotés par la chaîne de calcul mise en place.

Dans un sixième temps, une simulation d'un navire amarré en faible profondeur a été réalisée pour démontrer les capacités de la chaîne de calcul à prendre en compte ce type de système mécanique complexe.

Enfin, deux applications mettant en jeu des corps déformables de type poutre ont été réalisées pour valider les premiers développements concernant ce type de corps.

## Contenu

<b>E.1 Premières applications</b>	<b>189</b>
<b>E.2 Une barge parallélépipédique</b>	<b>190</b>
E.2.1 Description	190
E.2.2 Évaluation de la masse ajoutée	192
E.2.3 Cinématique	192
E.2.4 Temps CPU	194
E.2.5 Étude de l'influence de l'algorithme de couplage	194
E.2.6 Étude de l'influence du coefficient de masse ajoutée artificielle	200
E.2.7 Étude de l'influence du gain sur le solveur de pression	202



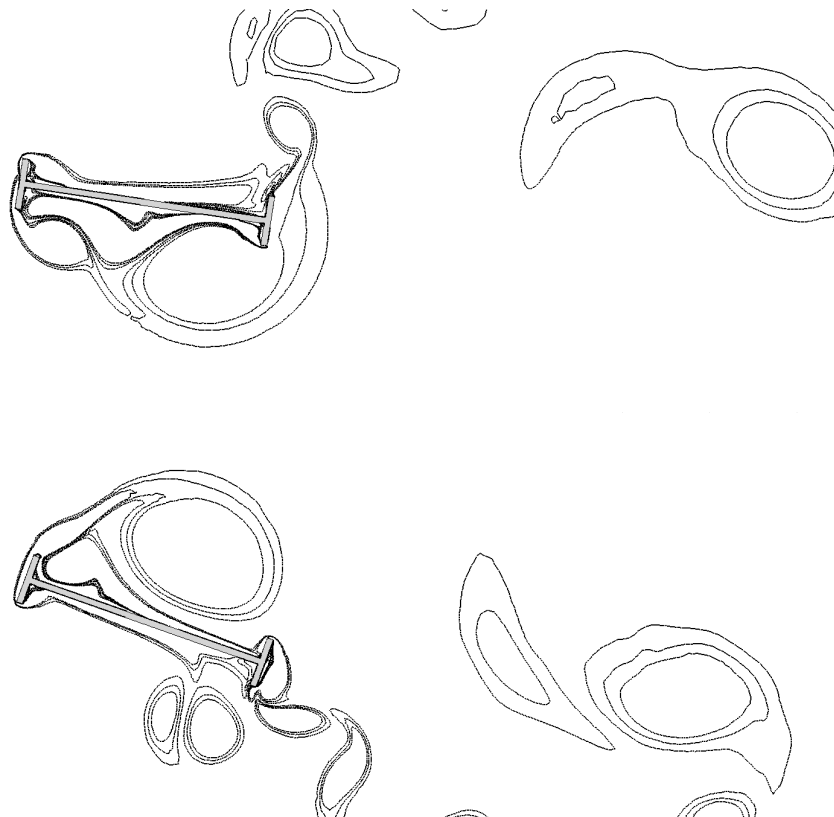
E.2.8	Étude de l'influence du pas de temps . . . . .	204
E.2.9	Évaluation dynamique de la masse ajoutée . . . . .	207
E.2.10	Conclusion . . . . .	210
<b>E.3</b>	<b>Une frégate soumise à une houle de face . . . . .</b>	<b>211</b>
E.3.1	Description . . . . .	213
E.3.2	Simulations de résistance à l'avancement en modèle libre . . . . .	215
E.3.3	Simulations de réponse à une houle incidente de face . . . . .	219
E.3.3.1	Description . . . . .	219
E.3.3.2	Paramètres des simulations . . . . .	220
E.3.3.3	Modèle fixe . . . . .	224
E.3.3.4	Modèle libre . . . . .	228
E.3.3.5	Résistance ajoutée sur houle de face . . . . .	235
E.3.4	Conclusion . . . . .	237
<b>E.4</b>	<b>Des parallélépipèdes de faible densité . . . . .</b>	<b>238</b>
E.4.1	Description . . . . .	239
E.4.2	Critère de convergence . . . . .	240
E.4.3	Masse ajoutée et opérateur de relaxation des accélérations . . . . .	240
E.4.4	Parallélépipède 1 . . . . .	245
E.4.5	Parallélépipèdes 2 . . . . .	255
E.4.6	Conclusion . . . . .	269
<b>E.5</b>	<b>Amortissement d'une frégate par ailerons actifs . . . . .</b>	<b>270</b>
E.5.1	Description . . . . .	270
E.5.2	Définition des repères . . . . .	271
E.5.3	Domaine de calcul et maillage . . . . .	272
E.5.4	Scénario et loi de pilotage des ailerons . . . . .	274
E.5.5	Différences par rapport aux essais expérimentaux . . . . .	275
E.5.6	Résultats et analyses . . . . .	276
E.5.7	Conclusion . . . . .	289
<b>E.6</b>	<b>Un navire amarré dans un canal . . . . .</b>	<b>290</b>
E.6.1	Description . . . . .	290
E.6.2	Caractéristiques des navires . . . . .	291
E.6.3	Domaine de simulation et degrés de liberté des navires . . . . .	291
E.6.4	Amarres et défenses . . . . .	293
E.6.5	Résultats . . . . .	295
E.6.6	Conclusion . . . . .	301
<b>E.7</b>	<b>Deux simulations avec des poutres flexibles . . . . .</b>	<b>302</b>
E.7.1	Une poutre encastrée au sein d'un écoulement . . . . .	302
E.7.1.1	Description . . . . .	302
E.7.1.2	Résultats . . . . .	303
E.7.1.3	Conclusion . . . . .	305
E.7.2	Un appendice flexible au sein d'un écoulement . . . . .	305
E.7.2.1	Description . . . . .	305
E.7.2.2	Résultats . . . . .	306
E.7.2.3	Conclusion . . . . .	309

## E.1 Premières applications

Les premières applications réalisées sont proposées à l'annexe G.5 p. 350. Elles ont consisté à étudier le comportement de corps rigides bidimensionnels excités par des lâchers tourbillonnaires<sup>1</sup>.

Ces cas d'application sont intéressants pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il existe des résultats bibliographiques sur lesquelles il est possible de s'appuyer. De plus, les cas de validation « classiques » sont bidimensionnels. Par conséquent, seuls des mouvements plans sont étudiés et, en plus, dans la majorité des cas, seul un degré de la structure est libre. Il est ainsi possible de se concentrer sur la validation des degrés de liberté élémentaires (translation et rotation). En outre, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les effets de masse ajoutée car, du fait des caractéristiques des corps, ces effets sont faibles par rapport aux inerties des corps. L'algorithme de couplage peut donc être simplifié. Néanmoins, il se doit d'être fort (implicite) pour capter correctement la zone de « lock-in ». Au sein de cette zone, les paramètres physiques sont tels que la fréquence des lâchers tourbillonnaires se synchronise naturellement avec la pseudo-fréquence du système mécanique. Il en résulte des mouvements de grande amplitude et, par conséquent, un couplage fort entre le fluide et la structure. Pour éviter que la structure ne s'écarte de sa position initiale, elle est maintenue par des liaisons. Ces cas d'application permettent donc la prise en main de ces dernières au sein du solveur structure. Enfin, ces cas d'application sont des simulations élémentaires des problématiques couramment rencontrées dans le domaine des installations offshore.

Malgré une apparente simplicité, il n'en reste pas moins que les écoulements sont assez complexes, subtils et fortement instationnaires (cf. figure E.1.1). En effet, la formation de lâchers tourbillonnaires est assez difficile à modéliser. Ceci est d'autant plus vrai lorsque les corps rigides étudiés ne possèdent pas d'angles vifs. Par conséquent, il est difficile d'obtenir des résultats parfaitement convergés avec des maillages classiques et des pas de temps réalistes. Les temps de simulation ne sont donc pas particulièrement faibles. Toutes ces difficultés sont analysées plus en détail dans l'annexe correspondante.



**Figure E.1.1 : Exemple de VIM**

1. Les anglicismes « Vortex Induced Motion » (VIM) ou « Vortex Induced Vibration » (VIV) sont couramment utilisés.

## E.2 Une barge parallélipédique

### Liste des figures de l'application

E.2.1	Géométrie . . . . .	191
E.2.2	Maillages Aqua+ . . . . .	192
E.2.3	Aqua+ – $C_a$ en fonction de B . . . . .	192
E.2.4	Cinématique pour plusieurs $\Delta t$ . . . . .	193
E.2.5	Comparaison de la stabilité des 3 algorithmes . . . . .	195
E.2.6	Cinématique et efforts – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_2$ . . . . .	197
E.2.7	Cinématique et efforts – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_4$ . . . . .	198
E.2.8	Efforts et résidus fluides – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_1$ à $t_3$ . . . . .	199
E.2.9	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_1$ et $t_2 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	200
E.2.10	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ et $t_8 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	201
E.2.11	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_1$ et $t_2 - \Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	202
E.2.12	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3 - \Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	203
E.2.13	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_1, t_2, t_3$ et $t_4 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 3$ . . . . .	203
E.2.14	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.010$ s et $0.075$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	204
E.2.15	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.010$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	205
E.2.16	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.075$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	206
E.2.17	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Masse ajoutée et coefficient de relaxation . . . . .	207
E.2.18	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Cinématique . . . . .	208
E.2.19	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Accélérations de $t_1$ à $t_6 - \Delta t = 0.025$ s . . . . .	209

### Liste des tableaux de l'application

E.2.1	Caractéristiques . . . . .	191
E.2.2	Algorithme 1 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.3	Algorithme 2 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.4	Algorithme 3 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.5	Notation et signification des termes analysés . . . . .	195
E.2.6	Coefficient de relaxation en fonction de la masse ajoutée artificielle . . . . .	200

### Liste des figures de l'application en annexe

G.6.1.5	Pression dynamique entre $t = 0.2$ s et $t = 2.0$ s . . . . .	376
G.6.1.10	Pression dynamique entre $t = 2.2$ s et $t = 4.0$ s . . . . .	377
G.6.1.15	Pression d'évaluation de la masse ajoutée entre $t = 0.2$ s et $t = 2.0$ s . . . . .	378
G.6.1.20	Pression d'évaluation de la masse ajoutée entre $t = 2.2$ s et $t = 4.0$ s . . . . .	379
G.6.1.21	Maillage à différents instants . . . . .	380

### E.2.1 Description

La présente étude consiste à étudier le mouvement de pilonnement d'une barge parallélipédique bidimensionnelle en position de déséquilibre à l'état initial. Ce cas simple permet d'analyser facilement l'influence des paramètres numériques, et plus particulièrement la méthode de prise en compte de la masse ajoutée dans l'algorithme de couplage. La géométrie étant simple, un maillage structuré est réalisé (cf. annexe G.6.1.3 p. 380). La géométrie est présentée ci-dessous.

Les caractéristiques de la barge utilisée sont données ci-dessous,  $T$  étant le tirant d'eau à l'équilibre hydrostatique et  $T_0$  le tirant d'eau initial.

Les paramètres étudiés dans cette étude sont : le coefficient de masse ajoutée artificielle  $\overline{C_a}$ , la tolérance du solveur de pression  $p_{ga}$ , le pas de temps  $\Delta t$  et l'algorithme de couplage. Afin de s'affranchir de l'influence du critère de convergence sur l'algorithme de couplage, 50 itérations de couplage sont réalisées par pas de temps.

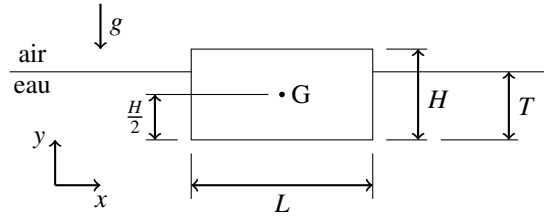


Figure E.2.1 : Une barge parallélépipédique – Géométrie

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
L	4	m	$T_0$	0.5	m
B	1	m	d	0.2	-
H	1	m	$\Delta$	0.8	m <sup>3</sup>
T	0.2	m	m	800	kg

Tableau E.2.1 : Une barge parallélépipédique – Caractéristiques

Il est ainsi possible d'analyser finement la convergence au sein du processus itératif. Au total, ce sont trois algorithmes de couplage qui sont testés. Les notations suivantes sont utilisées :

- algorithme 1 : la résolution de l'équation ( D.5.59 p. 167) ;
- algorithme 2 : la résolution de l'équation ( D.5.86 p. 174) ;
- algorithme 3 : la résolution de l'équation ( D.5.67 p. 168).

Ces équations sont rapidement rappelées ci-dessous.

$$m \cdot \ddot{y}_{n+1}^{i+1} = \alpha \cdot f_f^i|_{n+1} + \alpha \cdot f_s^i|_{n+1} + m(1 - \alpha) \cdot \ddot{y}_{n+1}^i \quad (\text{D.5.59})$$

$$m \cdot \ddot{y}_{n+1}^{i+1} = \alpha \cdot f_f^i|_{n+1} + (1 - \alpha) \cdot f_f^{i-1}|_{n+1} + f_s^i|_{n+1} \quad (\text{D.5.86})$$

$$\ddot{y}_{n+1}^{i+1} = \alpha \cdot \ddot{y}_{n+1}^{i+1} + (1 - \alpha) \cdot \ddot{y}_{n+1}^i \quad (\text{D.5.67})$$

L'algorithme 1 utilise la formulation originale. L'algorithme 2 consiste à relaxer les efforts fluides. Ils peuvent être appliqués ici de manière rigoureuse car l'unique effort extérieur  $f_s$  est connu et constant (effort de gravité). L'algorithme 3 consiste à relaxer la cinématique.

Théoriquement, pour les algorithmes de couplage de type DFMT-BGS-IFC, le mouvement forcé correspond au cas idéal en matière d'itération (cf. section D.5.6 p. 165) puisque une des inconnues du problème de l'interface est déjà connue. C'est donc dans cette optique que ces trois algorithmes sont comparés à des simulations où le mouvement est imposé après-coup. Ces algorithmes sont notés avec des lettres et leur description est donnée ci-dessous.

- algorithme a : application des résultats de l'algorithme 1 dès la première itération ;
- algorithme b : application de la prédiction de la cinématique à la première itération (accélération constante) et des résultats de l'algorithme 1 ensuite.

## E.2.2 Évaluation de la masse ajoutée

L'évaluation de la masse ajoutée asymptotique (période nulle ou fréquence infinie) selon le tirant d'eau est réalisée dans un premier temps par le biais du code de calcul potentiel Aqua+ [Delhommeau, 1987]. La largeur de la barge est modifiée afin d'obtenir une masse ajoutée bidimensionnelle (cf. section D.5.2.6 p. 153). Deux maillages sont présentés à la figure E.2.2. Une évaluation de la masse ajoutée est également réalisée par ISIS-CFD en appliquant une accélération unitaire aux tous premiers pas de temps<sup>2</sup> [Leroy, 2004]. Les résultats sont présentés à la figure E.2.3. Lorsque la largeur de la barge est prise assez grande ( $100 \text{ m} \leq B$ ), les deux méthodes fournissent des résultats identiques. Ainsi, le coefficient de masse ajoutée en pilonnement du cas étudié est de l'ordre de 8.8 en position d'équilibre et de 9.7 en position initiale (sans déformation de la surface libre). Par conséquent, le coefficient de masse ajoutée artificielle doit au minimum être supérieur ou égal à respectivement  $\overline{C}_{a\min} = 3.9$  et  $\overline{C}_{a\min} = 4.4$ , selon l'approche théorique présentée à la section D.5.4 p. 159. Il est important de remarquer que ces coefficients de masse ajoutée ne sont valables que lorsque la surface libre est au repos. Ils sont donc fournis au titre de valeur de référence.

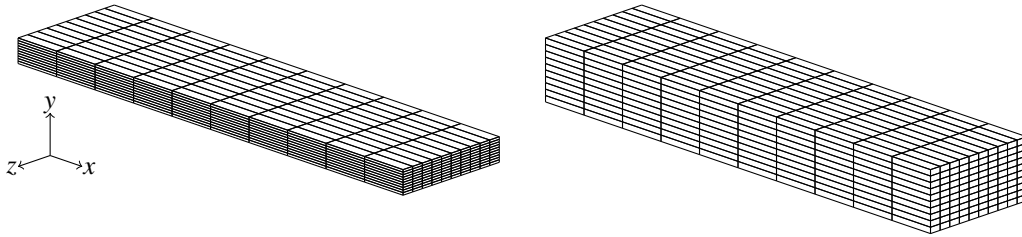


Figure E.2.2 : Une barge parallélépipédique – Maillages Aqua+  $T_0 = 0.2$  (gauche) et  $T_0 = 0.5$  (droite).

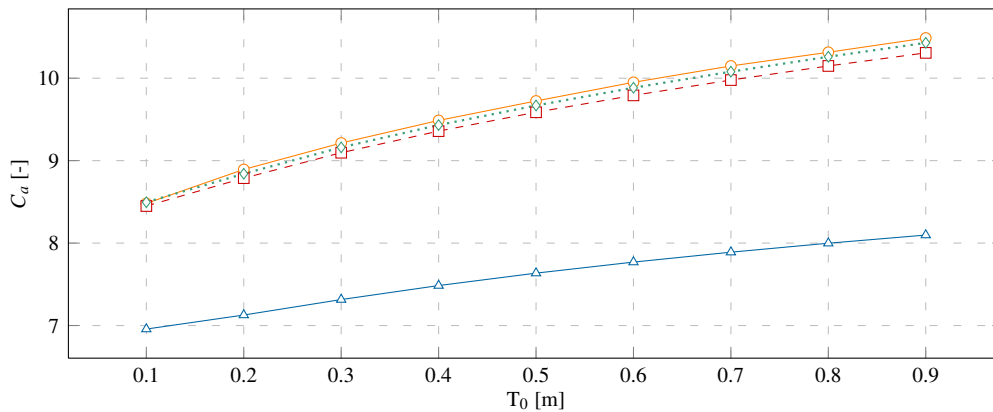
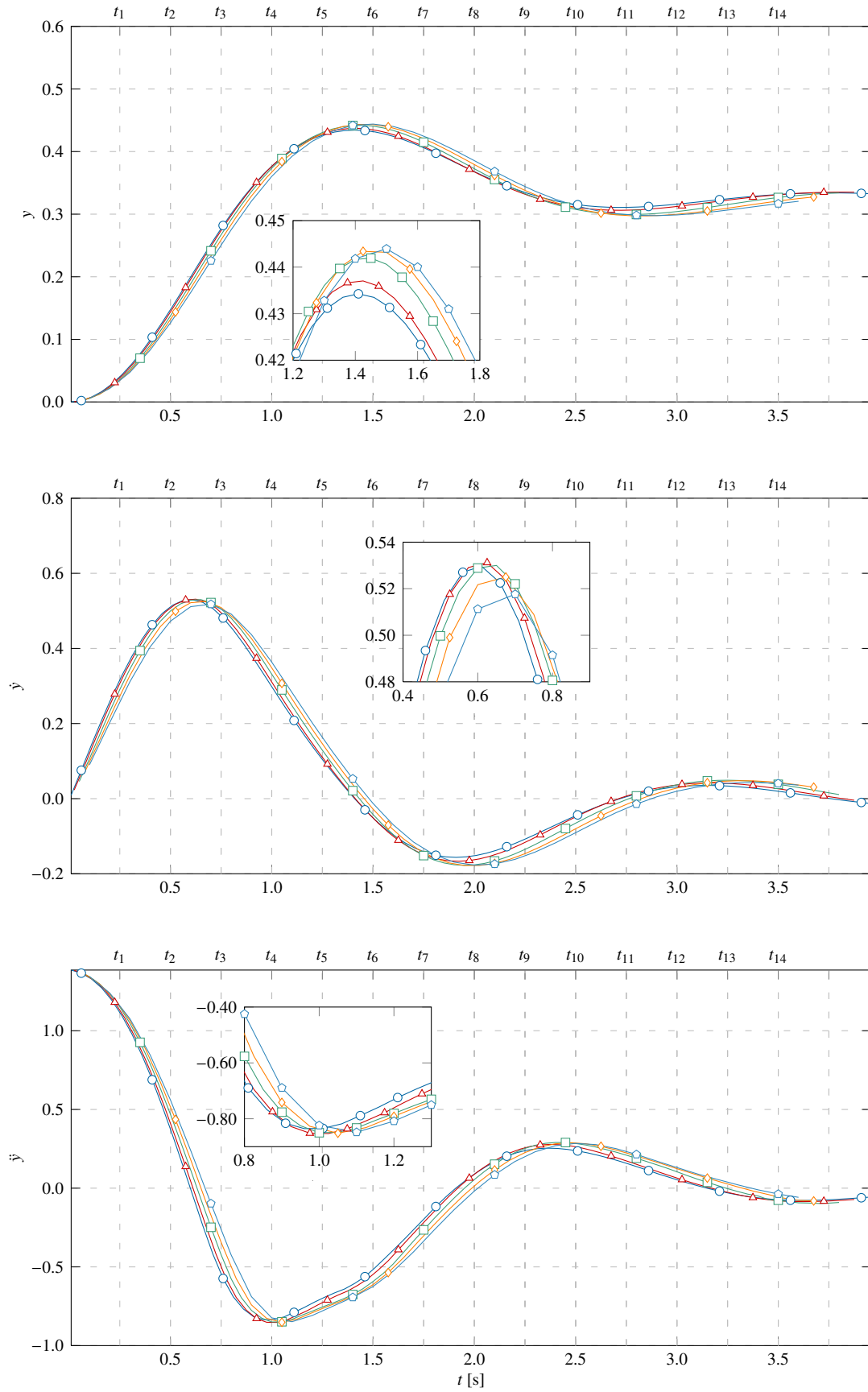


Figure E.2.3 : Une barge parallélépipédique – Aqua+ –  $C_a$  en fonction de  $B$  :  $\triangle$   $B = 10$  m,  $\square$   $B = 100$  m,  $\diamond$   $B = 1000$  m et  $\circ$  ISIS-CFD

## E.2.3 Cinématique

Les simulations sont réalisées pour 4 secondes de temps physique. Différents pas de temps sont considérés. Les cinématiques correspondantes sont données à la figure E.2.4. Cette cinématique est strictement identique à pas de temps constant pour un gain du solveur de pression de valeur égale ou supérieure à trois ordres. Elle est également identique quel que soit l'algorithme de couplage utilisé, ce qui est un résultat attendu. De plus, la cinématique diffère peu selon le pas de temps utilisé, et ceci, même si ces derniers sont importants. Des différences minimales apparaissent lorsque le gain demandé sur le solveur de pression n'est que de deux ordres car la convergence à chaque pas de temps n'est plus totalement assurée sur ce cas d'application. Des captures de la surface libre et de la pression dynamique sont données en annexe (cf. annexe G.6.1.1 p. 376). Les temps étudiés sont distants de 0.25 s et sont notés  $t_1$ ,  $t_2$ , etc.

2. La méthode de résolution développée dans ces travaux n'était pas encore réalisée lors de la réalisation de ce cas d'application.



**Figure E.2.4 :** Une barge parallélépipédique – Cinématique pour plusieurs  $\Delta t$  – Algorithme 1 :  $\circ$   $\Delta t = 0.010$  s,  $\triangle$   $\Delta t = 0.025$  s,  $\square$   $\Delta t = 0.050$  s,  $\diamond$   $\Delta t = 0.075$  s et  $\circ$   $\Delta t = 0.100$  s

## E.2.4 Temps CPU

Les temps de simulation sont résumés aux tableaux E.2.2, E.2.3 et E.2.4. La charge de la machine utilisée pouvant varier considérablement, ces valeurs doivent être analysées avec un certain recul. Ainsi, du fait de la gestion des simulations, seule l'étude de l'influence du gain sur le solveur de pression est réellement pertinente ici. Sur ce cas d'application, la résolution numérique de l'équation de pression avec un gain de 3 et de 4 ordres nécessitent respectivement 13% et 42% de plus qu'avec un gain de 2 ordres en moyenne.

$\Delta t[s]$	$p_{ga} = 2$	$p_{ga} = 3$	$p_{ga} = 4$
0.010	1.00	1.12	1.32
0.025	1.00	1.14	1.40
0.050	1.00	1.15	1.46
0.075	1.00	1.15	1.49
moyenne	1.00	1.14	1.42

**Tableau E.2.2 :** Une barge parallélépipédique – Algorithme 1 – Temps CPU relatif

$\Delta t[s]$	$p_{ga} = 2$	$p_{ga} = 3$	$p_{ga} = 4$
0.010	1.00	1.14	1.35
0.025	1.00	1.13	1.39
0.050	1.00	1.15	1.46
0.075	1.00	1.15	1.47
moyenne	1.00	1.14	1.42

**Tableau E.2.3 :** Une barge parallélépipédique – Algorithme 2 – Temps CPU relatif

$\Delta t[s]$	$p_{ga} = 2$	$p_{ga} = 3$	$p_{ga} = 4$
0.010	1.00	0.96	1.21
0.025	1.00	1.15	1.45
0.050	1.00	1.17	1.52
0.075	1.00	1.16	1.52
moyenne	1.00	1.11	1.43

**Tableau E.2.4 :** Une barge parallélépipédique – Algorithme 3 – Temps CPU relatif

## E.2.5 Étude de l'influence de l'algorithme de couplage

Dans cette section, l'influence de l'algorithme de couplage est étudiée. Dans un premier temps, la stabilité des algorithmes est analysée. Pour cela, les situations de convergence/divergence sont présentées à la figure E.2.5. De manière générale, les situations de divergence apparaissent lorsque le pas de temps est élevé, lorsque le coefficient de masse ajoutée artificielle est faible par rapport aux effets de masse ajoutée et, dans une moindre mesure, lorsque le gain du solveur de pression est grand. En outre, à l'inverse de l'exemple théorique présenté à la section D.5.5 p. 161, la limite basse du coefficient de masse ajoutée artificielle peut être dépassée et ceci même pour des pas de temps très élevés.

L'algorithme de couplage 1, qui consiste à utiliser la technique de masse ajoutée artificielle de manière rigoureuse, est le plus stable. Les algorithmes de couplage 2 et 3, qui reposent sur une approximation du terme d'accélération ajoutée en termes d'effort (cf. section D.5.6.5 p. 173) divergent plus rapidement. Cependant, les différences observées concernent uniquement des cas extrêmes qu'il est facile d'éviter en utilisant une masse ajoutée artificielle plus réaliste.

Dans un second temps, la convergence de la cinématique de la barge ainsi que des efforts fluides qui s'exercent dessus est analysée. Selon l'algorithme de couplage utilisé, les efforts fluides et la cinématique de la barge sont composés de différents termes. Leur notation est donnée au tableau E.2.5.

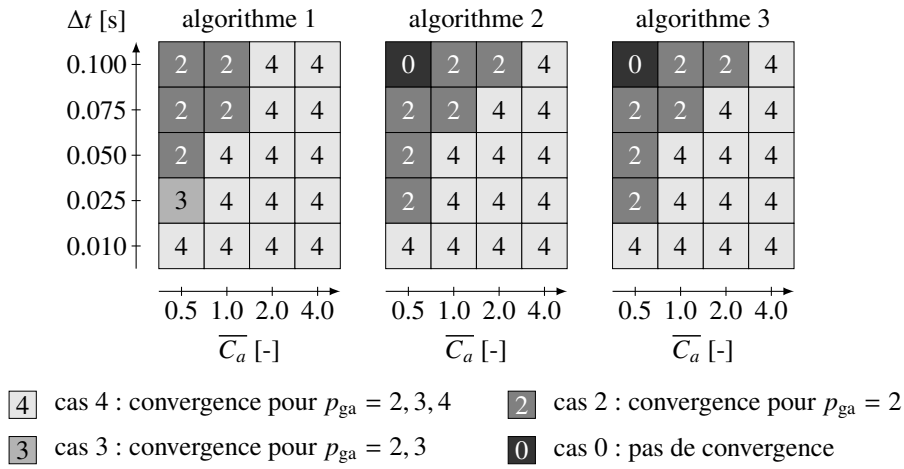


Figure E.2.5 : Une barge parallélépipédique – Comparaison de la stabilité des 3 algorithmes

Notation	Expression/signification	Algorithme(s) concerné(s)
<b>efforts calculés</b>		
$f_f$	effort fluide calculé par le solveur fluide	tous
$f_s$	effort structurel calculé par le solveur structure <sup>a</sup>	tous
<b>efforts fluides vus par le solveur structure</b>		
$f_f^1$	$\alpha \cdot f_f _{n+1}^i + (1 - \alpha) \cdot m \cdot \ddot{y} _{n+1}^i - (1 - \alpha) \cdot f_s _{n+1}^i$	algorithme 1
$f_f^2$	$\alpha \cdot f_f _{n+1}^i + (1 - \alpha) \cdot f_f _{n+1}^{i-1}$	algorithme 2
$f_f^3$	$f_f _{n+1}^i$	algorithme 3
<b>cinématique calculée</b>		
$y$	position calculée par le solveur structure	tous
$\dot{y}$	vitesse calculée par le solveur structure	tous
$\ddot{y}$	accélération calculée par le solveur structure	tous
<b>cinématique vue par le solveur fluide</b>		
$y_3$	$\alpha \cdot \tilde{y} _{n+1}^{i+1} + (1 - \alpha) \cdot y _{n+1}^i$	algorithme 3
$\dot{y}_3$	$\alpha \cdot \tilde{\dot{y}} _{n+1}^{i+1} + (1 - \alpha) \cdot \dot{y} _{n+1}^i$	algorithme 3
$\ddot{y}_3$	$\alpha \cdot \tilde{\ddot{y}} _{n+1}^{i+1} + (1 - \alpha) \cdot \ddot{y} _{n+1}^i$	algorithme 3

Tableau E.2.5 : Une barge parallélépipédique – Notation et signification des termes analysés

a. Effort de gravité pour cette application.



Pour illustrer ces propos, le pas de temps ( $\Delta t = 0.050$  s), le coefficient de masse ajoutée artificielle ( $\overline{C_a} = 9$ ) et le gain du solveur de pression ( $p_{ga} = 4$ ) sont fixés. Différents graphiques sont proposés (cf. figures E.2.6 à E.2.8 p. 199). Les analyses sont données aux paragraphes ci-dessous.

Dans un premier temps, peu de différences entre les trois algorithmes sont observées. Il est possible d'affirmer que le comportement qualitatif est strictement le même. Au sein d'un pas de temps et de manière non-récurrente, des différences quantitatives minimales peuvent apparaître du fait des différences théoriques entre ces trois algorithmes (cf. section D.5.6 p. 165). Cependant, il est important de rappeler que l'algorithme 3 possède le plus de propriétés intéressantes (gestion dynamique du coefficient de masse ajoutée par l'algorithme de couplage notamment) (cf. section D.5.6.4 p. 168). En conclusion, les algorithmes 1, 2 et 3 sont quasiment équivalents.

Dans un deuxième temps, la comparaison de l'effort fluide qui est appliqué à la structure (l'algorithme 1 ou 2), soient les termes  $f_f^1$  et  $f_f^2$ , avec l'effort fluide calculé par les algorithmes a et b (mouvements imposés), montre que les algorithmes 1 et 2 convergent aussi rapidement (voir plus rapidement) que lorsque le mouvement est imposé. De manière identique, la comparaison de ce même effort avec l'effort évalué par le solveur fluide, soit le terme  $f_f$ , illustre bien l'effet bénéfique de l'utilisation de la méthode de la masse ajoutée artificielle.

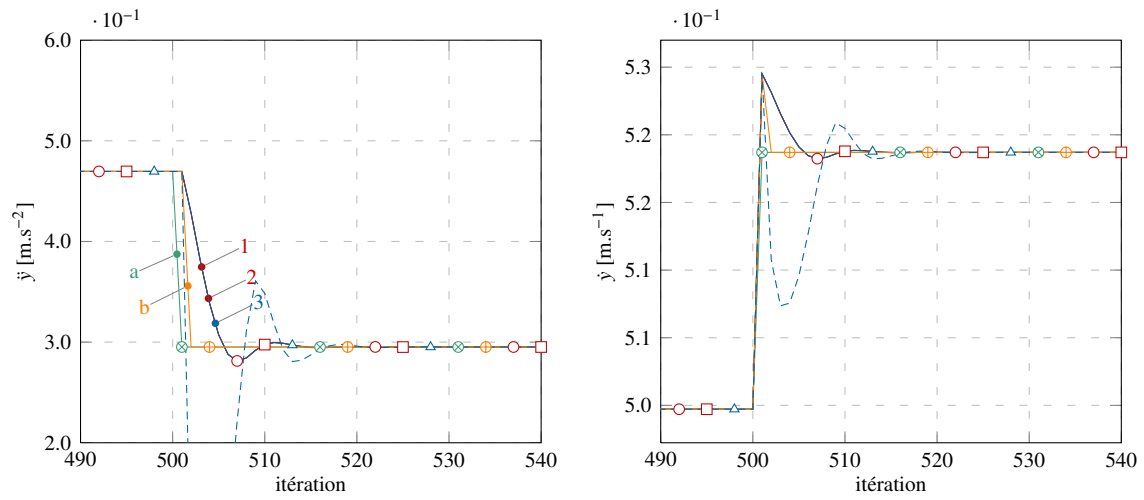
Dans un troisième temps, quel que soit l'algorithme de couplage utilisé, la cinématique de l'interface fluide-structure, qui est l'inconnue de l'algorithme de couplage, est rapidement évaluée de manière satisfaisante. En toute rigueur, il est cependant nécessaire d'attendre la convergence du solveur fluide (termes  $f_f$ ,  $f_f^2$  et  $f_f^3$ ) pour pouvoir passer aux pas de temps suivants. Le critère de convergence de ces algorithmes de couplage ne doit donc pas se baser uniquement sur la position et/ou la vitesse de l'interface fluide-structure comme cela se fait habituellement sur les algorithmes de type DFMT-BGS. La convergence physique du solveur fluide doit également être prise en compte. Il apparaît ainsi clairement que, dans ce cas, les résidus fluides doivent baisser de trois ordres au minimum pour avoir une solution physique convergée.

Accessoirement, pendant les premières itérations, l'effort fluide évalué par l'algorithme a (mouvement imposé) peut s'éloigner au lieu de se rapprocher de la solution finale (cf. figure E.2.6 page suivante par exemple). C'est la raison pour laquelle il est comparé à l'algorithme b qui applique une prédiction de la cinématique à la première itération, c.-à-d. une prédiction à accélération constante (cf. section D.3.4.3 p. 129). Une fois cette première itération passée, l'algorithme b présente un comportement identique à l'algorithme a mais cette première itération améliore qualitativement la convergence de l'effort fluide sur ce cas là.

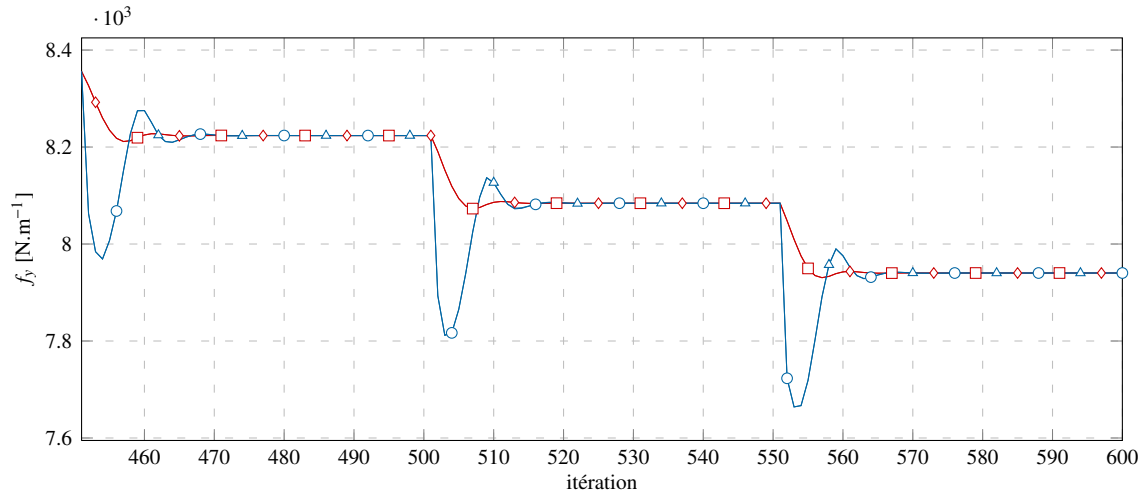
Finalement, les algorithmes présentés de type DFMT-BGS-IFC possèdent des caractéristiques intéressantes en matière de temps de simulation par rapport aux algorithmes classiques de type DFMT-BGS car ces derniers auraient demandé un minimum de quelques itérations de couplage, soit un nombre total d'itérations fluides conséquent<sup>3</sup>. L'exemple d'illustration proposé ici montre qu'un nombre d'itérations du solveur fluide légèrement supérieur à une première itération de couplage de type DFMT-BGS est suffisant pour atteindre une convergence physique et ceci, à la fois pour le solveur fluide et le problème couplé.

---

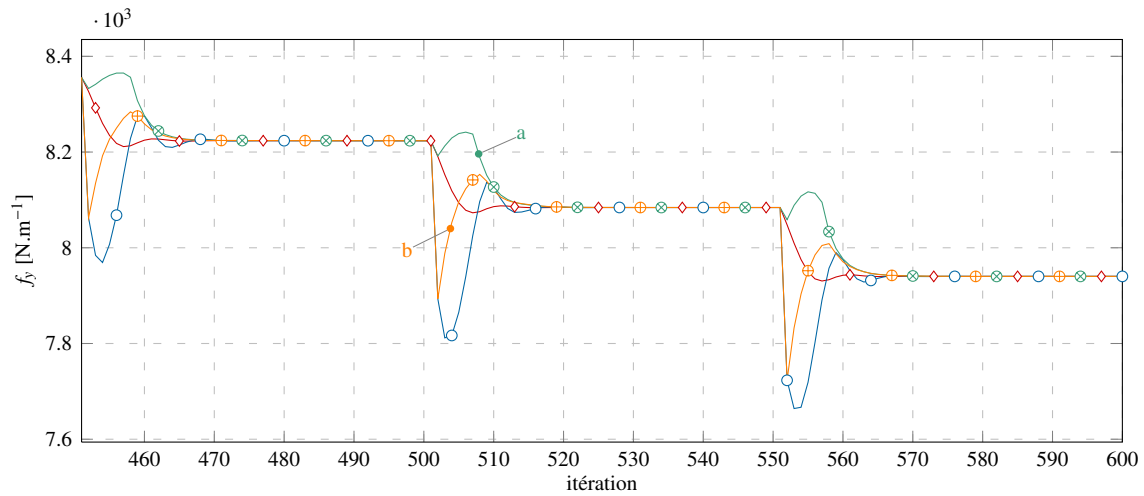
3. Si il est considéré que la convergence du solveur fluide est atteinte avec 20 itérations et qu'il est nécessaire d'itérer 4 fois avec un algorithme de type DFMT-BGS classique, alors il est nécessaire de réaliser 80 itérations fluide. Les algorithmes de type DFMT-BGS-IFC présentés ici nécessitent au maximum une vingtaine d'itérations fluide.



**a :** Accélérations (gauche) et vitesse (droite) : —○— algorithme 1  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ , —□— algorithme 2  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ , —△— algorithme 3  $\ddot{y}_3$  et  $\dot{y}_3$ , —×— algorithme a  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ , —+— algorithme b  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$  et —-— algorithme 3  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$

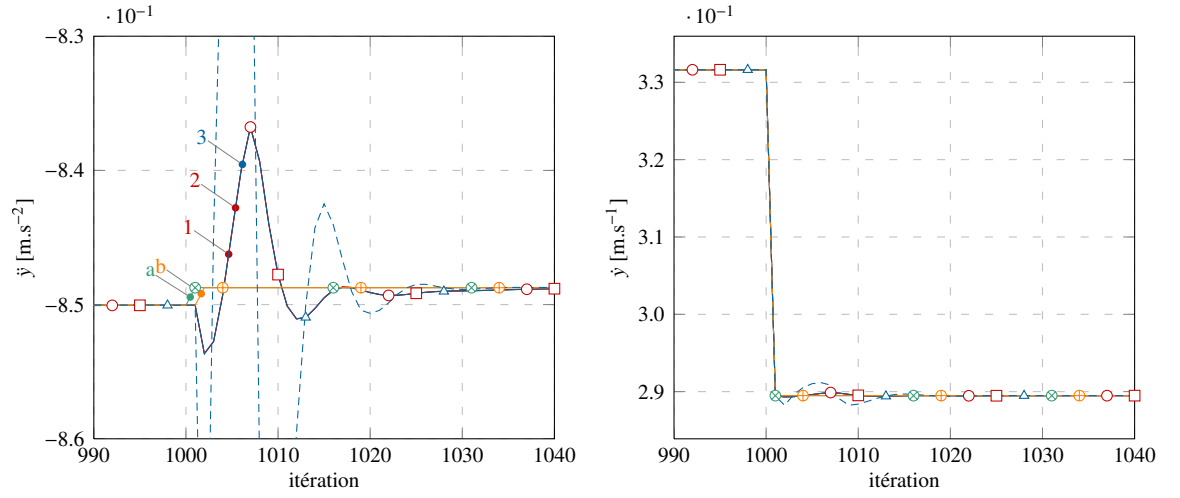


**b :** Efforts : —◇— algorithme 1  $f_f^1$ , —□— algorithme 2  $f_f^2$ , —○— algorithme 1  $f_f$  et —△— algorithme 3  $f_f$

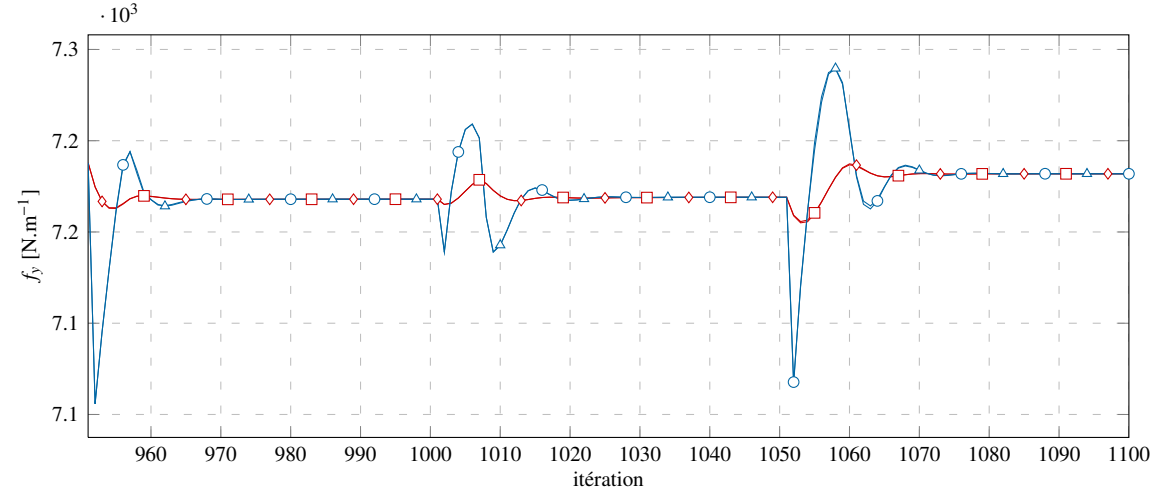


**c :** Efforts : —◇— algorithme 1  $f_f^1$ , —○— algorithme 3  $f_f$ , —+— algorithme a  $f_f$  et —×— algorithme b  $f_f$

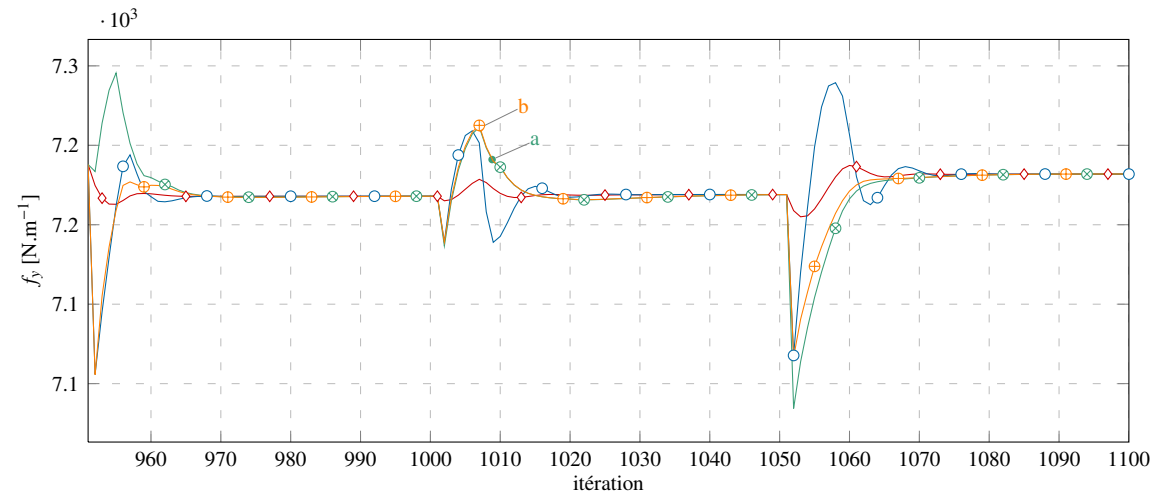
**Figure E.2.6 :** Une barge parallélépipédique —  $\Delta t = 0.050$  s —  $\overline{C_a} = 9$  —  $p_{ga} = 4$  —  $t_{ref} = t_2$  — Cinématique et efforts à  $t_{ref} = t_2$  pour différents algorithmes de couplage



**a :** Accélérations (gauche) et vitesse (droite) :  $\circ$  — algorithme 1  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ ,  $\square$  — algorithme 2  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ ,  $\triangle$  — algorithme 3  $\ddot{y}_3$  et  $\dot{y}_3$ ,  $\circ$  — algorithme a  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ ,  $\square$  — algorithme b  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$  et  $\cdots$  — algorithme 3  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$

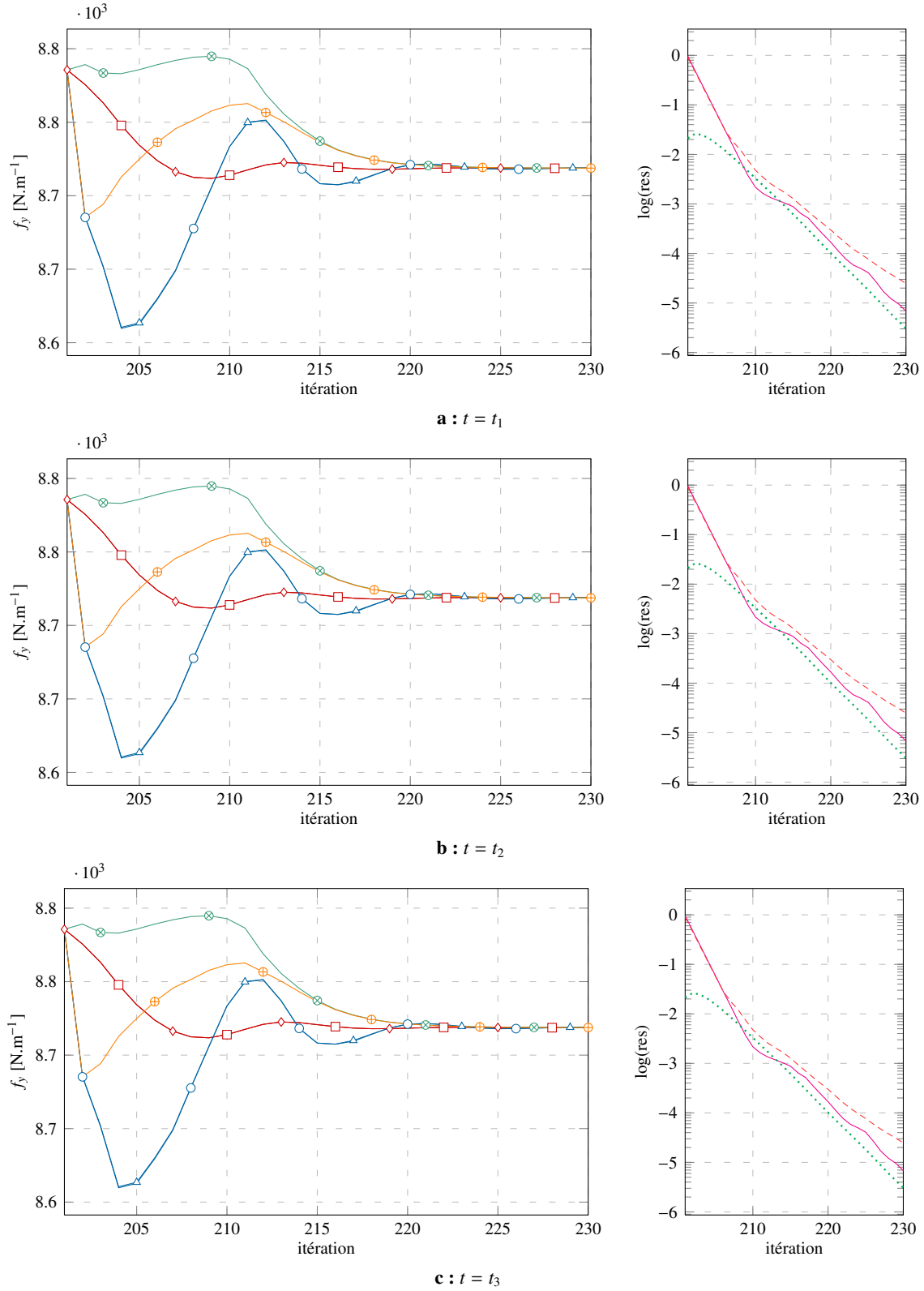


**b :** Efforts :  $\diamond$  — algorithme 1  $f_f^1$ ,  $\square$  — algorithme 2  $f_f^2$ ,  $\circ$  — algorithme 1  $f_f$  et  $\triangle$  — algorithme 3  $f_f$



**c :** Efforts :  $\diamond$  — algorithme 1  $f_f^1$ ,  $\circ$  — algorithme 3  $f_f$ ,  $\square$  — algorithme a  $f_f$  et  $\triangle$  — algorithme b  $f_f$

**Figure E.2.7 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050 \text{ s}$  –  $\overline{C_a} = 9$  –  $p_{\text{ga}} = 4$  –  $t_{\text{ref}} = t_4$  – Cinématique et efforts à  $t_{\text{ref}} = t_4$  pour différents algorithmes de couplage



**Figure E.2.8 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050 \text{ s}$  –  $\overline{C_a} = 9$  –  $p_{\text{ga}} = 4$  – Efforts pour différents algorithmes de couplage et résidus du solveur fluide pour l’algorithme 1 à plusieurs instants : –◇– algorithme 1  $f_f^1$ , –□– algorithme 2  $f_f^2$ , –○– algorithme 1  $f_f$ , –△– algorithme 3  $f_f$ , –×– algorithme a  $f_f$ , –+– algorithme b  $f_f$ , —  $u$ , - - -  $v$  et ...  $p$

### E.2.6 Étude de l'influence du coefficient de masse ajoutée artificielle

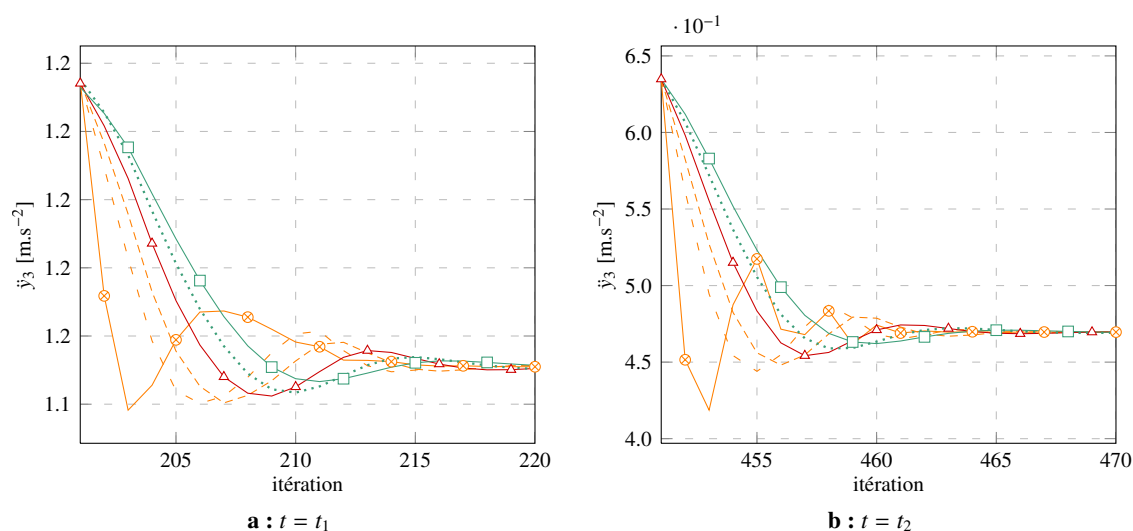
L'objectif de cette section est d'étudier qualitativement l'influence du coefficient de masse ajoutée artificielle  $\overline{C}_a$  sur la convergence de la cinématique du parallélépipède. Pour cela, les paramètres numériques utilisés lors de la précédente étude sont réemployés, c.-à-d.  $\Delta t = 0.050$  s et  $p_{ga} = 4$ . L'évolution de l'accélération au cours des itérations de couplage est présentée à différents instants de référence (cf. figures E.2.9 à E.2.10 page suivante). Seuls les résultats fournis par l'algorithme 3 sont utilisés, mais cette analyse est également valable pour les algorithmes 1 et 2 comme l'a montré la section E.2.5 p. 194. Pour information, la valeur des coefficients de relaxation en fonction du coefficient de masse ajoutée artificielle est fournie au tableau E.2.6. Afin de faciliter l'analyse, un coefficient de masse ajoutée artificielle est choisi comme référence. Cette référence est prise égale à 9 pour sa proximité avec le coefficient de masse ajoutée évaluée pour une surface libre au repos (cf. section E.2.2 p. 192). Le coefficient de relaxation correspondant vaut 0.10. Des coefficients de relaxation aussi faibles ont pour réputation d'augmenter fortement le nombre d'itérations pour atteindre un état convergé. Il est donc intéressant de vérifier si ces valeurs ne sont pas trop pénalisantes lorsqu'elles s'appuient sur des phénomènes physiques.

$\overline{C}_a$	0.5	1	2	4	6	8	9	10	12	15
$\alpha$	0.67	0.50	0.33	0.20	0.14	0.11	0.10	0.09	0.08	0.06

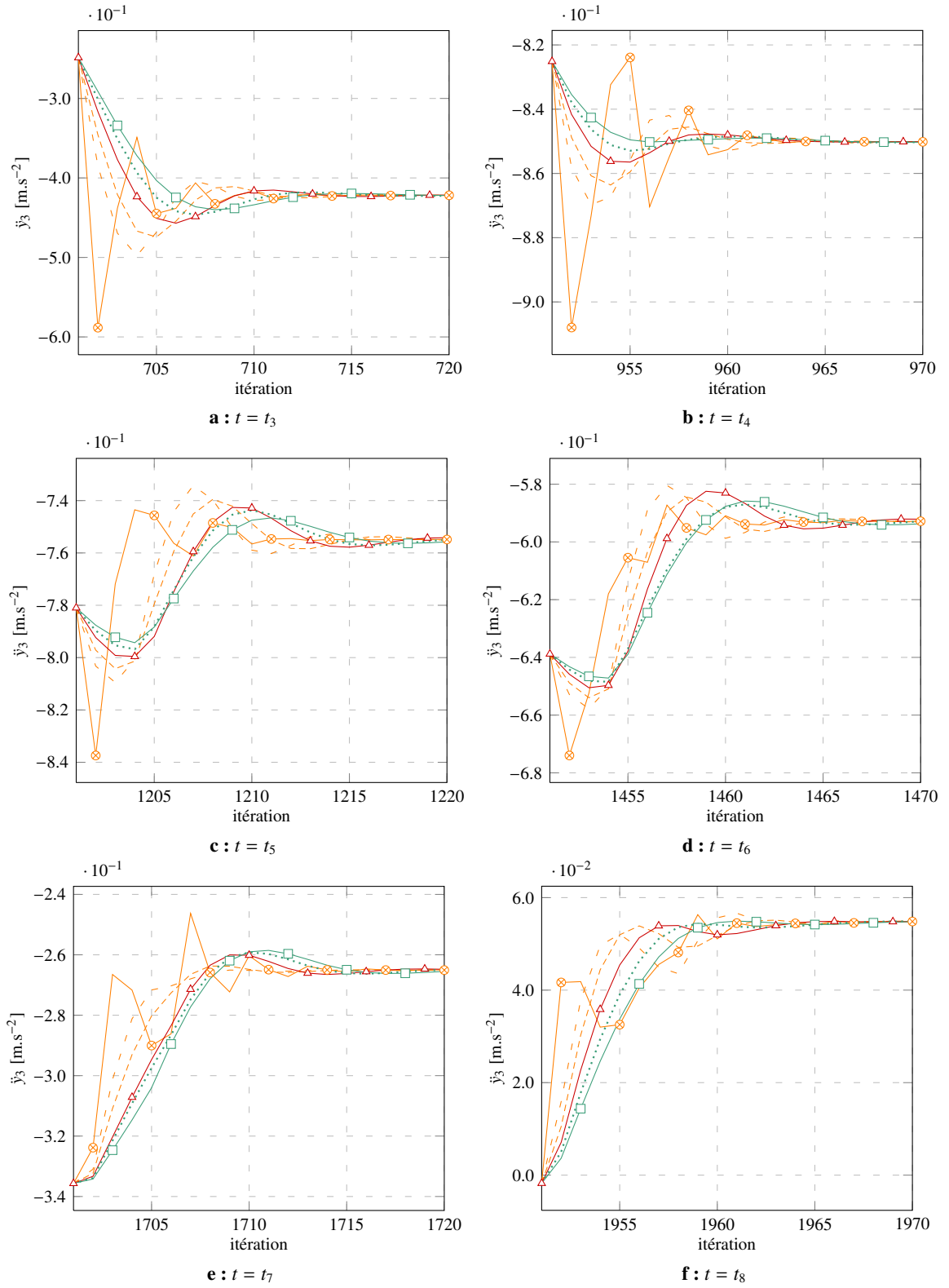
**Tableau E.2.6 :** Une barge parallélépipédique –  $\overline{C}_a$  – Coefficient de relaxation en fonction de la masse ajoutée

Les figures proposées montrent que les résultats ne dépendent pas du coefficient de masse ajoutée artificielle lorsque la convergence est atteinte. Si le coefficient de masse ajoutée artificielle est proche de la masse ajoutée « physique » (valeur de référence), l'accélération converge assez rapidement vers sa valeur finale. Des valeurs supérieures ou légèrement inférieures peuvent également être utilisées sans dégrader de manière significative la convergence dans ce cas-ci. Néanmoins, lorsque des coefficients de masse ajoutée artificielle inférieurs à 4 sont utilisés, des oscillations importantes apparaissent.

En conclusion, il semble préférable d'utiliser un coefficient de masse ajoutée artificielle proche du coefficient de masse ajoutée réel (estimé ici au repos) afin de faciliter la convergence de l'algorithme de couplage. Dans une certaine limite, des valeurs supérieures peuvent également être utilisées. Par contre, les valeurs inférieures sont à éviter. De plus, l'utilisation de coefficients de relaxation faibles n'est pas pénalisante lorsque ces derniers sont évalués à partir des effets de masse ajoutée.



**Figure E.2.9 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050$  s –  $p_{ga} = 4$  – Accélération en fonction de  $\overline{C}_a$  à  $t_1$  et  $t_2$  :  
 —  $\overline{C}_a = 1.0$ , —  $\overline{C}_a = 4.0$ , —  $\overline{C}_a = 6.0$ , —  $\overline{C}_a = 9.0$ , .....  $\overline{C}_a = 12.0$  et —  $\overline{C}_a = 15.0$



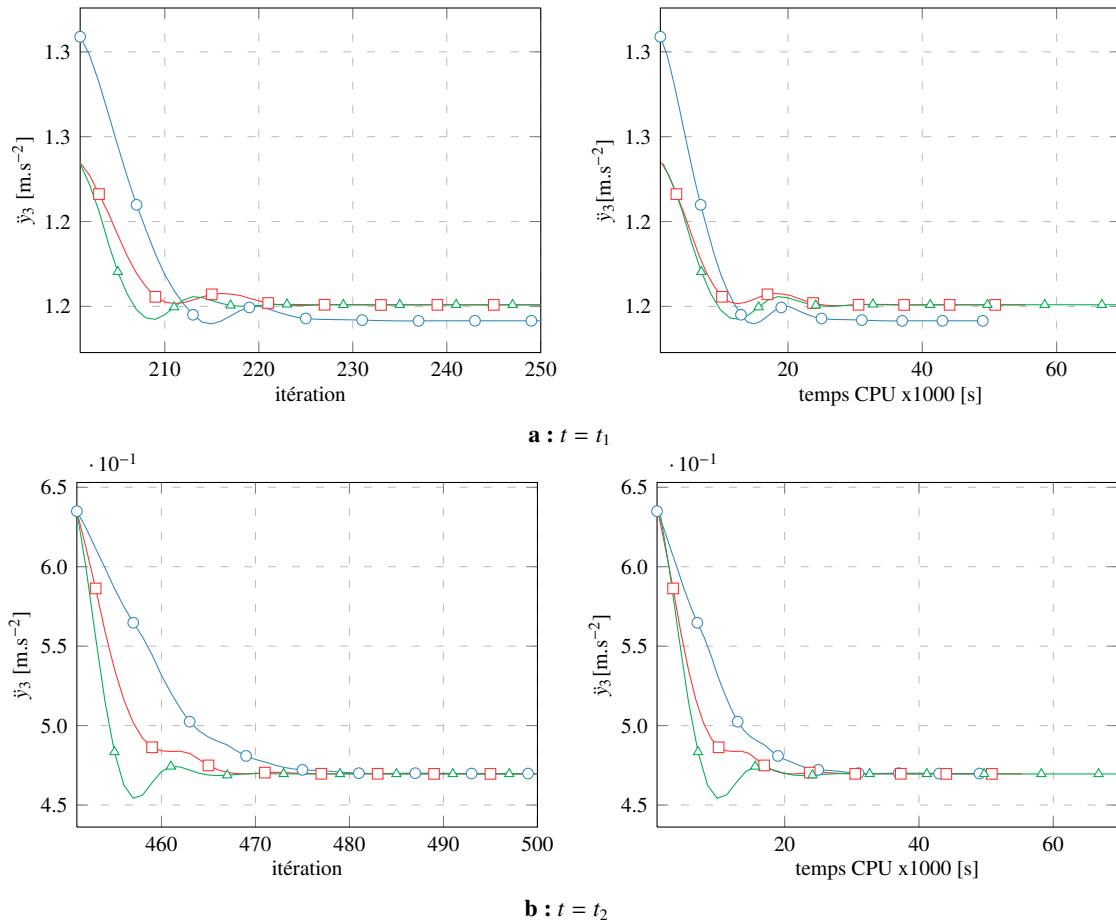
**Figure E.2.10 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050$  s –  $p_{ga} = 4$  – Accélération en fonction de  $\overline{C}_a$  à  $t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$  et  $t_8$  : —  $\overline{C}_a = 1.0$ , - -  $\overline{C}_a = 4.0$ , - - -  $\overline{C}_a = 6.0$ , —  $\overline{C}_a = 9.0$ , .....  $\overline{C}_a = 12.0$  et —  $\overline{C}_a = 15.0$

### E.2.7 Étude de l'influence du gain sur le solveur de pression

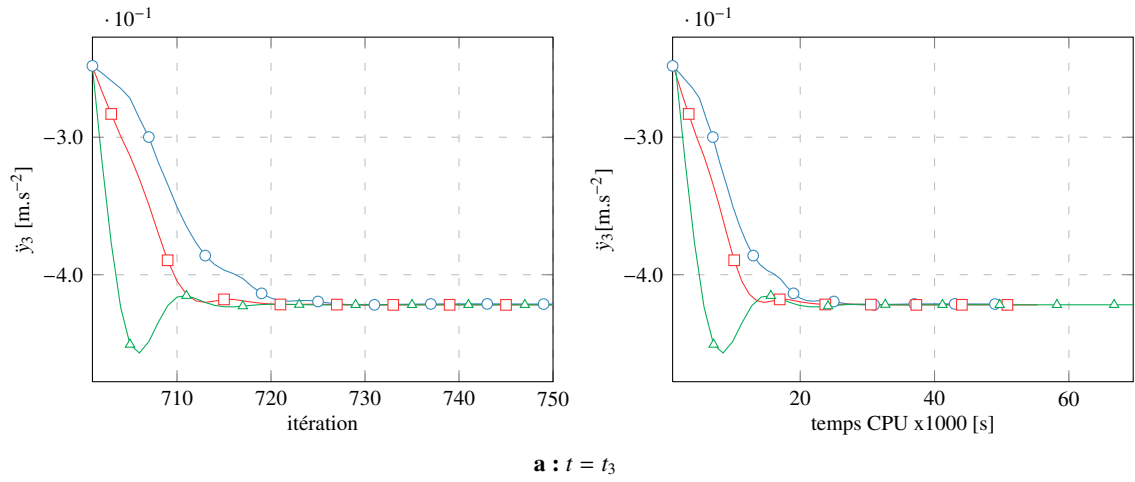
Cette section présente l'étude de l'influence du gain sur le solveur de pression  $p_{ga}$ . De nouveau, le cas de référence est utilisé, c.-à-d.  $\Delta t = 0.050$  s et  $\overline{C_a} = 9$ . Ainsi, l'évolution de l'accélération à différents moments de référence est encore une fois analysée. Seuls les résultats fournis par l'algorithme 3 sont utilisés, mais comme l'a montré la section E.2.5 p. 194, l'analyse réalisée ici est également valable pour les algorithmes 1 et 2.

Les figures proposées (cf. figures E.2.11 et E.2.12 page suivante) présentent l'évolution de l'accélération en fonction des itérations mais également en fonction du temps CPU moyen (cf. section E.2.4 p. 194). En outre, la figure E.2.13 présente les mêmes résultats que les figures E.2.9 et E.2.10 mais lorsque le gain du solveur de pression est fixé à trois ordres. Cette figure permet notamment de vérifier que l'analyse réalisée dans la section précédente est également valable lorsque  $p_{ga} = 3$ . Les figures E.2.11 et E.2.12 montrent qu'un état convergé différent peut être obtenu à certains instants lorsque le gain demandé au solveur de pression est de deux ordres. Lorsque ce dernier est supérieur ou égal à trois ordres, des résultats identiques sont obtenus. Il est également possible de converger ponctuellement vers un état différent lorsque le gain du solveur de pression n'est pas suffisamment élevé. Cependant, ces différences n'influencent pas de manière significative la cinématique générale de la barge. De plus, du point de vue des itérations de couplage, il est préférable d'utiliser un gain élevé pour le solveur de pression puisque un état convergé est atteint plus rapidement. Du point de vue du temps CPU, c'est lorsque le gain du solveur de pression est fixé à trois ordres que de meilleurs résultats sont obtenus.

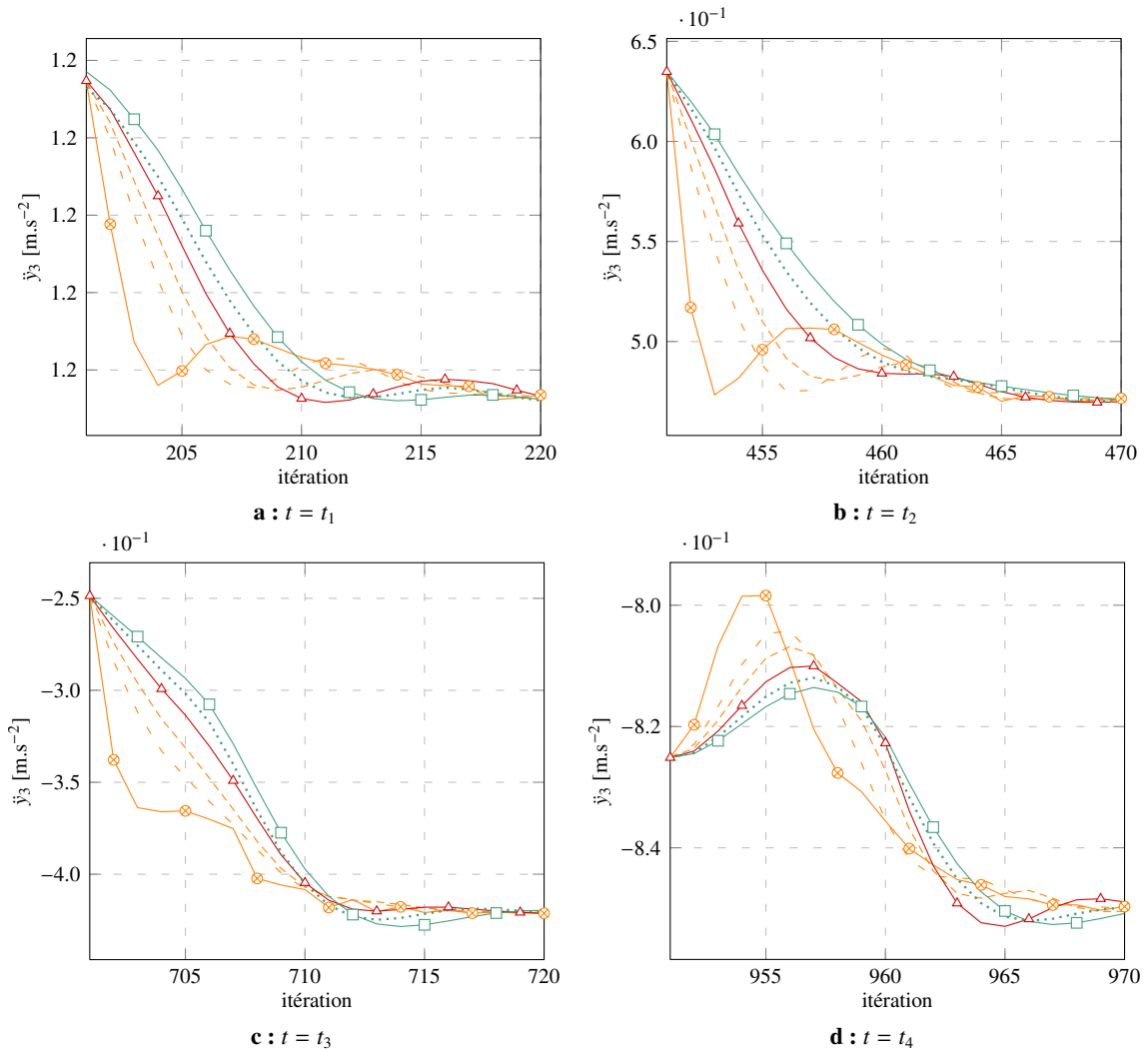
En conclusion, pour ce jeu de paramètres, un gain du solveur de pression fixé à trois ordres est un bon compromis entre précision des résultats et temps de simulation.



**Figure E.2.11 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050$  s –  $\overline{C_a} = 9$  – Accélération en fonction de  $p_{ga}$  à  $t_1$  et  $t_2$  :  $\circ$   $p_{ga} = 2$ ,  $\square$   $p_{ga} = 3$  et  $\triangle$   $p_{ga} = 4$



**Figure E.2.12 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050$  s –  $\overline{C}_a = 9$  – Accélération en fonction de  $p_{ga}$  à  $t_3$  :  $\circ$   $p_{ga} = 2$ ,  $\square$   $p_{ga} = 3$  et  $\triangle$   $p_{ga} = 4$

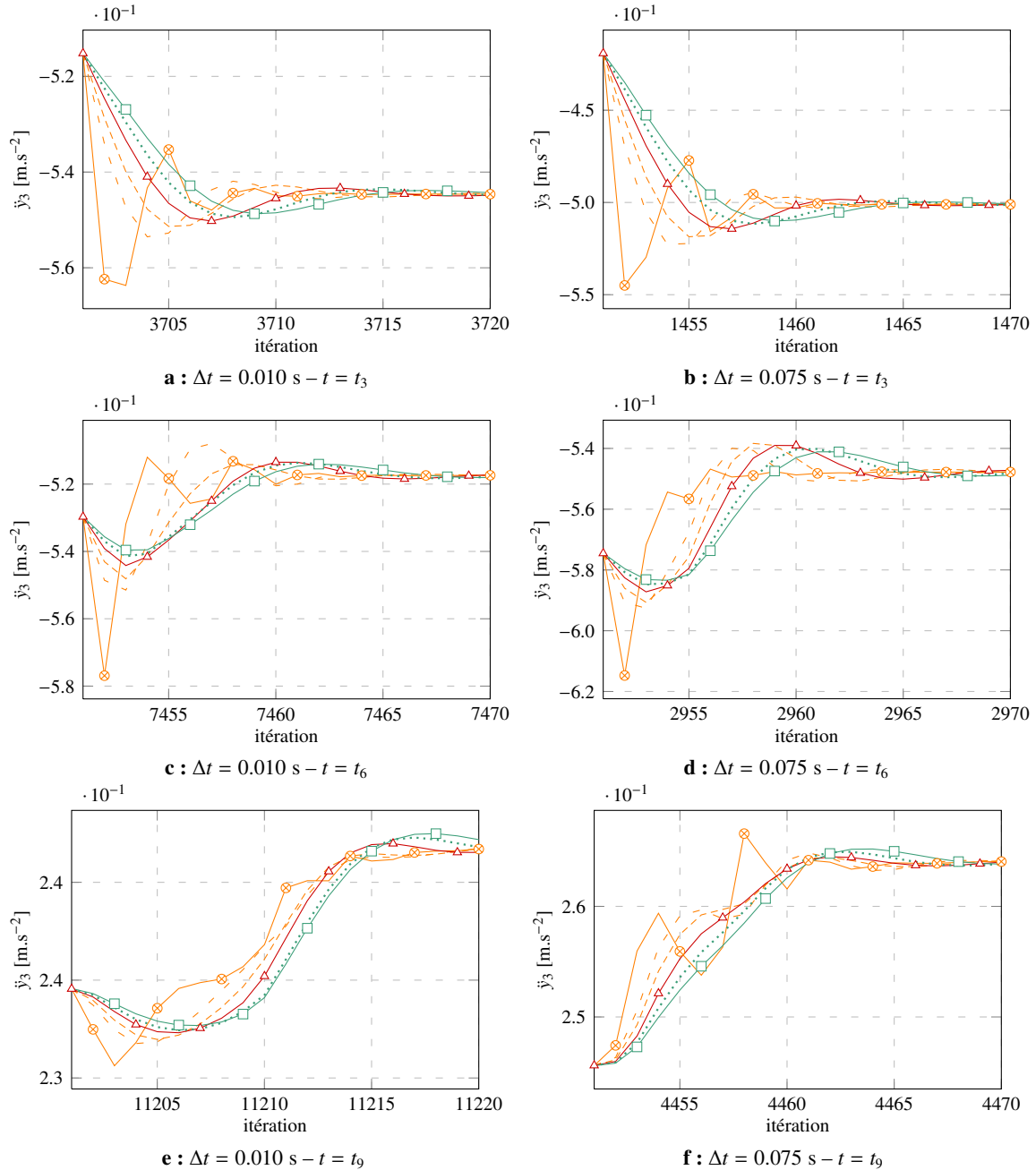


**Figure E.2.13 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.050$  s –  $p_{ga} = 3$  – Accélération en fonction de  $\overline{C}_a$  à  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  :  $\circ$   $\overline{C}_a = 1.0$ ,  $- -$   $\overline{C}_a = 4.0$ ,  $- - -$   $\overline{C}_a = 6.0$ ,  $\triangle$   $\overline{C}_a = 9.0$ ,  $\cdots$   $\overline{C}_a = 12.0$  et  $\square$   $\overline{C}_a = 15.0$

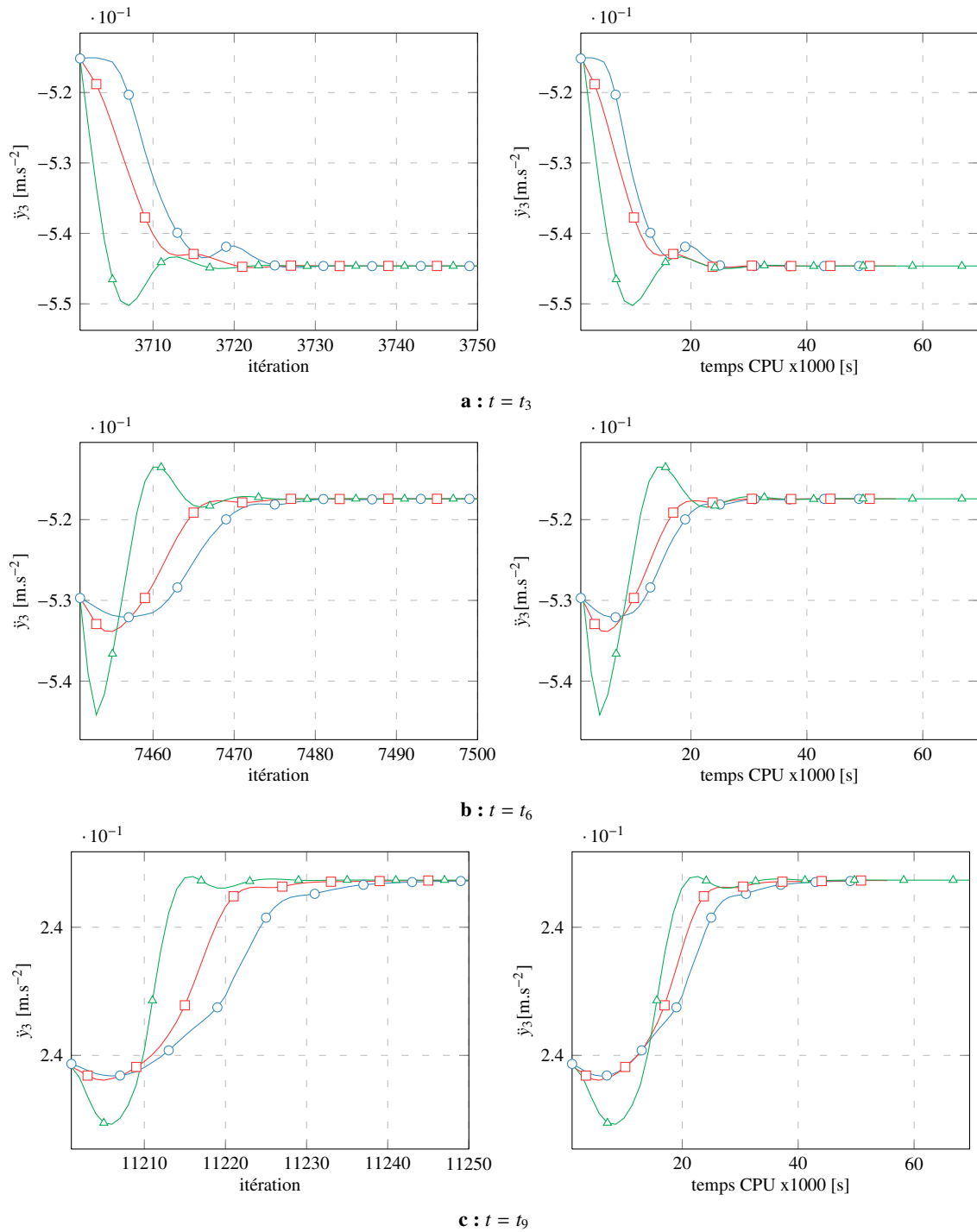


## E.2.8 Étude de l'influence du pas de temps

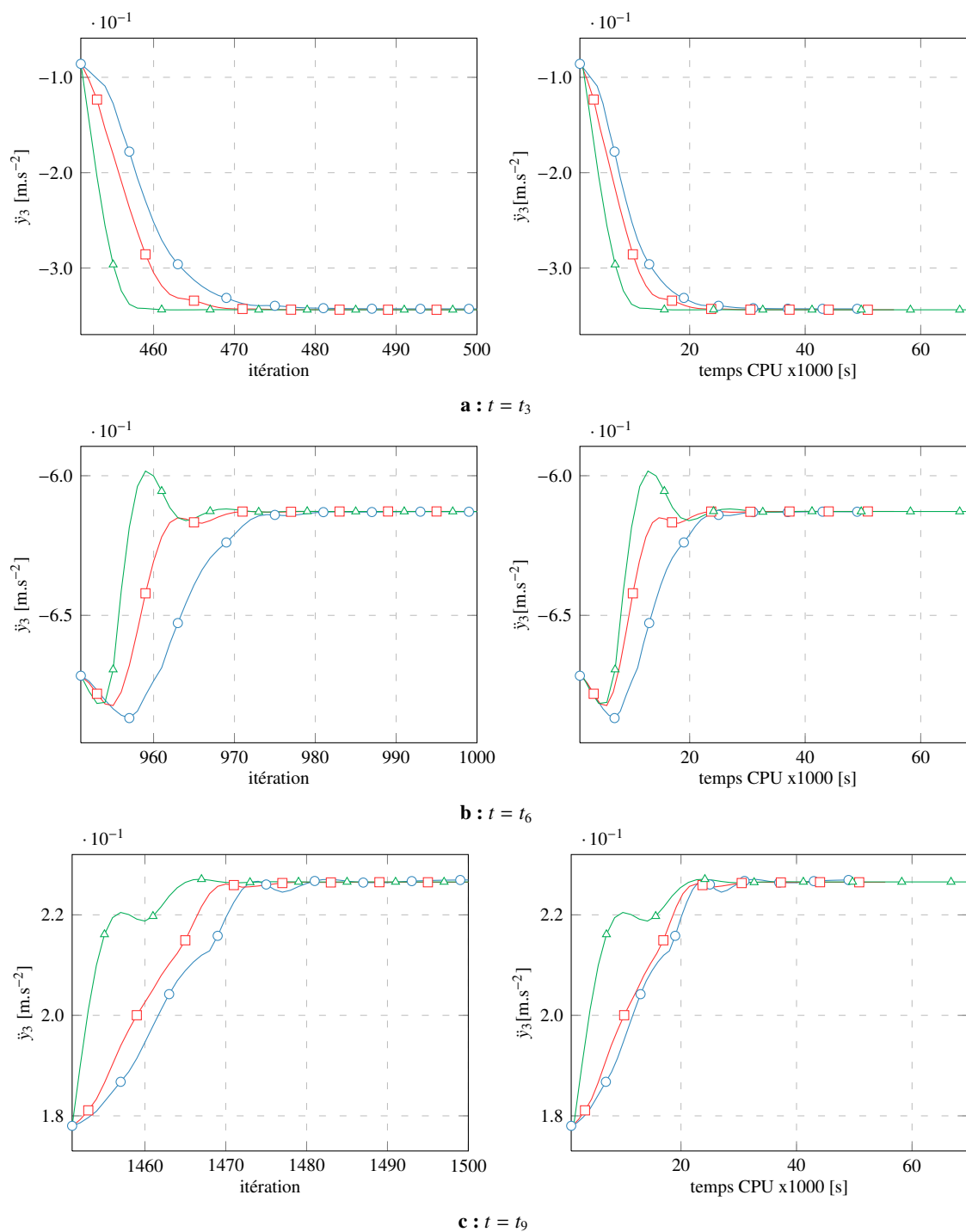
Dans cette section, les mêmes résultats que ceux présentés au cours des précédentes sections sont proposés pour deux pas de temps :  $\Delta t = 0.010$  s et  $\Delta t = 0.075$  s. À l'image de la précédente étude, les résultats de l'algorithme 3 sont utilisés. La figure E.2.14 présente l'accélération en fonction du coefficient de masse ajoutée artificielle lorsque le gain du solveur de pression est fixé à quatre ordres. Les figures E.2.15 et E.2.16 illustrent l'influence de la tolérance du solveur de pression sur l'accélération respectivement pour  $\Delta t = 0.010$  s et  $\Delta t = 0.075$  s. Ces résultats ne remettent pas en cause les remarques réalisées au cours des sections précédentes.



**Figure E.2.14 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.010$  s (gauche) et  $0.075$  s (droite) –  $p_{ga} = 4$  – Accélération en fonction de  $\bar{C}_a$  à  $t_3$ ,  $t_6$  et  $t_9$  :  $\circ$   $\bar{C}_a = 1.0$ ,  $-$   $\bar{C}_a = 4.0$ ,  $-.$   $\bar{C}_a = 6.0$ ,  $\triangle$   $\bar{C}_a = 9.0$ ,  $\dots$   $\bar{C}_a = 12.0$  et  $\square$   $\bar{C}_a = 15.0$



**Figure E.2.15 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.010$  s –  $\overline{C_a} = 9$  – Accélération en fonction de  $p_{ga}$  à  $t_3$ ,  $t_6$  et  $t_9$  :  
 —  $p_{ga} = 2$ , —  $p_{ga} = 3$  et —  $p_{ga} = 4$



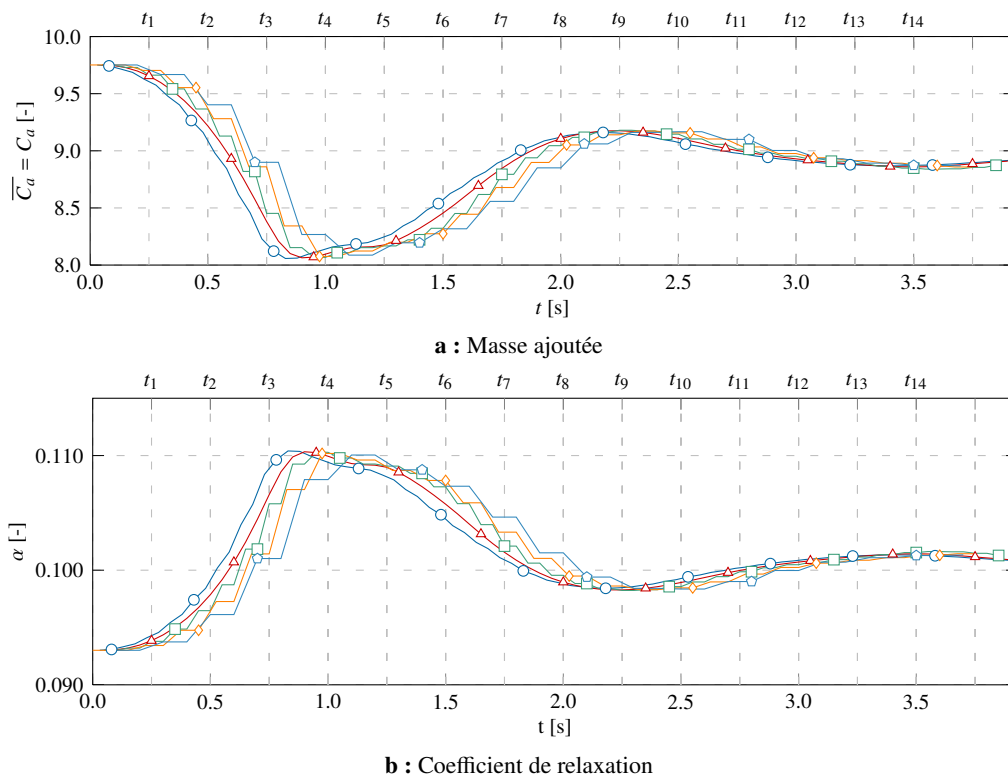
**Figure E.2.16 :** Une barge parallélépipédique –  $\Delta t = 0.075 \text{ s}$  –  $\overline{C_a} = 9$  – Accélération en fonction de  $p_{ga}$  à  $t_3$ ,  $t_6$  et  $t_9$  :  
 —  $\circ$  —  $p_{ga} = 2$ , —  $\square$  —  $p_{ga} = 3$  et —  $\triangle$  —  $p_{ga} = 4$

### E.2.9 Évaluation dynamique de la masse ajoutée

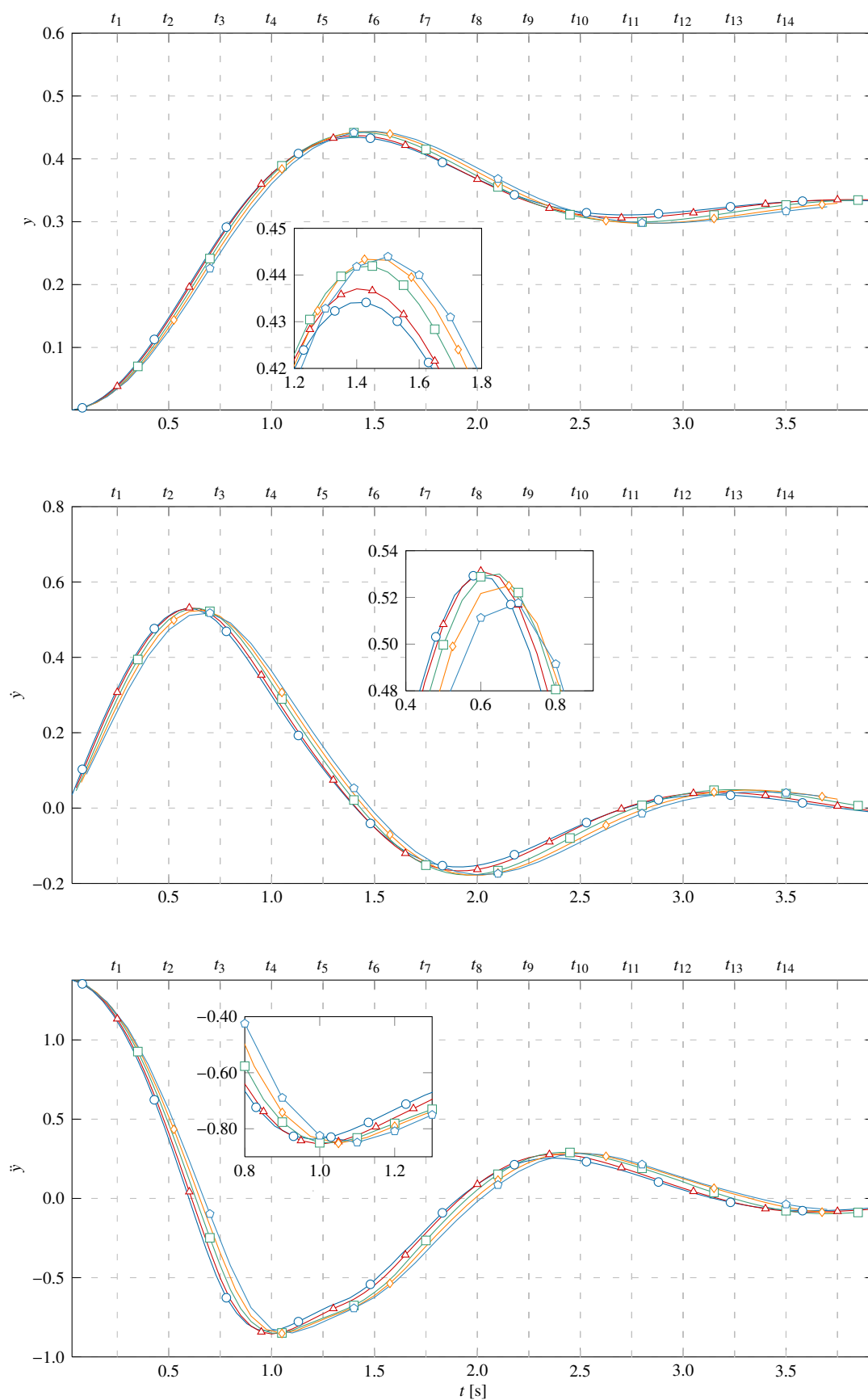
L'objectif de cette partie est de vérifier l'implémentation des fonctions permettant une évaluation de la masse ajoutée au cours de la simulation. L'évaluation de la masse ajoutée est réalisée par la méthodologie présentée à la section B.2.7 p. 70. Les précédents résultats montrent qu'un coefficient de masse ajoutée artificielle proche de la masse ajoutée « physique » permet d'obtenir de bonnes propriétés de convergence (cf. section E.2.6 p. 200). Ainsi, la masse ajoutée artificielle est fixée comme étant égale à la masse ajoutée évaluée dynamiquement. Cette évaluation est réalisée tous les 2 pas de temps. Le gain demandé au solveur de pression est de nouveau fixé à trois ordres. Des visualisations du champ de pression servant à l'évaluation de la masse ajoutée sont données en annexe (cf. annexe G.6.1.2 p. 378).

Les évolutions temporelles du coefficient de masse ajoutée et du coefficient de relaxation sont présentées à la figure E.2.17. La cinématique correspondante est, quant à elle, donnée à la figure E.2.18. Comme prévu, les résultats ne sont pas influencés par une évaluation dynamique de la masse ajoutée artificielle. De surcroît, lorsque la barge retrouve sa position d'équilibre hydrostatique, et la surface libre sa position au repos, un coefficient de masse ajoutée de l'ordre de 9 est bien retrouvé. Au cours de la simulation, le coefficient de masse ajouté évolue entre 8.0 (plus faible enfoncement dynamique) et 9.8 (plus grand enfoncement dynamique).

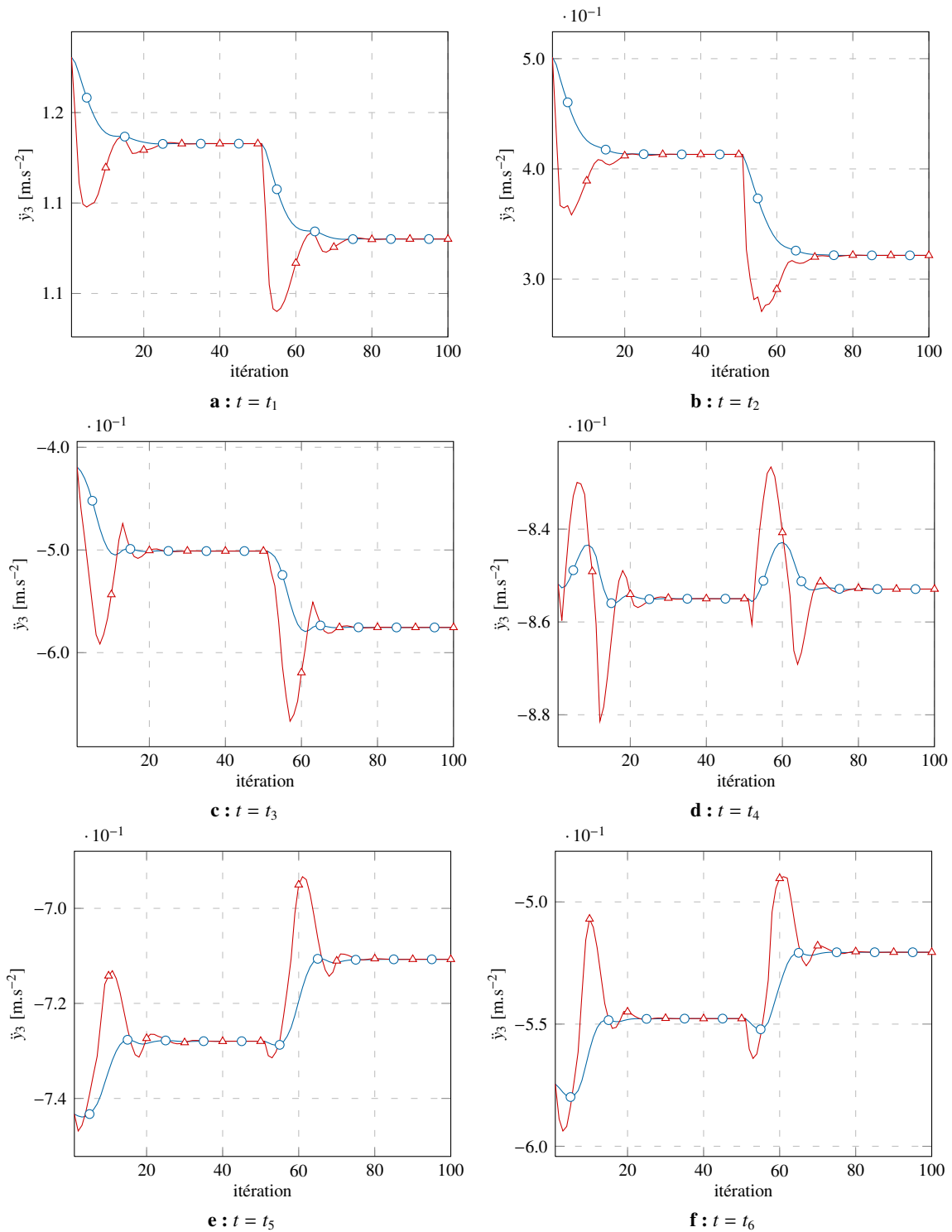
La comparaison des accélérations calculées par le solveur structure et celles relaxées est proposée à la figure E.2.19. Les résultats sont identiques quel que soit le pas de temps utilisé. Il est constaté que, pour ce type d'application, une vingtaine d'itérations est nécessaire pour atteindre un état parfaitement convergé. En conclusion, une évaluation dynamique de la masse ajoutée est possible lorsque cela est nécessaire ou avantageux.



**Figure E.2.17 :** Une barge parallélépipédique – Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Masse ajoutée (haut) et coefficient de relaxation correspondant (bas) :  $\Delta t = 0.010$  s,  $\Delta t = 0.025$  s,  $\Delta t = 0.050$  s,  $\Delta t = 0.075$  s et  $\Delta t = 0.100$  s



**Figure E.2.18 :** Une barge parallélépipédique – Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Cinématique :  $\Delta t = 0.010$  s,  $\Delta t = 0.025$  s,  $\Delta t = 0.050$  s,  $\Delta t = 0.075$  s et  $\Delta t = 0.100$  s



**Figure E.2.19 :** Une barge parallélépipédique – Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Comparaison de  $\ddot{y}_3$  et  $\ddot{y}$  à  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ ,  $t_5$  et  $t_6$  –  $\Delta t = 0.025$  s :  $\circ$   $\ddot{y}_3$  et  $\triangle$   $\ddot{y}$

### E.2.10 Conclusion

L'objectif principal de cette application était de valider la prise en compte des effets de masse ajoutée au sein de l'algorithme de couplage sur un cas simple. En effet, à la différence des précédentes applications, ces effets ne sont plus négligeables et, par conséquent, la stabilité des algorithmes de couplage classiques n'est plus assurée.

Trois méthodes de prise en compte des effets de masse ajoutée ont été testées. Ces trois méthodes possèdent des avantages et des inconvénients différents d'un point de vue pratique (cf. section D.5.6 p. 165). Cependant, elles produisent des résultats identiques pour ce cas d'application (effort structurel constant) si le coefficient de masse ajoutée artificielle est choisi correctement (cf. section E.2.5 p. 194). Dans la suite de ces travaux, c'est l'algorithme 3 qui est choisi car il permet d'être totalement non-intrusif au niveau des différents solveurs puisqu'il consiste « simplement » à relaxer la cinématique (et plus particulièrement l'accélération) avant de transférer les résultats au solveur fluide. Ici, la reconstruction des vitesses et positions à partir d'une accélération relaxée est simple puisque le corps considéré ne possède qu'un degré de liberté. Par contre, lorsque le corps possède six degrés de liberté, les étapes de reconstruction des vitesses et positions sont plus complexes. L'implémentation est validée sur un autre cas d'application (cf. section E.4 p. 238).

Du fait de sa simplicité, ce cas d'application permet d'évaluer qualitativement l'influence de certains paramètres numériques. Dans un premier temps, l'influence du coefficient de masse ajoutée artificielle a été étudiée (cf. section E.2.6 p. 200). Au cours de cette partie, il a été remarqué que la convergence de l'accélération s'effectuait correctement si le coefficient de masse ajoutée artificiel est proche du coefficient de masse ajoutée physique. En outre, l'utilisation d'un faible coefficient de relaxation n'est pas préjudiciable si son évaluation repose sur le phénomène de masse ajoutée. Dans un second temps, l'étude de l'influence du gain du solveur de pression a été réalisée (cf. section E.2.7 p. 202). Si un gain élevé (gain de quatre ordres) permet de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un état convergé, il n'en reste pas moins que les coûts CPU sont plus élevés que lorsqu'un gain intermédiaire (gain de trois ordres) est utilisé. De manière plus surprenante, un gain plus faible (deux ordres) peut ponctuellement fournir un état convergé différent. Cependant, la cinématique de la barge n'est pas significativement modifiée par ces états ponctuels différents. Enfin, les résultats obtenus pour quelques pas de temps sont présentés (cf. section E.2.8 p. 204) pour vérifier que les conclusions réalisées précédemment sont indépendantes du pas de temps utilisé.

La dernière étape de ce cas d'application a été de réaliser des simulations avec une évaluation dynamique de la masse ajoutée pour vérifier l'implémentation des fonctions correspondantes. Il a notamment été vérifié que les résultats ne dépendent pas de l'évolution du coefficient de relaxation.

La totalité des cas d'application étudiés jusqu'à présent concernaient des situations bidimensionnelles relativement simples. Les prochaines applications ont donc pour vocation de valider l'algorithme de couplage pour des situations plus complexes et/ou plus réalistes.

## E.3 Une frégate soumise à une houle de face

### Liste des figures de l'application

E.3.1	Géométrie . . . . .	213
E.3.2	Repère de la géométrie . . . . .	213
E.3.3	Une première approche de la résistance ajoutée de face – Décomposition . . . . .	214
E.3.4	Une première approche de la résistance ajoutée de face – Adimensionnalisation . . . . .	215
E.3.5	Résistance à l'avancement en modèle libre – Résultats . . . . .	217
E.3.6	Résistance à l'avancement en modèle libre – Élévation de la surface libre sur la carène . . . . .	218
E.3.7	Résistance à l'avancement en modèle libre – Surface libre – $Fr = 0.28$ . . . . .	218
E.3.8	Résistance à l'avancement en modèle libre – Surface libre – $Fr = 0.41$ . . . . .	219
E.3.9	Domaine de simulation . . . . .	221
E.3.10	Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts – $Fr = 0.28$ . . . . .	226
E.3.11	Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts – $Fr = 0.41$ . . . . .	227
E.3.12	Amplitude de la houle . . . . .	229
E.3.13	Fonction de transfert des premiers harmoniques – $Fr = 0.28$ . . . . .	230
E.3.14	Fonction de transfert des premiers harmoniques – $Fr = 0.41$ . . . . .	230
E.3.15	Valeur moyenne du mouvement de pilonnement . . . . .	231
E.3.16	Valeur moyenne du mouvement de tangage . . . . .	231
E.3.17	Amplitude du premier harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	232
E.3.18	Amplitude du premier harmonique du mouvement de tangage . . . . .	232
E.3.19	Phase du premier harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	233
E.3.20	Phase du premier harmonique du mouvement de tangage . . . . .	233
E.3.21	Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	234
E.3.22	Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de tangage . . . . .	234
E.3.23	Résistance ajoutée adimensionnelle en modèle libre . . . . .	235
E.3.24	Résistance ajoutée en modèle libre et fixe . . . . .	236

### Liste des tableaux de l'application

E.3.1	Caractéristiques . . . . .	213
E.3.2	Résistance à l'avancement en modèle libre . . . . .	216
E.3.3	Résistance à l'avancement en modèle libre – Efforts hydrostatiques . . . . .	217
E.3.4	Liste des simulations . . . . .	222
E.3.5	Pas de temps – Nombres de cellules – Nombres moyen d'itérations par pas de temps . . . . .	223
E.3.6	Modèle fixe – Liste des configurations . . . . .	224
E.3.7	Modèle fixe – Rappel des coefficients de résistance en eau calme . . . . .	224
E.3.8	Modèle fixe – Résultats et comparaison – $Fr = 0.28$ . . . . .	226
E.3.9	Modèle fixe – Résultats et comparaison – $Fr = 0.41$ . . . . .	227

### Liste des figures de l'application en annexe

G.6.2.1	Maillage – Vue générale . . . . .	381
G.6.2.2	Maillage – Vue de côté . . . . .	381
G.6.2.3	Maillage – Vue du navire . . . . .	381
G.6.2.4	Maillage – Vue du dessus au niveau de la surface libre . . . . .	382
G.6.2.5	Maillage – Zoom sur le bulbe . . . . .	382
G.6.2.6	Maillage – Zoom sur la poupe . . . . .	382
G.6.2.7	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	385
G.6.2.8	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	385
G.6.2.9	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de tangage . . . . .	386
G.6.2.10	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	386
G.6.2.11	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Effort de résistance . . . . .	387
G.6.2.12	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Surface libre . . . . .	387
G.6.2.13	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	388
G.6.2.14	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	388
G.6.2.15	$Fr = 0.28$ , $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de tangage . . . . .	389



G.6.2.16	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	389
G.6.2.17	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Effort de résistance . . . . .	390
G.6.2.18	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Surface libre . . . . .	390
G.6.2.19	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	391
G.6.2.20	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	391
G.6.2.21	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de tangage . . . . .	392
G.6.2.22	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	392
G.6.2.23	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Effort de résistance . . . . .	393
G.6.2.24	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Surface libre . . . . .	393
G.6.2.25	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	394
G.6.2.26	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	394
G.6.2.27	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de tangage . . . . .	395
G.6.2.28	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	395
G.6.2.29	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Effort de résistance . . . . .	396
G.6.2.30	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Surface libre . . . . .	396
G.6.2.31	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	397
G.6.2.32	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	397
G.6.2.33	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de tangage . . . . .	398
G.6.2.34	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	398
G.6.2.35	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Effort de résistance . . . . .	399
G.6.2.36	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Surface libre . . . . .	399
G.6.2.37	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	400
G.6.2.38	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	400
G.6.2.39	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de tangage . . . . .	401
G.6.2.40	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	401
G.6.2.41	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Effort de résistance . . . . .	402
G.6.2.42	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Surface libre . . . . .	402
G.6.2.43	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	403
G.6.2.44	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	403
G.6.2.45	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de tangage . . . . .	404
G.6.2.46	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	404
G.6.2.47	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Effort de résistance . . . . .	405
G.6.2.48	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Surface libre . . . . .	405
G.6.2.49	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	406
G.6.2.50	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	406
G.6.2.51	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de tangage . . . . .	407
G.6.2.52	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	407
G.6.2.53	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Effort de résistance . . . . .	408
G.6.2.54	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Surface libre . . . . .	408

Liste des tableaux de l'application en annexe

G.6.2.1	Résistance ajoutée – Amplitude de la moyenne et des trois premiers harmoniques . . . . .	383
---------	--	-----

### E.3.1 Description

La présente étude consiste à étudier le mouvement de pilonnement et de tangage d'une frégate militaire de l'US Navy de type DTMB soumise à une houle incidente de face. Deux nombres de Froude, trois amplitudes de houle ainsi qu'un certain nombre de longueurs d'onde sont étudiés. Les calculs sont réalisés à l'échelle maquette. Cette étude permet de vérifier l'algorithme de couplage de manière qualitative et quantitative sur un cas d'application industrielle.

De nombreux résultats expérimentaux existent pour cette forme de navire et ceci pour deux échelles différentes (dénommées couramment 5415 et 5512). Les principales caractéristiques de ces maquettes sont données au tableau E.3.1<sup>4</sup>.

Avant de simuler la dynamique du navire en pilonnement et en tangage lorsqu'il est soumis à une houle de face, une première étude de résistance à l'avancement en modèle libre est réalisée afin de valider certains paramètres physiques et numériques. De plus, ces simulations serviront de valeur de référence pour évaluer la résistance ajoutée sur houle. Cette dernière est la principale quantité que l'on souhaite évaluer lorsque ce type de simulation est réalisé. De surcroît, des simulations en modèle fixe avec houle de face sont également étudiées avant de relâcher les degrés de liberté du navire afin d'évaluer la part de l'effet de masse ajoutée due aux effets de radiation uniquement.



Figure E.3.1 : DTMB – Géométrie

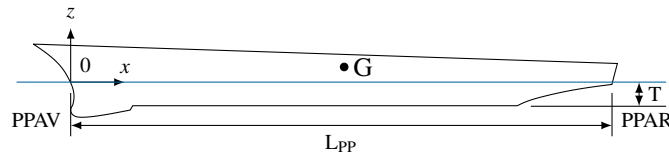


Figure E.3.2 : DTMB – Repère de la géométrie

Paramètre	Échelle réelle	5512	5415	5512	Unité
Bassin/Simulation		IIHR	INSEAN	Simulation	
Échelle	1	1/46.588	1/24.824	1/46.588	
$L_{pp}$	142.00	3.048	5.720	3.048	m
$L_{WL}$	142.18	3.052	5.726	3.052	m
$B_{wl}$	19.10	0.410	0.769	-	m
$T$	6.16	0.136	0.248	0.133 <sup>4</sup>	m
$\nabla$	8472	0.086	0.554 <sup>4</sup>	0.0864 <sup>4</sup>	m <sup>3</sup>
$x_G$	-	1.5397	2.8855 <sup>4</sup>	1.537 <sup>4</sup>	m
$x_G/L_{pp}$	-	0.5052	0.5045 <sup>4</sup>	0.5043 <sup>4</sup>	
$z_G$	-	0.084	-	0.029 <sup>4</sup>	m
$I_y$	-	53.88	-	50.43 <sup>4</sup>	kg.m <sup>2</sup>
$S_w$	-	1.371	4.786 <sup>4</sup>	1.371	m <sup>2</sup>

Tableau E.3.1 : DTMB – Caractéristiques

La résistance ajoutée d'un navire est définie comme la différence entre la moyenne de l'effort de résistance lorsque le navire est soumis à une houle incidente et la résistance en eau calme (notée  $f_x^*$  ici) pour un nombre

4. Pour les bassins, les valeurs sont tirées de [Yoon, 2009] si aucune référence à cette note de bas de page n'est réalisée. Dans le cas contraire, ce sont les données de [Simman2008, 2013] qui sont présentées à titre indicatif. Les données utilisées lors des simulations de réponse sur houle peuvent être différentes et sont tirées de [Irvine *et al.*, 2008]. Toutes les positions sont données dans le repère de la figure E.3.2.

de Froude identique. Il est également possible de présenter la résistance ajoutée sous deux formes adimensionnelles. La première représente l'augmentation de la résistance par rapport à la valeur en eau calme. Elle est donnée par :

$$R_{aw} = \frac{f_{x0} - f_x^*}{f_x^*} \quad (E.3.1)$$

Au sein de l'équation précédente,  $f_{x0}$  représente la moyenne de l'effort de résistance sous houle incidente et  $f_x^*$  la résistance à l'avancement en eau calme. La seconde forme adimensionnelle permet de prendre en compte l'amplitude de la houle. Il est couramment admis que, pour une fréquence de rencontre donnée, ce coefficient adimensionnel est constant. Il sera donc utilisé pour vérifier l'ordre de grandeur des résultats obtenus. Il est défini par :

$$R_{aw}^A = \frac{f_{x0} - f_x^*}{A^2 \cdot \rho \cdot g \cdot (B_{wl}^2 / L_{WL})} \quad (E.3.2)$$

Dans l'équation précédente,  $A$  est l'amplitude de vague,  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération gravitationnelle. La résistance ajoutée est un phénomène particulièrement complexe dont l'estimation précise reste difficile à l'heure actuelle [Arribas, 2007]. Quelques considérations qualitatives peuvent néanmoins être réalisées afin de construire des modèles plus ou moins précis [Alexandersson, 2009].

Les causes de l'augmentation de la résistance due à une houle incidente (résistance ajoutée) sont généralement divisées en deux sous-phénomènes principaux. En premier lieu, le navire va transmettre de l'énergie au fluide environnant du fait de ses mouvements répétés de pilonnement et/ou de tangage. Ce mécanisme peut se visualiser par le biais de vagues radiées, vagues qui ont tendance à amortir les mouvements du navire. Ce phénomène est prépondérant lorsque les mouvements du navire sont importants. Cette situation peut se retrouver lorsque la fréquence d'excitation (fréquence de rencontre) est proche de la zone de résonance mécanique (système masse/raideur) ou bien quand la réponse géométrique à la houle est importante, c.-à-d. lorsque la longueur d'onde de la houle incidente est proche de la longueur du navire. En deuxième lieu, une autre cause physique de la résistance ajoutée est la diffraction (ou réflexion) de la houle incidente du fait de la présence du navire. Ce phénomène est, quant à lui, prépondérant lorsque les mouvements du navire sont faibles. Cette approche est rapidement présentée aux figures E.3.3 et E.3.4.

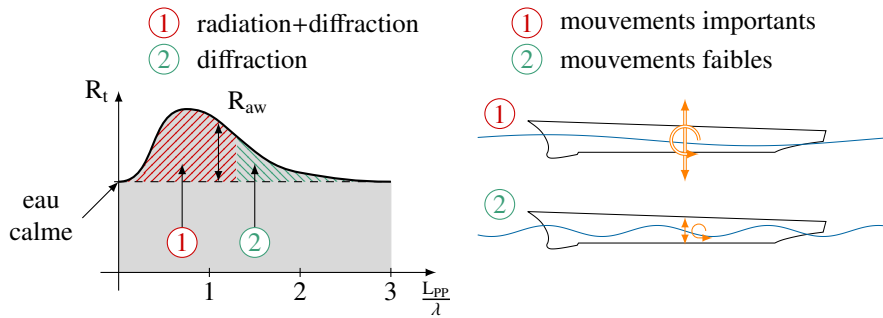


Figure E.3.3 : Une première approche de la résistance ajoutée de face – Décomposition

Il est important de remarquer que les champs de vagues radiées et diffractées interagissent également avec le champ de vagues résultant de la vitesse d'avance du navire. Cependant, ce dernier champ de vagues est assimilé comme étant contenu dans la résistance en eau calme et son influence n'est pas prise en compte dans les modèles de résistance ajoutée ce qui est une source d'erreur. A cela, des phénomènes supplémentaires peuvent s'ajouter comme des impacts violents entre la carène et la surface libre (« slamming ») par exemple.

D'autres considérations sont également couramment admises<sup>5</sup> [Rossell *et al.*, 1989]. La résistance ajoutée sur houle de face est indépendante de la résistance en eau calme et proportionnelle au carré de la hauteur de la houle. Les mouvements de tangage induits ont un effet prépondérant sur la résistance ajoutée. Enfin, les phénomènes de radiation induisent une résistance ajoutée plus importante que celle induite par les phénomènes de diffraction.

5. Elles peuvent également être source d'erreur.

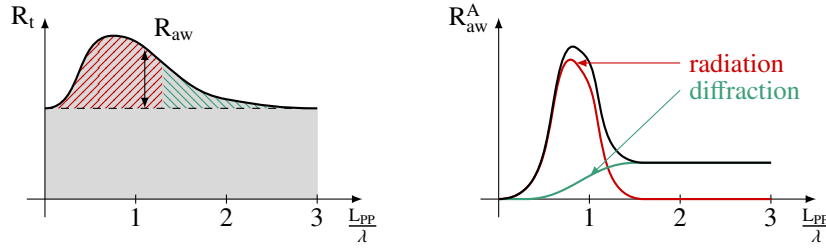


Figure E.3.4 : Une première approche de la résistance ajoutée de face – Adimensionnalisation

Ces différents commentaires montrent bien la complexité du phénomène global et explicitent également l'importance d'évaluer correctement la cinématique du navire puisque ce phénomène est prépondérant lorsque les phénomènes de radiation sont importants [Arribas, 2007]. La comparaison de la dynamique du navire sous houle incidente avec des résultats expérimentaux est donc l'objectif premier de cette étude. Le second objectif est de présenter et d'analyser rapidement les valeurs de résistance ajoutée obtenues grâce aux simulations numériques. L'effort de résistance n'étant pas mesuré lors des essais, aucune validation quantitative de ces efforts ne peut être effectuée.

### E.3.2 Simulations de résistance à l'avancement en modèle libre

Afin d'évaluer la résistance ajoutée sur houle, il est nécessaire de connaître la résistance en eau calme du navire considéré. La résistance à l'avancement en modèle libre de la maquette utilisée est donc évaluée. Les résultats sont présentés au tableau E.3.2. Pour les deux nombres de Froude considérés (0.28 et 0.41), trois maillages différents sont testés. Le premier possède un raffinement grossier de la surface libre. Le second maillage est plus raffiné au niveau de la surface libre qui est proche de la carène. Ce maillage est assez proche du maillage utilisé lors des simulations avec houle incidente<sup>6</sup>. Finalement, le troisième maillage utilise un raffinement automatique de la surface libre.

Les résultats sont comparés à des résultats expérimentaux obtenus pour deux échelles différentes. En ce qui concerne l'échelle qui nous intéresse tout particulièrement (5512), les résultats sont tirés de [Longo et Stern, 2005]. Pour l'autre échelle (5412), les résultats sont extraits de [Olivieri *et al.*, 2001] et les données utilisées sont celles du bassin INSEAN (cf. tableau E.3.1 p. 213). Afin de s'affranchir des effets d'échelle, le coefficient de résistance résiduaire, coefficient noté  $C_r$ , est comparé en plus du coefficient de résistance totale qui lui est noté  $C_T$ . L'évaluation du coefficient de résistance résiduaire nécessite la connaissance du coefficient de frottement [ITTC, 1957]. Leurs définitions respectives sont présentées par les équations ci-dessous<sup>7</sup>.

$$C_T = \frac{f_x}{0.5 \cdot \rho \cdot S_w \cdot U^2} \quad C_f = \frac{0.075}{(\log_{10}(\text{Re}) - 2)^2} \quad C_r = C_T - C_f \quad (\text{E.3.3})$$

Puisque les résultats expérimentaux n'utilisent pas l'adimensionnalisation présentée ci-dessus, les coefficients de résistance expérimentaux ont été évalués directement à partir de l'effort de résistance. Cependant, les coefficients de frottement sont laissés tels quels car la viscosité cinématique servant à déterminer le nombre de Reynolds n'est pas présentée. Les coefficients résiduaires expérimentaux sont évalués par soustraction des deux coefficients précédents. De plus, les conventions suivantes sont utilisées : un enfoncement (noté  $x_3$ ) positif correspond à une ascension verticale du navire et une assiette (notée  $x_5$ ) positive correspond à un navire qui cabre, c.-à-d. à un navire qui lève sa proue.

Le déplacement et la position verticale du centre de gravité ne sont pas strictement identiques (cf. tableau E.3.1 p. 213) aux conditions expérimentales servant de référence. En effet, le déplacement du navire est de  $0.086 \text{ m}^3$  lors des essais en modèle libre avec houle de face (déplacement utilisé ici) et de  $0.079 \text{ m}^3$  lors des essais expérimentaux en eau calme<sup>8</sup>. En outre, la position verticale du centre de gravité n'est pas fournie, ce qui amène une incertitude supplémentaire. Lors de ces travaux, les caractéristiques de la maquette utilisée avec une

6. Lorsqu'une houle incidente est modélisée, un raffinement de la surface libre est nécessaire pour modéliser correctement la propagation de la houle.

7. Le facteur de forme utilisé dans l'ITTC78 n'est pas pris en compte. Seule la méthode ITTC57 est donc utilisée.

8. Il est fourni par le biais du coefficient de bloc.

houle incidente sont utilisées pour étudier l'influence du maillage. Le maillage proche de celui utilisé lors des simulations avec houle de face (maillage 2) est également utilisé dans un second temps avec le déplacement correspondant à celui des essais expérimentaux pour vérifier que les différences obtenues sont bien dues à la différence de déplacement.

Dans ce paragraphe, seuls les résultats de l'étude en maillage sont analysés, c.-à-d. lorsque  $\nabla = 0.086 \text{ m}^3$ . L'étude de l'influence du déplacement utilisé est réalisée au paragraphe suivant. Lorsque le raffinement automatique de la surface libre est activé (troisième maillage), les résultats obtenus sont sensiblement identiques à ceux obtenus pour le second maillage. Les caractéristiques du second maillage peuvent donc servir de référence à la construction des maillages avec houle incidente. En opposition, des différences notables sont observées entre le premier maillage et les deux derniers. Ces différences s'observent sur les efforts et la position d'équilibre mais également sur l'élévation de la surface libre. Effectivement, une diffusion numérique rapide de la surface libre est observée pour le premier maillage (maillage grossier) (cf. figures E.3.7 p. 218 et E.3.8 p. 219). Ces différences sont également visibles au niveau de l'élévation de la surface libre sur la carène du navire (cf. figure E.3.6 p. 218).

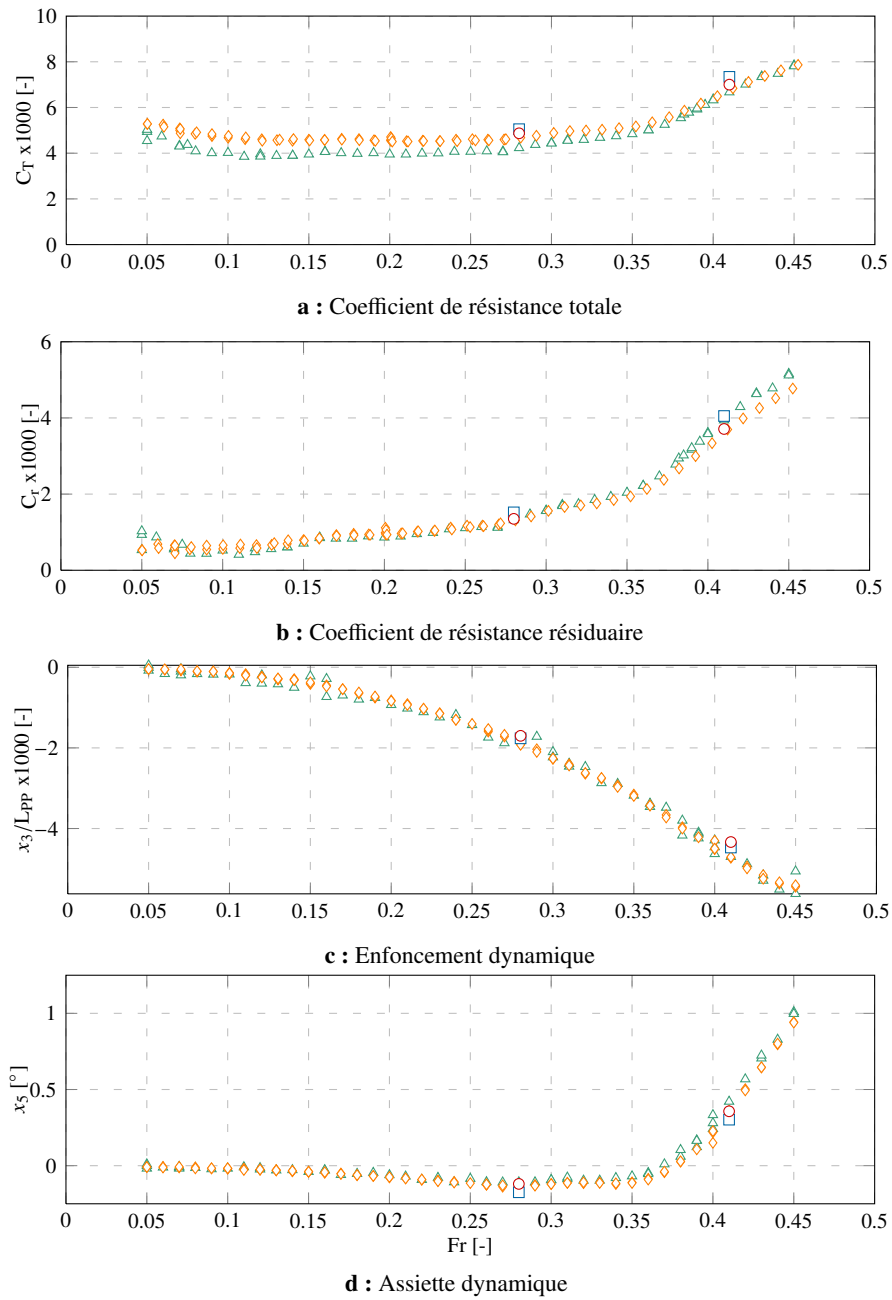
Lorsque ce premier déplacement est utilisé, les résistances en eau calme sont nettement supérieures à celles évaluées lors des essais expérimentaux. Si l'on considère uniquement le second maillage, les résistances évaluées sont supérieures de 7.9% ( $Fr = 0.28$ ) et de 7.3% ( $Fr = 0.41$ ) par rapport aux essais expérimentaux. Lorsqu'un déplacement identique est utilisé, ces différences ne sont respectivement plus que de 4.0% et 2.3%. Ces pourcentages sont en dessous des 5% habituellement utilisés comme valeur de précision attendue pour ce type de simulation. En conclusion, le second maillage permet d'estimer correctement la résistance ajoutée du navire, ce qui n'est pas le cas du premier maillage. Le troisième maillage a été utilisé pour vérifier que la majorité des effets de la surface libre sont bien captés par le second maillage.

Cas	$\nabla [\text{m}^3]$	$Fr [-]$	$x_3/L_{PP} [-]$ x1000	$x_5 [^\circ]$	$f_x [\text{N}]$	$C_T [-]$ x1000	$C_f [-]$ x1000	$C_r [-]$ x1000
maillage 1	0.086	0.28	-1.677	-0.175	8.38	5.21	3.53	1.69
maillage 2	0.086	0.28	-1.763	-0.174	8.11	5.05	3.53	1.52
maillage 3	0.086	0.28	-1.766	-0.170	8.10	5.04	3.53	1.51
maillage 2	0.079	0.28	-1.700	-0.120	7.83	4.87	3.53	1.35
exp. (5512)	0.079	0.28	-1.912	-0.135	7.58	4.68	3.37	1.31
exp. (5415)	0.554	0.28	-1.820	-0.108	45.2	4.23	2.91	1.32
maillage 1	0.086	0.41	-4.383	0.311	25.35	7.36	3.29	4.07
maillage 2	0.086	0.41	-4.471	0.302	25.28	7.34	3.29	4.05
maillage 3	0.086	0.41	-4.043	0.294	25.05	7.27	3.29	3.99
maillage 2	0.079	0.41	-4.335	0.357	24.12	7.00	3.29	3.71
exp. (5512)	0.079	0.41	-4.725	0.358	23.80	6.84	3.14	3.70
exp. (5415)	0.554	0.41	-4.700	0.421	152.7	6.67	2.73	3.94

**Tableau E.3.2 :** DTMB 5512 – Résistance à l'avancement en modèle libre

Dans la suite de l'étude, les résistances de référence en eau calme seront donc prises égales à celles obtenues avec le maillage 2 lorsque le déplacement vaut  $0.086 \text{ m}^3$  afin d'être cohérent avec la maquette de référence mais également numériquement. De plus, l'étude en modèle fixe avec houle de face permet de comparer également la valeur moyenne de l'effort de pilonnement et du moment de tangage due à la houle. Il sera donc nécessaire de retrancher au signal obtenu les valeurs hydrostatiques obtenues en eau calme. Ces résultats sont présentés pour le maillage 2 au tableau E.3.3.

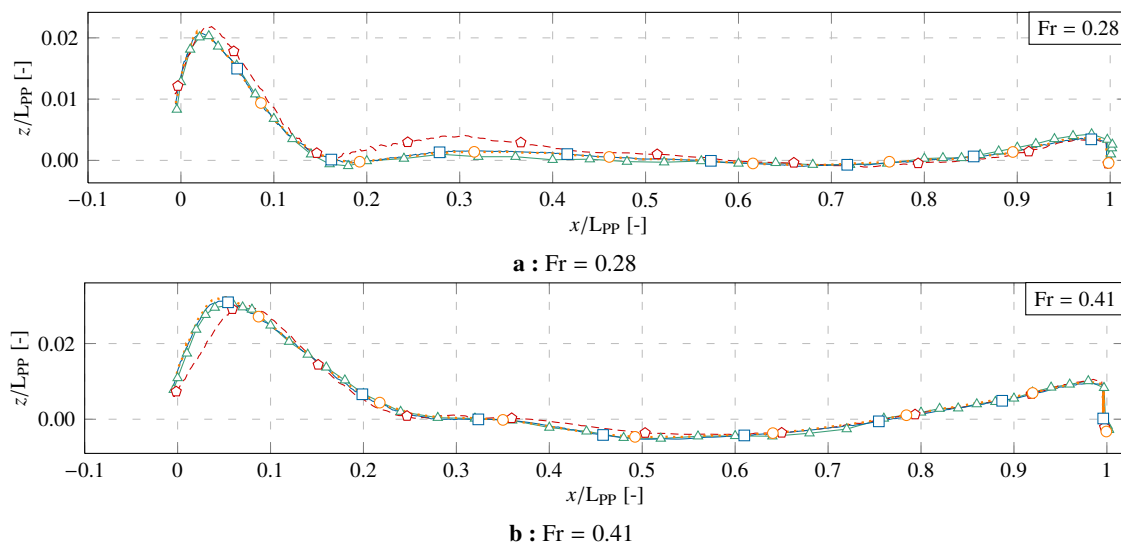
En conclusion de cette section, la comparaison des résultats entre les essais expérimentaux et les simulations numériques en eau calme est satisfaisante. De surcroît, les valeurs de référence que sont la résistance, l'effort de pilonnement, le moment de tangage, l'enfoncement et l'assiette dynamiques ont été évaluées pour la suite de l'étude.



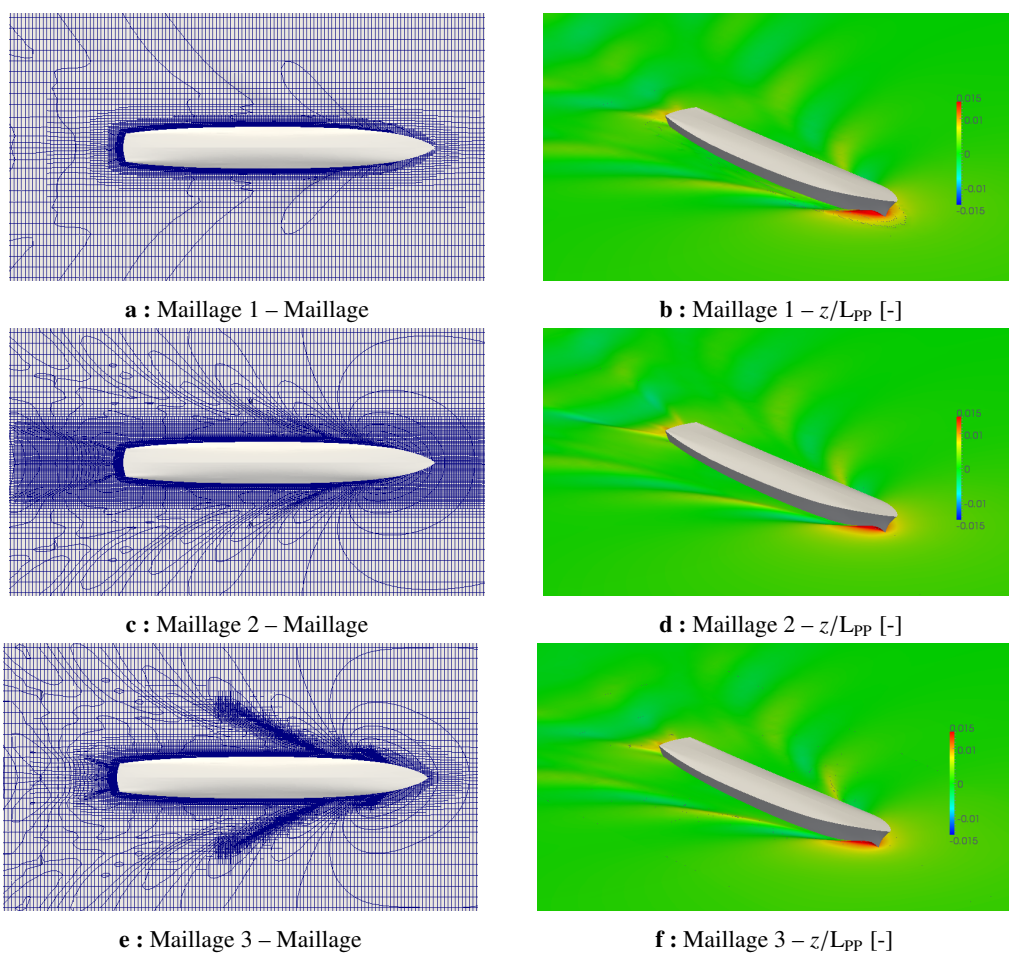
**Figure E.3.5 :** DTMB 5512 – Résistance à l’avancement en modèle libre – Résultats :  $\square$  maillage 2 ( $\nabla = 0.086 \text{ m}^3$ ),  $\circ$  maillage 2 ( $\nabla = 0.079 \text{ m}^3$ ),  $\triangle$  expérience (5415) et  $\diamond$  expérience (5512)

Fr [-]	$f_z^h$ [N]	$m_y^h$ [N.m]
0.28	896	4.12
0.41	987	-53.6

**Tableau E.3.3 :** DTMB 5512 – Résistance à l’avancement en modèle libre – Effort de pilonnement et moment de tangage hydrostatiques pour le maillage 2

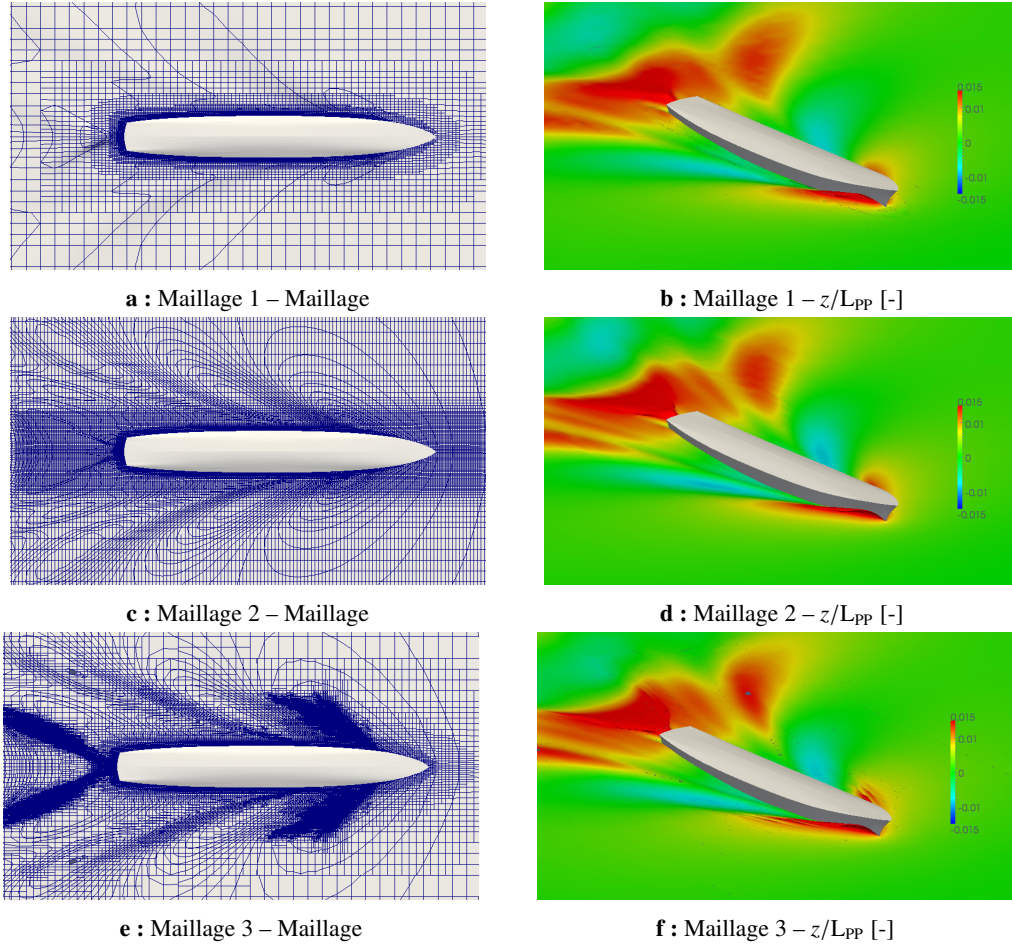


**Figure E.3.6 :** DTMB 5512 – Résistance à l’avancement en modèle libre – Élévation de la surface libre sur la carène – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) : -◇-◇- maillage 1 ( $\nabla = 0.086 \text{ m}^3$ ), -□-□- maillage 2 ( $\nabla = 0.086 \text{ m}^3$ ), ○ maillage 3 ( $\nabla = 0.086 \text{ m}^3$ ) et -○-○- expérience (5512)



**Figure E.3.7 :** DTMB 5512 – Résistance à l’avancement en modèle libre – Maillage de la surface libre – Élévation de la surface libre  $z/L_{pp}$  – Fr = 0.28





**Figure E.3.8 :** DTMB 5512 – Résistance à l’avancement en modèle libre – Maillage de la surface libre – Élévation de la surface libre  $z/L_{pp}$  –  $Fr = 0.41$

### E.3.3 Simulations de réponse à une houle incidente de face

#### E.3.3.1 Description

L’objectif principal de ce cas d’application est de valider la dynamique du navire soumis à une houle incidente de face. La houle et la vitesse d’avance du navire sont imposées. Les mouvements de pilonnement et de tangage sont libres. Les résultats expérimentaux sont tirés de [Irvine *et al.*, 2008]. Les principales notations utilisées sont explicitées ci-dessous :

- $Fr$  : nombre de Froude ;
- $U$  : vitesse d’avance du navire ;
- $A$  : amplitude de la houle (demi-hauteur) ;
- $H$  : hauteur crête-à-creux de la houle ;
- $\lambda$  : longueur d’onde de la houle incidente ;
- $A_k$  : cambrure de la houle <sup>9</sup> ;
- $f_w$  : fréquence de houle ;
- $f_b$  : fréquence du navire ;
- $f_e$  : fréquence de rencontre ;
- $T_e$  : période de rencontre du navire ;
- $x_3$  : mouvement de pilonnement ;
- $x_5$  : mouvement de tangage ;
- $f_x$  : effort de résistance ;
- $f_x^*$  : effort de résistance en eau calme.



Les formules liant les différentes quantités<sup>9</sup> sont données aux équations (E.3.4) et (E.3.5).

$$H = 2A \quad T_e = \frac{1}{f_e} \quad f_w = \sqrt{\frac{g}{2\pi \cdot \lambda}} \quad f_b = \frac{U}{\lambda} \quad (\text{E.3.4})$$

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L_{\text{PP}}}} \quad A_k = 2\pi \frac{A}{\lambda} \quad f_e = f_w + f_b \quad (\text{E.3.5})$$

L'élévation temporelle de la surface libre est notée  $z$ . Le mouvement de pilonnement, le mouvement de tangage et les différents efforts hydrodynamiques sont approximés par une série de Fourier de la façon suivante :

$$z(t^*) = z_0 + z_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_e \cdot t^* + \gamma_{z1}) \quad (\text{E.3.6})$$

$$x_3(t) = x_{30} + \sum_{i=1}^n x_{3i} \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot f_e \cdot t + \gamma_{3i}) \quad (\text{E.3.7})$$

$$x_5(t) = x_{50} + \sum_{i=1}^n x_{5i} \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot f_e \cdot t + \gamma_{5i}) \quad (\text{E.3.8})$$

$$f_x(t) = f_{x0} + \sum_{i=1}^n f_{xi} \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot f_e \cdot t + \gamma_{fi}) \quad (\text{E.3.9})$$

$$f_z(t) = f_{z0}^* + f_{z0} + \sum_{i=1}^n f_{zi} \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot f_e \cdot t + \gamma_{fi}) \quad (\text{E.3.10})$$

$$m_y(t) = m_{y0}^* + m_{y0} + \sum_{i=1}^n m_{yi} \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot f_e \cdot t + \gamma_{m_{yi}}) \quad (\text{E.3.11})$$

Les termes  $f_{z0}^*$  et  $m_{y0}^*$  représentent des valeurs de retranchement. Ces valeurs sont utilisées pour faciliter la comparaison aux essais expérimentaux. Si cela n'est pas clairement spécifié, ces valeurs sont nulles. Les phases sont évaluées de telle sorte que la crête d'une vague coïncide avec la position longitudinale du centre de gravité du navire à  $t = 0$ . La relation entre le temps utilisé lors des simulations  $t^*$  et le temps utilisé lors du post-traitement  $t$ , est donnée par l'équation (E.3.12). Une élévation positive correspond à une élévation verticale de la surface libre. Un pilonnement positif correspond à une ascension verticale du navire. Un tangage positif correspond à un navire qui se cabre.

$$t = t^* + \frac{\gamma_{z1}}{2\pi \cdot f_e} \quad (\text{E.3.12})$$

Afin d'analyser plus facilement les résultats, deux fréquences particulières seront utilisées. Elles correspondent à  $\lambda = L_{\text{PP}}$  et  $\lambda = 1.5L_{\text{PP}}$  et seront respectivement notées  $f_e^1$  et  $f_e^{1.5}$ . Lors des essais expérimentaux en modèle libre, l'effort de résistance n'a pas été mesuré. Par contre, des essais en modèle captif ont été réalisés pour évaluer la résistance ajoutée due à la diffraction du champ de houle [Longo et Stern, 2005]. Des simulations en modèle fixe sont donc réalisées.

La liste exhaustive des simulations réalisées en modèle libre est donnée au tableau E.3.4. La majorité des simulations peuvent être comparées à des résultats expérimentaux mais un petit nombre d'entre elles ont été réalisées pour vérifier que la méthodologie mise en place est également valable pour des cas extrêmes.

### E.3.3.2 Paramètres des simulations

Les paramètres de l'eau sont calculés selon les recommandations de l'ITTC 1978 [ITTC, 1978] pour de l'eau douce dont la température est de 15 °C. La masse volumique et la viscosité dynamique de l'eau sont donc égales respectivement à 1000 kg.m<sup>-3</sup> et 0.00114 kg.m<sup>-2</sup>.s. Le modèle de turbulence utilisé est le  $k - \omega$  SST.

9. Une autre définition de la cambrure peut être donnée par  $H/\lambda$ . Les données expérimentales sont, quant à elles, fournies en fonction de  $A_k$  (cf. équation E.3.5).

Le maillage de la couche limite est calculé de sorte à avoir un  $y^+$  égal à 80 (évaluation basée sur le nombre de Froude). Le pas de temps est évalué par l'équation (E.3.13) et rappelé au tableau E.3.5.

$$\Delta t = \min\left(\frac{1}{200} \frac{L_{pp}}{U}, \frac{T_e}{80}\right) \quad (\text{E.3.13})$$

La tolérance du solveur de l'équation de pression est fixée à 3 ordres. Le nombre maximum d'itérations de couplage (et donc du solveur fluide) est fixé à 20. La convergence est atteinte avant ces 15 itérations si les résidus du solveur fluide ont diminué de 3 ordres et la différence entre les accélérations successives des degrés de liberté est inférieure à  $0.001 \text{ m.s}^{-2}$ . Le nombre moyen d'itérations par pas de temps est donné au tableau E.3.5 En moyenne, 13 itérations par pas de temps sont nécessaires pour atteindre ce critère de convergence.

Le domaine de simulation est présenté à la figure E.3.9. Du fait du plan de symétrie, seule la moitié tribord du navire est modélisée. La limite verticale inférieure du domaine de simulation est de taille identique à celle du bassin où ont eu lieu les essais expérimentaux. Dans une zone proche de la surface libre, un raffinement particulier est appliqué. La hauteur de cette zone est notée  $L_F$  (cf. équation E.3.14). Les tailles maximales des mailles présentes dans cette zone sont notées  $d_x$ ,  $d_y$  et  $d_z$  et calculées par l'équation (E.3.14). Une zone d'amortissement est également rajoutée pour éviter les phénomènes de réflexion numérique. Elle consiste à diffuser numériquement la solution en étirant les cellules du maillage. Dans cette zone, le ratio entre deux cellules successives est calculé de telle sorte que la dernière cellule possède une taille longitudinale égale à un tiers de la longueur d'onde de la houle.

$$L_F = 1.2 \cdot H \quad d_x = \frac{\lambda}{80} \quad d_y = 8 \cdot d_x \quad d_z = \frac{H}{12} \quad (\text{E.3.14})$$

Le mouvement du navire est pris en compte par une déformation du maillage pour les mouvements de pinnement et de tangage. Le mouvement d'avance (mouvement imposé) est, quant à lui, pris en compte par un mouvement en bloc du maillage. Les différents paramètres de la simulation ont été choisis de telle sorte que les temps de simulation soient optimisés pour pouvoir étudier un nombre important de simulations dans des délais raisonnables. Ces paramètres permettent donc de vérifier l'ordre de grandeur des résultats globaux (mouvements, efforts) et non pas une étude locale d'un phénomène particulier (pic de pression, décollement, etc.). Les nombres de cellules résultant de ces différents paramètres sont présentés au tableau E.3.5 (pour un demi-navire). Quelques visualisations d'un maillage caractéristique sont également proposées en annexe (cf. annexe G.6.2.1 p. 381).

L'algorithme de couplage employé utilise une relaxation de la cinématique (cf. section D.5.6.4 p. 168) avec une évaluation dynamique de la masse ajoutée réalisée tous les 15 pas de temps (cf. section B.2.7 p. 70).

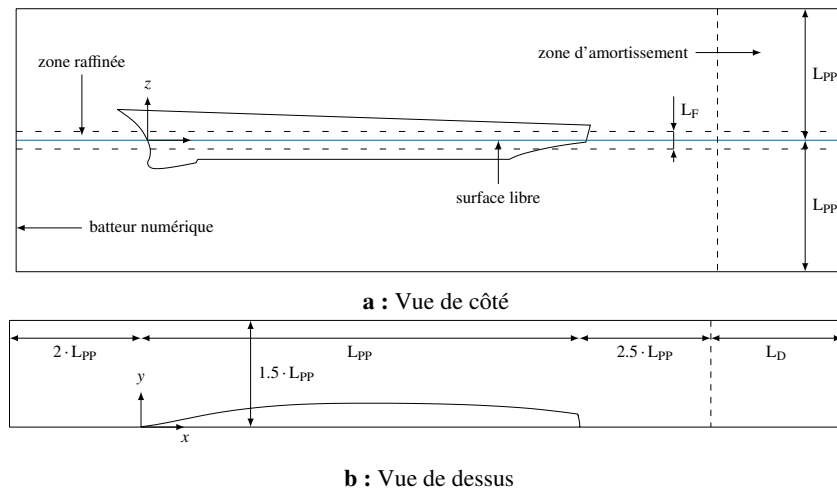


Figure E.3.9 : DTMB 5512 – Domaine de simulation

Fr [-]	$A_k$ [-]	$H/\lambda$ [%]	$A$ [mm]	$\lambda/L_{PP}$ [-]	$f_w$ [s <sup>-1</sup> ]	$f_b$ [s <sup>-1</sup> ]	$f_e$ [s <sup>-1</sup> ]	$T_e$ [s]	exp. ?
0.28	0.025	0.8	6.1	0.4990	1.0132	1.0067	2.0198	0.4951	oui
0.28	0.025	0.8	8.6	0.7075	0.8509	0.7100	1.5609	0.6407	oui
0.28	0.025	0.8	10.3	0.8486	0.7769	0.5919	1.3689	0.7305	oui
0.28	0.025	0.8	12.1	0.9977	0.7165	0.5035	1.2200	0.8197	oui
0.28	0.025	0.8	13.8	1.1404	0.6702	0.4405	1.1107	0.9003	oui
0.28	0.025	0.8	18.2	1.5011	0.5842	0.3346	0.9188	1.0884	oui
0.28	0.025	0.8	33.0	2.7207	0.4339	0.1846	0.6185	1.6167	oui
0.28	0.050	1.6	12.1	0.4990	1.0132	1.0067	2.0198	0.4951	oui
0.28	0.050	1.6	17.2	0.7075	0.8509	0.7100	1.5609	0.6407	oui
0.28	0.050	1.6	20.6	0.8486	0.7769	0.5919	1.3689	0.7305	oui
0.28	0.050	1.6	24.2	0.9977	0.7165	0.5035	1.2200	0.8197	oui
0.28	0.050	1.6	27.7	1.1404	0.6702	0.4405	1.1107	0.9003	oui
0.28	0.050	1.6	31.4	1.2929	0.6294	0.3885	1.0180	0.9824	oui
0.28	0.050	1.6	36.4	1.5011	0.5842	0.3346	0.9188	1.0884	oui
0.28	0.050	1.6	66.0	2.7207	0.4339	0.1846	0.6185	1.6167	non
0.28	0.075	2.4	18.2	0.4990	1.0132	1.0067	2.0198	0.4951	oui
0.28	0.075	2.4	25.7	0.7075	0.8509	0.7100	1.5609	0.6407	oui
0.28	0.075	2.4	30.9	0.8486	0.7769	0.5919	1.3689	0.7305	oui
0.28	0.075	2.4	36.3	0.9977	0.7165	0.5035	1.2200	0.8197	oui
0.28	0.075	2.4	41.5	1.1404	0.6702	0.4405	1.1107	0.9003	non
0.28	0.075	2.4	54.6	1.5011	0.5842	0.3346	0.9188	1.0884	non
0.41	0.025	0.8	8.0	0.6590	0.8816	1.1162	1.9978	0.5005	oui
0.41	0.025	0.8	9.5	0.7853	0.8076	0.9366	1.7443	0.5733	oui
0.41	0.025	0.8	12.0	0.9900	0.7193	0.7430	1.4623	0.6839	oui
0.41	0.025	0.8	13.9	1.1479	0.6680	0.6408	1.3088	0.7641	oui
0.41	0.025	0.8	16.6	1.3718	0.6111	0.5362	1.1473	0.8716	oui
0.41	0.025	0.8	18.1	1.4925	0.5858	0.4928	1.0787	0.9271	oui
0.41	0.025	0.8	27.4	2.2574	0.4764	0.3258	0.8022	1.2466	oui
0.41	0.050	1.6	16.0	0.6590	0.8816	1.1162	1.9978	0.5005	oui
0.41	0.050	1.6	19.0	0.7853	0.8076	0.9366	1.7443	0.5733	oui
0.41	0.050	1.6	24.0	0.9900	0.7193	0.7430	1.4623	0.6839	oui
0.41	0.050	1.6	27.8	1.1479	0.6680	0.6408	1.3088	0.7641	oui
0.41	0.050	1.6	33.3	1.3718	0.6111	0.5362	1.1473	0.8716	non
0.41	0.050	1.6	36.2	1.4925	0.5858	0.4928	1.0787	0.9271	non
0.41	0.050	1.6	54.8	2.2574	0.4764	0.3258	0.8022	1.2466	non
0.41	0.075	2.4	24.0	0.6590	0.8816	1.1162	1.9978	0.5005	oui
0.41	0.075	2.4	28.6	0.7853	0.8076	0.9366	1.7443	0.5733	oui
0.41	0.075	2.4	36.0	0.9900	0.7193	0.7430	1.4623	0.6839	non
0.41	0.075	2.4	41.8	1.1479	0.6680	0.6408	1.3088	0.7641	non
0.41	0.075	2.4	54.3	1.4925	0.5858	0.4928	1.0787	0.9271	non
0.41	0.075	2.4	82.1	2.2574	0.4764	0.3258	0.8022	1.2466	non

Tableau E.3.4 : DTMB 5512 – Liste des simulations

Fr [-]	$A_k$ [-]	$\lambda/L_{PP}$ [-]	$f_e$ [s <sup>-1</sup> ]	$\Delta t$ [s]	Cellules [-]	Itér./ $\Delta t$ [-]
0.28	0.025	0.4990	2.0198	0.0062	4.0	12.0
0.28	0.025	0.7075	1.5609	0.0080	3.7	12.1
0.28	0.025	0.8486	1.3689	0.0091	2.0	12.0
0.28	0.025	0.9977	1.2200	0.0100	2.2	12.1
0.28	0.025	1.1404	1.1107	0.0100	2.3	13.3
0.28	0.025	1.5011	0.9188	0.0100	2.2	14.1
0.28	0.025	2.7207	0.6185	0.0100	1.7	12.0
0.28	0.050	0.4990	2.0198	0.0062	3.2	12.0
0.28	0.050	0.7075	1.5609	0.0080	2.9	12.4
0.28	0.050	0.8486	1.3689	0.0091	1.7	12.0
0.28	0.050	0.9977	1.2200	0.0100	1.8	13.1
0.28	0.050	1.1404	1.1107	0.0100	1.8	13.9
0.28	0.050	1.2929	1.0180	0.0100	1.8	13.9
0.28	0.050	1.5011	0.9188	0.0100	1.7	14.5
0.28	0.050	2.7207	0.6185	0.0100	1.4	12.1
0.28	0.075	0.4990	2.0198	0.0062	3.7	12.5
0.28	0.075	0.7075	1.5609	0.0080	2.2	12.0
0.28	0.075	0.8486	1.3689	0.0091	1.8	13.8
0.28	0.075	0.9977	1.2200	0.0100	1.9	14.8
0.28	0.075	1.1404	1.1107	0.0100	1.4	13.6
0.28	0.075	1.5011	0.9188	0.0100	1.4	14.0
0.41	0.025	0.6590	1.9978	0.0063	3.7	12.1
0.41	0.025	0.7853	1.7443	0.0068	3.4	12.5
0.41	0.025	0.9900	1.4623	0.0068	2.2	12.0
0.41	0.025	1.1479	1.3088	0.0068	2.3	12.2
0.41	0.025	1.3718	1.1473	0.0068	2.4	13.0
0.41	0.025	1.4925	1.0787	0.0068	2.4	13.6
0.41	0.025	2.2574	0.8022	0.0068	1.6	12.0
0.41	0.050	0.6590	1.9978	0.0063	2.9	12.1
0.41	0.050	0.7853	1.7443	0.0068	2.5	12.6
0.41	0.050	0.9900	1.4623	0.0068	1.8	12.2
0.41	0.050	1.1479	1.3088	0.0068	1.8	12.9
0.41	0.050	1.3718	1.1473	0.0068	1.9	14.3
0.41	0.050	1.4925	1.0787	0.0068	1.9	14.5
0.41	0.050	2.2574	0.8022	0.0068	1.4	12.1
0.41	0.075	0.6590	1.9978	0.0063	2.2	12.0
0.41	0.075	0.7853	1.7443	0.0068	1.8	12.3
0.41	0.075	0.9900	1.4623	0.0068	1.9	14.1
0.41	0.075	1.1479	1.3088	0.0068	1.4	12.9
0.41	0.075	1.4925	1.0787	0.0068	1.6	13.6
0.41	0.075	2.2574	0.8022	0.0068	1.2	12.4

**Tableau E.3.5 :** DTMB 5512 – Pas de temps – Nombres de cellules (en million) – Nombres moyen d'itérations par pas de temps

### E.3.3.3 Modèle fixe

Des simulations en modèle fixe sont réalisées afin d'estimer la part de la résistance ajoutée due aux phénomènes de diffraction. En outre, les résultats sont comparés à des essais expérimentaux [Gui *et al.*, 2001], [Gui *et al.*, 2002].

Lors des simulations numériques et des essais expérimentaux, la position du navire est fixée égale à la position d'équilibre dynamique en eau calme. Comme il a déjà été énoncé dans les différentes sections précédentes, cette position d'équilibre diffère légèrement entre les simulations et les essais expérimentaux. Le tableau E.3.6 résume les différentes données utilisées dans chacune des configurations. Le point d'expression du moment est également légèrement différent. Au cours des essais, il est positionné à la demi  $L_{PP}$  du navire et  $z = 0.032$  m [Carrica *et al.*, 2006]. Lors des simulations, il est positionné au centre de gravité du navire pour la configuration avec houle de face en modèle libre, c.-à-d. à  $x_G/L_{PP} = 0.5043$  et  $z_G = 0.029$  m. Les composantes hydrostatiques des efforts de pilonnement et de tangage obtenues sans houle ni vitesse d'avance sont retranchées [Carrica *et al.*, 2006] afin de faciliter la comparaison. Du point de vue expérimental, cela consiste à retrancher les valeurs mesurées avant le lancement des essais. En ce qui concerne l'effort de résistance, aucun retranchement n'est réalisé. Ainsi, les valeurs de retranchement sont fixées de la façon suivante :

$$f_{z0}^* = f_z^h \quad m_{y0}^* = m_y^h \quad (E.3.15)$$

Cas	Fr [-]	$x_3/L_{PP}$ [-]	$x_5$ [°]	$f_{x0}^*$ [N]	$f_z^h$ [N]	$m_y^h$ [N.m <sup>-1</sup> ]
Maillage 2	0.28	-2.372	-0.174	8.11	896	4.12
Exp. (5512) (modèle fixe)	0.28	-1.912	-0.135	7.10	894	-
Exp. (5512) (eau calme)	0.28	-1.912	-0.135	7.58	-	-
Maillage 2	0.41	-5.709	0.302	25.28	987	-53.6
Exp. (5512) (modèle fixe)	0.41	-4.725	0.358	24.94	983	-
Exp. (5512) (eau calme)	0.41	-4.725	0.358	23.80	-	-

**Tableau E.3.6 :** DTMB 5512 – Modèle fixe – Liste des configurations

Les efforts sont adimensionnalisés de manière identique aux essais expérimentaux (cf. équation E.3.16) [Gui *et al.*, 2002]. Cependant, la valeur de l'effort de résistance en eau calme référencée dans ces résultats expérimentaux est différente de celle mesurée dans d'autres essais de même nature (cf. tableau E.3.6). Aucune réponse précise à cette question n'a pu être apportée par la lecture d'autres publications. La valeur moyenne et le premier harmonique des différents efforts sont donnés aux tableaux E.3.8 et E.3.9 et présentés graphiquement aux figures E.3.10 et E.3.11. Les coefficients de résistance en eau calme obtenus par les simulations présentées à la section E.3.2 p. 215 sont rappelés au tableau E.3.7. L'analyse de la résistance ajoutée sera effectuée dans un second temps (cf. section E.3.3.5 p. 235).

$$C_{Ti} = \frac{f_{xi}}{0.5 \cdot \rho \cdot S_W \cdot U^2} \quad C_{Hi} = \frac{f_{zi}}{0.5 \cdot \rho \cdot S_W \cdot U^2} \quad C_{Mi} = \frac{m_{yi}}{0.5 \cdot \rho \cdot S_W \cdot U^2 \cdot L_{PP}} \quad (E.3.16)$$

Fr [-]	$f_{x0}^*$ [N]	$C_T \times 1000$ [-]
0.28	8.11	5.05
0.41	25.28	7.34

**Tableau E.3.7 :** DTMB 5512 – Modèle fixe – Rappel des coefficients de résistance en eau calme

Des offsets plus ou moins importants entre les résultats expérimentaux et ceux provenant des simulations effectuées sont obtenus. Notamment, des écarts de l'ordre de +10% ( $Fr = 0.28$ ) et de  $\pm 5\%$  ( $Fr = 0.41$ ) sont observés pour la valeur moyenne de l'effort de résistance. Le premier harmonique correspondant est également sur-estimé de l'ordre de +20% aux deux vitesses considérées. La valeur de l'effort de pilonnement est, quant à elle, généralement sous-estimée de l'ordre de 5%. Des écarts de l'ordre de  $\pm 15\%$  ( $Fr = 0.28$ ) et +15%

( $Fr = 0.41$ ) sont obtenus pour le premier harmonique de cet effort de pilonnement. La valeur moyenne du moment de tangage étant quasi-nulle, l'analyse des écarts ne peut être réalisée. Le premier harmonique est, quant à lui, surestimé de l'ordre de 20% aux deux vitesses considérées.

De manière identique aux simulations de résistance à l'avancement sans vitesse d'avance, il est tout à fait possible que la différence de position puisse expliquer une partie des écarts observés. En effet, ces écarts ne dépendent pas de l'amplitude de la houle ou de sa longueur d'onde. De plus, comme il a déjà été énoncé précédemment, l'objectif de ces travaux est d'évaluer la fonction de transfert en tangage et en pilonnement pour deux nombres de Froude et trois amplitudes de houle, ce qui implique un nombre important de simulations (cf. tableau E.3.6 page suivante). Les maillages utilisés sont donc légèrement déraffinés par rapport aux recommandations habituelles. Ceci peut également expliquer certaines des différences. Par conséquent, il a été choisi de ne pas aller plus loin dans l'analyse de ces différences car le nombre de simulations nécessaires pour réaliser une étude rigoureuse en maillage et/ou en pas de temps est trop important lorsque l'on considère deux nombres de Froude et trois amplitudes de houle. Cependant, il est important de rappeler que de meilleurs résultats ont déjà été obtenus pour quelques configurations [Carrica *et al.*, 2006], [Carrica *et al.*, 2010].

Cas	$\lambda/LPP$ [-]	$A_k$ [-]	$C_{T0}$ [-]	$C_{T1}$ [-]	$C_{H0}$ [-]	$C_{H1}$ [-]	$C_{M0}$ [-]	$C_{M1}$ [-]
Simulation	1.0	0.025	0.00505	0.00349	-0.0305	0.0069	-0.0009	0.0067
Exp. (5512)	1.0	0.025	0.00450	0.00289	-0.0314	0.0069	-0.0009	0.0060
Différence [%]	1.0	0.025	12.2	20.8	-2.9	0.0	-0.0	11.7
Simulation	1.0	0.050	0.00542	0.00699	-0.0305	0.0137	-0.0007	0.0135
Exp. (5512)	1.0	0.050	0.00482	0.00584	-0.0313	0.0142	-0.0007	0.0121
Différence [%]	1.0	0.050	12.4	19.7	-2.6	-3.5	-0.0	11.6
Simulation	1.0	0.075	0.00606	0.01006	-0.0303	0.0198	-0.0003	0.0193
Exp. (5512)	1.0	0.075	0.00538	0.00883	-0.0318	0.0217	-0.0004	0.0181
Différence [%]	1.0	0.075	12.6	13.9	-4.7	-8.8	-25.0	6.6
Simulation	1.5	0.025	0.00520	0.00700	-0.0302	0.0382	-0.0008	0.0128
Exp. (5512)	1.5	0.025	0.00462	0.00607	-0.0340	0.0356	-0.0006	0.0108
Différence [%]	1.5	0.025	12.6	15.3	-11.2	7.3	33.3	18.5
Simulation	1.5	0.050	0.00596	0.01410	-0.0297	0.0765	-0.0004	0.0257
Exp. (5512)	1.5	0.050	0.00531	0.01194	-0.0306	0.0722	-0.0005	0.0217
Différence [%]	1.5	0.050	12.2	18.1	-2.9	6.0	-20.0	18.4
Simulation	1.5	0.075	0.00716	0.02174	-0.0284	0.1185	0.0002	0.0395
Exp. (5512)	1.5	0.075	0.00643	0.01827	-0.0287	0.1095	-0.0002	0.0328
Différence [%]	1.5	0.075	11.4	19.0	-1.0	8.2	-200.0	20.4

Tableau E.3.8 : DTMB 5512 – Modèle fixe – Résultats et comparaison – Fr = 0.28

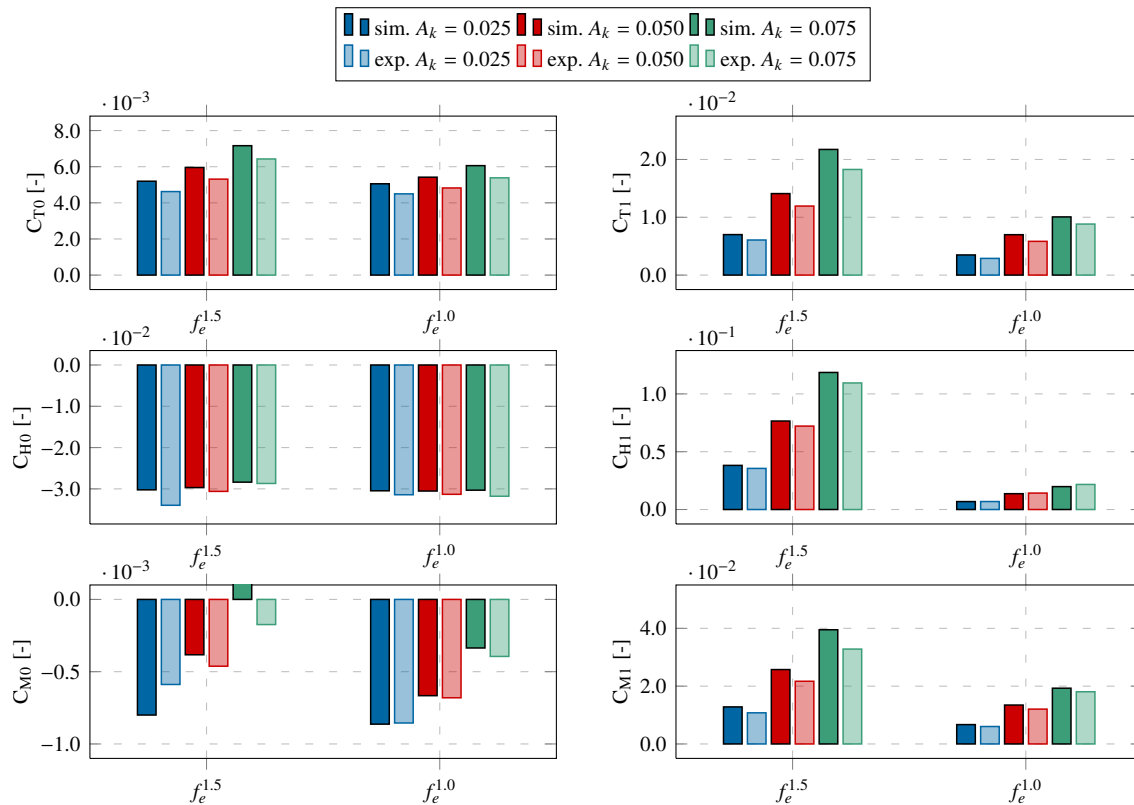
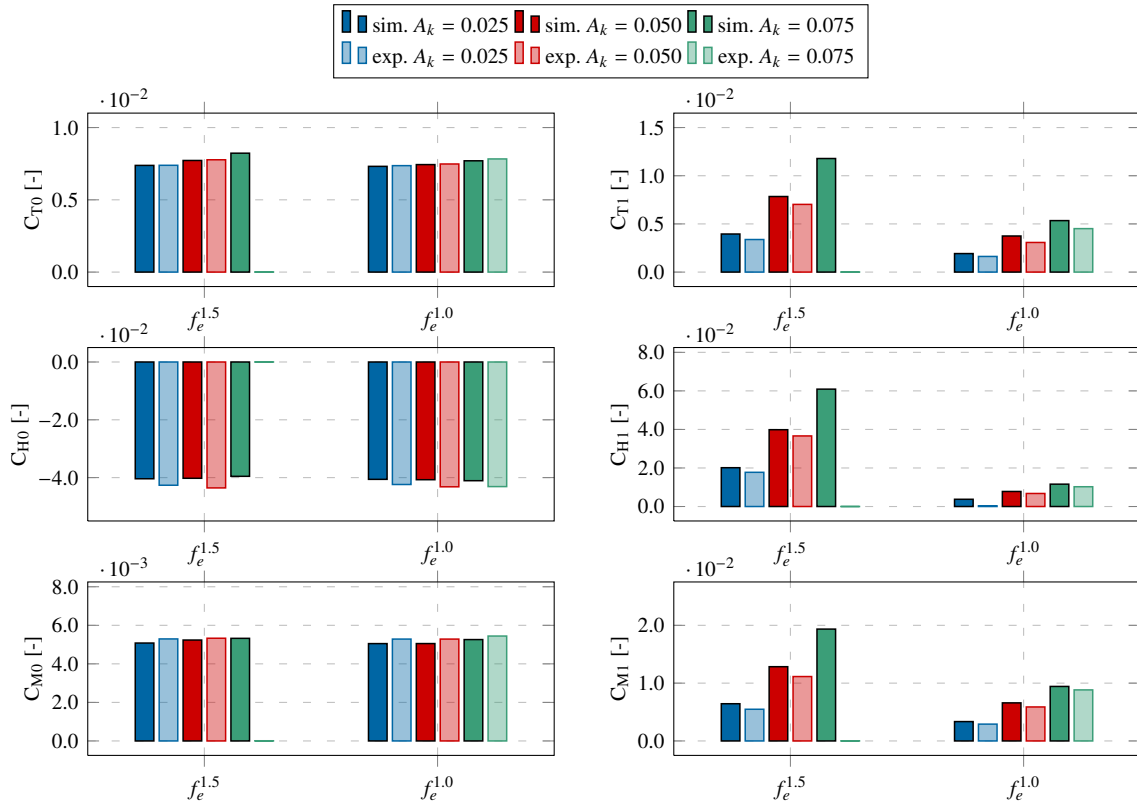


Figure E.3.10 : DTMB 5512 – Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts – Fr = 0.28

Cas	$\lambda/LPP$ [-]	$A_k$ [-]	$C_{T0}$ [-]	$C_{T1}$ [-]	$C_{H0}$ [-]	$C_{H1}$ [-]	$C_{M0}$ [-]	$C_{M1}$ [-]
Simulation	1.0	0.025	0.00732	0.00192	-0.0406	0.0038	0.0051	0.0033
Exp. (5512)	1.0	0.025	0.00737	0.00162	-0.0424	0.0003	0.0053	0.0029
Différence [%]	1.0	0.025	-0.7	18.5	-4.2	1166.7	-3.8	13.8
Simulation	1.0	0.050	0.00744	0.00375	-0.0407	0.0078	0.0051	0.0066
Exp. (5512)	1.0	0.050	0.00748	0.00308	-0.0432	0.0068	0.0053	0.0059
Différence [%]	1.0	0.050	-0.5	21.8	-5.8	14.7	-3.8	11.9
Simulation	1.0	0.075	0.00770	0.00534	-0.0411	0.0116	0.0053	0.0094
Exp. (5512)	1.0	0.075	0.00783	0.00451	-0.0431	0.0103	0.0054	0.0088
Différence [%]	1.0	0.075	-1.7	18.4	-4.6	12.6	-1.9	6.8
Simulation	1.5	0.025	0.00738	0.00395	-0.0404	0.0201	0.0051	0.0064
Exp. (5512)	1.5	0.025	0.00739	0.00338	-0.0426	0.0177	0.0053	0.0055
Différence [%]	1.5	0.025	-0.1	16.9	-5.2	13.6	-3.8	16.4
Simulation	1.5	0.050	0.00772	0.00784	-0.0402	0.0399	0.0052	0.0128
Exp. (5512)	1.5	0.050	0.00777	0.00703	-0.0436	0.0366	0.0053	0.0111
Différence [%]	1.5	0.050	-0.6	11.5	-7.8	9.0	-1.9	15.3
Simulation	1.5	0.075	0.00823	0.01179	-0.0396	0.0609	0.0053	0.0193
Exp. (5512)	1.5	0.075	-	-	-	-	-	-
Différence [%]	1.5	0.075	-	-	-	-	-	-

Tableau E.3.9 : DTMB 5512 – Modèle fixe – Résultats et comparaison –  $Fr = 0.41$ Figure E.3.11 : DTMB 5512 – Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts –  $Fr = 0.41$



### E.3.3.4 Modèle libre

Dans cette section, la réponse cinématique du navire est analysée et comparée aux résultats expérimentaux. Pour cela, plusieurs graphiques sont proposés (cf. figures E.3.12 page suivante à E.3.22 p. 234). Le premier présente l'amplitude théorique de la houle ainsi que celles mesurées lors des essais et des simulations (cf. figure E.3.12 page suivante). Les deux suivants résument les fonctions de transfert des mouvements de pilonnement et de tangage pour les deux nombres de Froude considérés (cf. figures E.3.13 p. 230 et E.3.14 p. 230). S'en suit la valeur moyenne (cf. figure E.3.15 p. 231), l'amplitude du premier harmonique (cf. figure E.3.17 p. 232), la phase du premier harmonique (cf. figure E.3.19 p. 233) et l'amplitude du second harmonique (cf. figure E.3.21 p. 234) des mouvements de pilonnement et de tangage.

Un offset négatif est souvent présent entre l'amplitude de vague théorique et celle mesurée au niveau du centre de gravité du navire (cf. figure E.3.12 page suivante). Ceci est due à la diffusion numérique couramment observée sur ce type de simulation, lorsque les paramètres numériques (finesse de maillage, pas de temps, etc.) sont aux limites des recommandations habituelles, comme c'est le cas ici. Un maillage plus fin de la surface libre<sup>10</sup> et un pas de temps plus faible devraient corriger cet offset. Cependant, l'absence d'effet non-linéaire sur la cinématique du navire vis-à-vis des amplitudes de vague considérées [Irvine *et al.*, 2008] (cf. figures E.3.13 et E.3.14 p. 230) rend possible l'analyse des résultats par des fonctions de transfert. C'est la raison pour laquelle, les résultats sont adimensionnalisés selon l'amplitude de vague mesurée, et ceci, tant pour les résultats expérimentaux que pour les résultats numériques.

Les autres figures (cf. figures E.3.13 à E.3.21 p. 234) mettent en avant une très bonne estimation de l'amplitude du premier harmonique de chaque mouvement. Les tendances des deuxièmes harmoniques sont également satisfaisantes du fait de leur faible valeur par rapport aux premiers harmoniques. La phase des premiers harmoniques est également bien retrouvée. Il est important de remarquer que pour évaluer cette dernière quantité, il est nécessaire de se baser sur la houle simulée et non pas la houle théorique car un faible déphasage peut avoir lieu du fait de la propagation numérique de la houle. Des offsets plus importants sont observés pour la valeur moyenne des différents mouvements mais c'est une quantité particulièrement difficile à mesurer expérimentalement et à capter numériquement du fait de sa définition.

Aux deux nombres de Froude, les amplitudes du mouvement de tangage sont très proches l'une de l'autre. Les amplitudes maximales du mouvement de pilonnement sont, quant à elles, différentes. En effet, pour un nombre de Froude de 0.28, la fonction de transfert du mouvement ne dépasse pas l'unité. Au contraire, lorsque le nombre de Froude est égal à 0.41, l'amplitude du mouvement de pilonnement peut dépasser l'amplitude de la houle au niveau de la zone de résonance.

Des informations complémentaires sont également proposées en annexe (cf. annexe G.6.2.3 p. 384). Pour chaque simulation, les informations suivantes sont fournies :

- la cinématique du navire en fonction du temps ;
- l'effort de pilonnement en fonction du temps ;
- le moment de tangage en fonction du temps ;
- les différents termes de l'opérateur de relaxation en fonction du temps ;
- les accélérations (relaxées et non-relaxées) en fonction des itérations de couplage à 4 instants ;
- l'élévation de la surface libre à 8 instants (images) ;
- l'effort de résistance en fonction du temps ;
- l'analyse harmonique de l'effort de résistance.

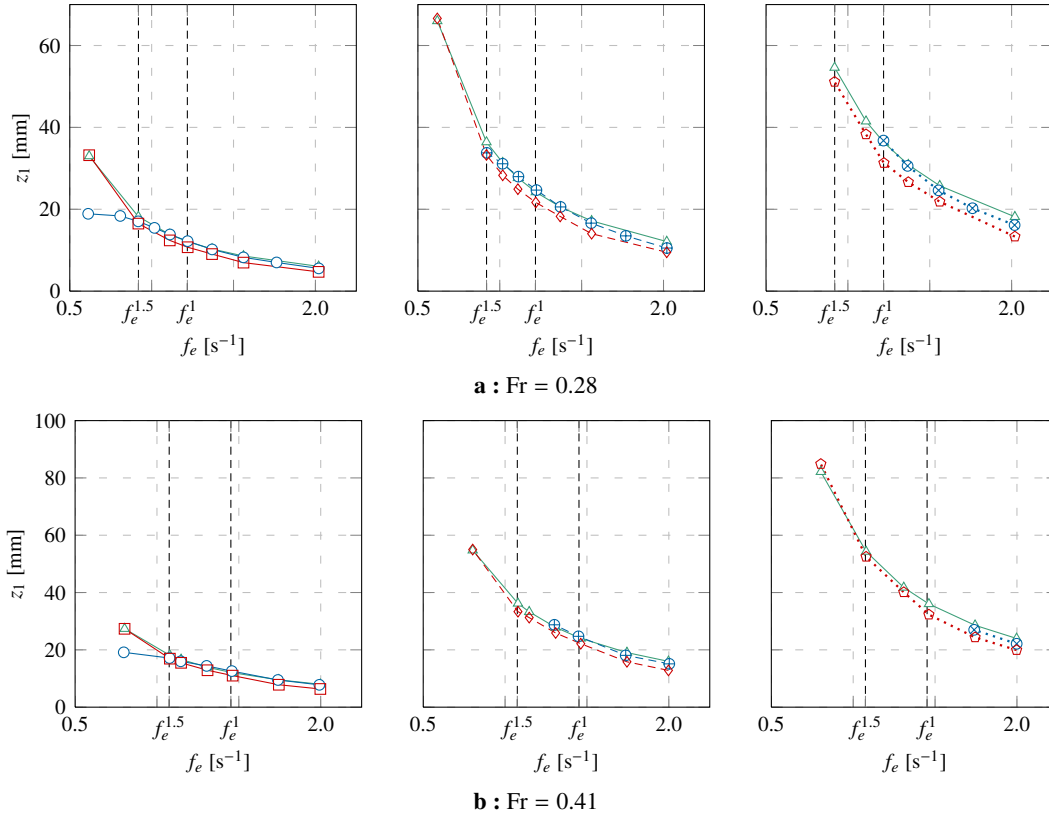
L'analyse des informations précédentes montre qu'il est de nouveau intéressant de prendre en compte l'effet de masse ajoutée au sein de l'algorithme de couplage. Effectivement, les accélérations sont efficacement amorties par l'opérateur de masse ajoutée artificielle et les accélérations relaxées convergent rapidement vers la valeur asymptotique à chaque pas de temps. De surcroît, il est intéressant de remarquer que, lorsque les mouvements du navire sont importants, les termes extra-diagonaux de l'opérateur de relaxation ne sont pas négligeables devant les termes diagonaux. Leurs valeurs sont respectivement de l'ordre de 0.1 à 0.2 (termes extra-diagonaux) et 0.5 à 0.6 (termes diagonaux). L'étude de l'influence des termes extra-diagonaux est réalisée au sein d'une

---

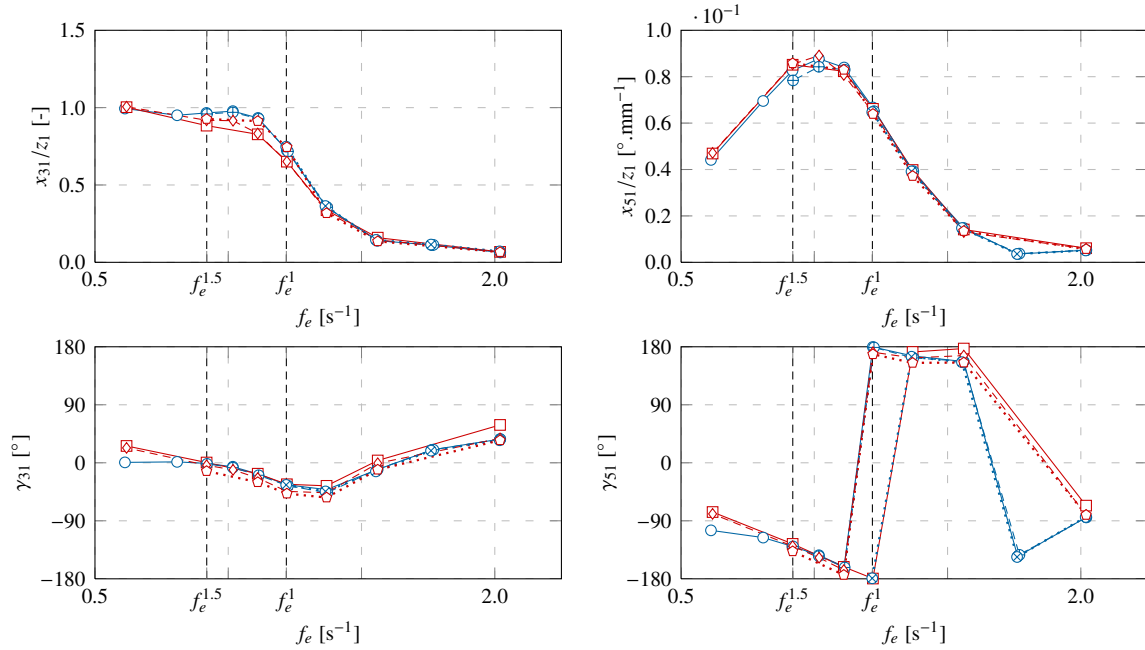
10. L'utilisation du raffinement automatique pourrait être utilisé.

autre étude (cf. section E.4 p. 238). Au sein de cette dernière, il est notamment montré qu'il est préférable de ne pas les négliger.

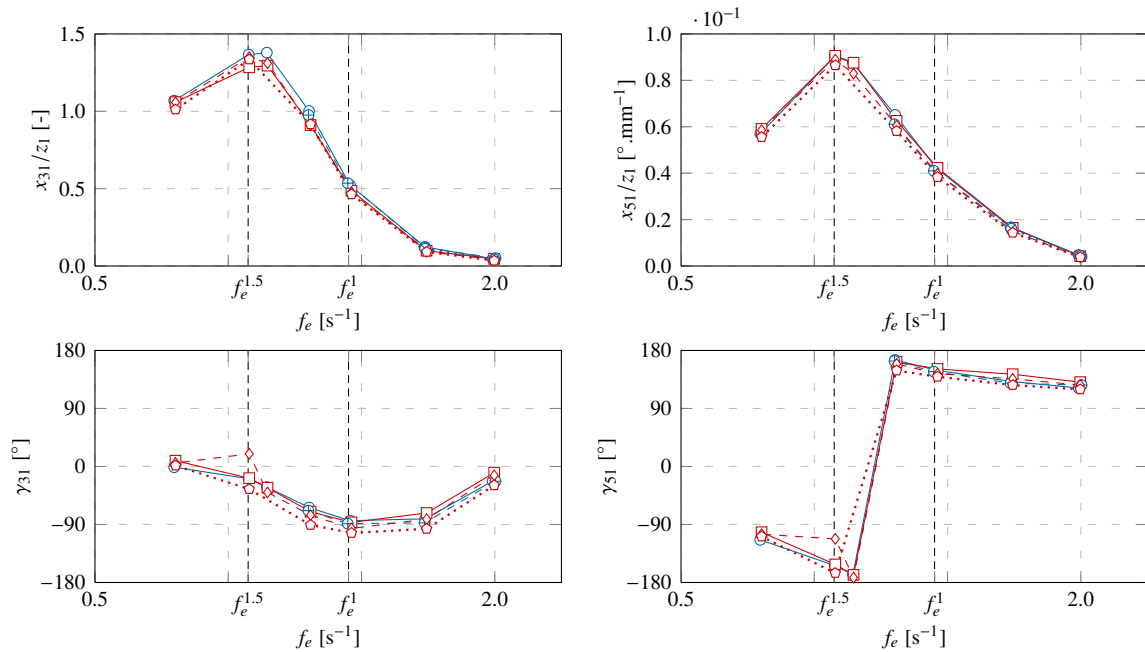
En conclusion de cette section, l'algorithme de couplage utilisé permet d'évaluer correctement la réponse cinématique d'un navire soumis à une houle de face. C'est un résultat important car il est nécessaire de pouvoir estimer précisément la cinématique du navire pour estimer correctement la résistance ajoutée lorsque cette dernière est maximale (effets de radiation prédominants).



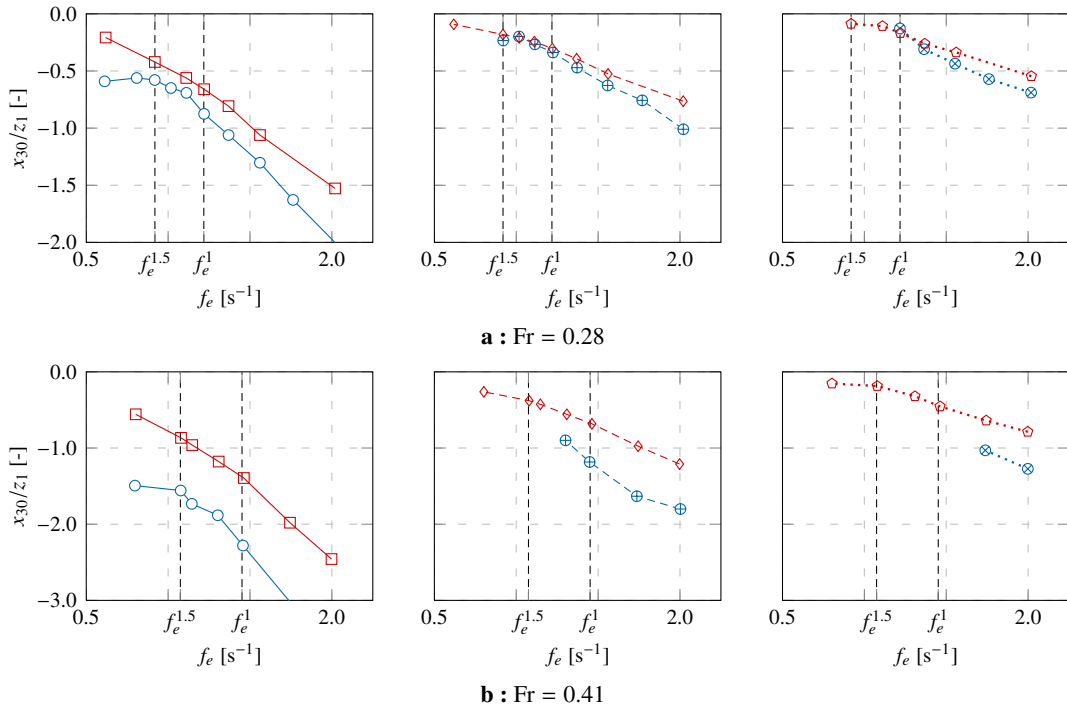
**Figure E.3.12 :** DTMB 5512 – Amplitude de la houle –  $Fr = 0.28$  (haut) et  $Fr = 0.41$  (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\circ$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\square$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\oplus$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\diamond$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\otimes$  simulation  $A_k = 0.075$ ,  $\diamond$  expérience  $A_k = 0.075$  et  $\triangle$  théorique



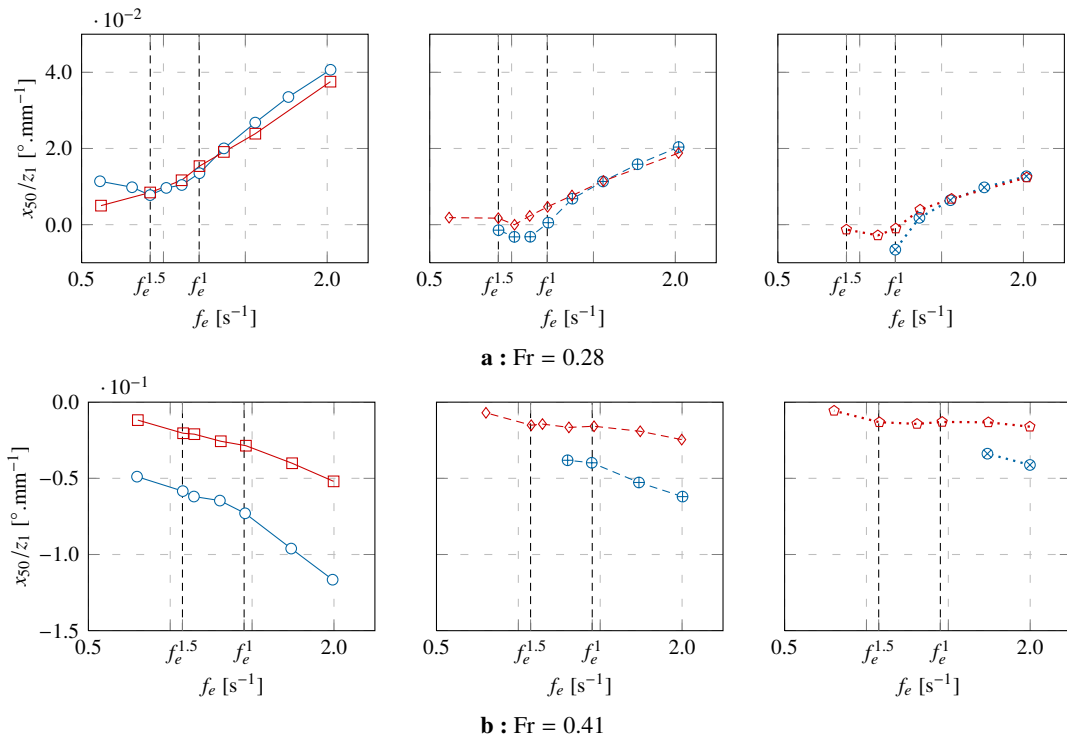
**Figure E.3.13 :** DTMB 5512 – Fonction de transfert des premiers harmoniques – Amplitude (haut) et phase (bas) – Mouvement de pilonnement (gauche) et de tangage (droite) –  $Fr = 0.28$  : —○— simulation  $A_k = 0.025$ , —□— expérience  $A_k = 0.025$ , —⊕— simulation  $A_k = 0.050$ , —◇— expérience  $A_k = 0.050$ , —⊗— simulation  $A_k = 0.075$  et —◇— expérience  $A_k = 0.075$



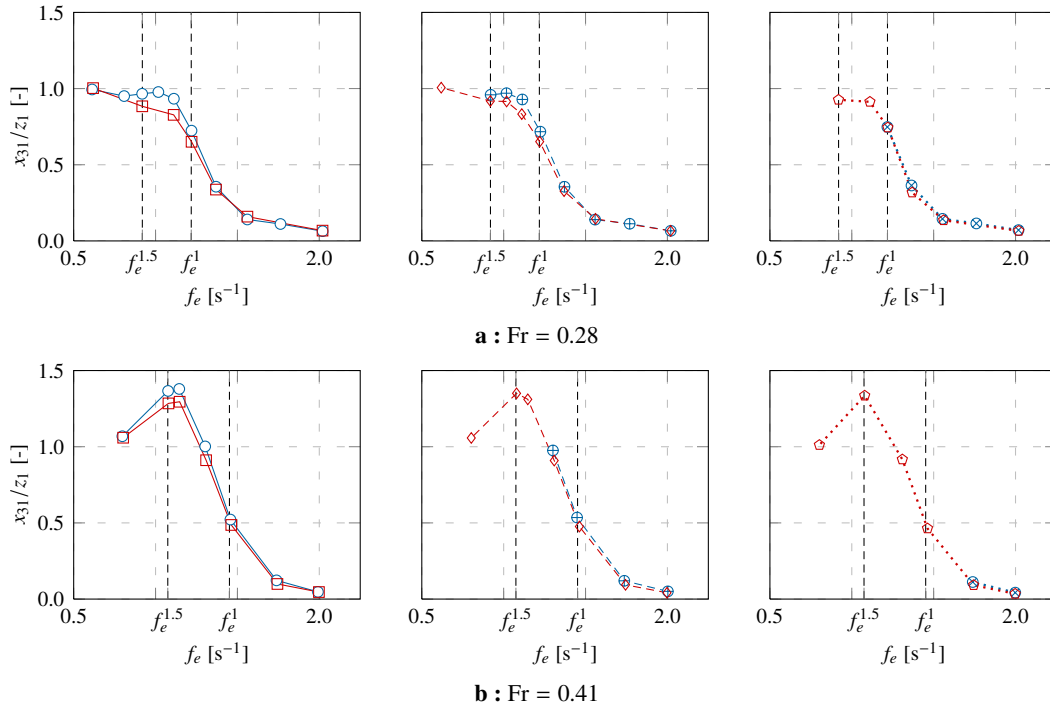
**Figure E.3.14 :** DTMB 5512 – Fonction de transfert des premiers harmoniques – Amplitude (haut) et phase (bas) – Mouvement de pilonnement (gauche) et de tangage (droite) –  $Fr = 0.41$  : —○— simulation  $A_k = 0.025$ , —□— expérience  $A_k = 0.025$ , —⊕— simulation  $A_k = 0.050$ , —◇— expérience  $A_k = 0.050$ , —⊗— simulation  $A_k = 0.075$  et —◇— expérience  $A_k = 0.075$



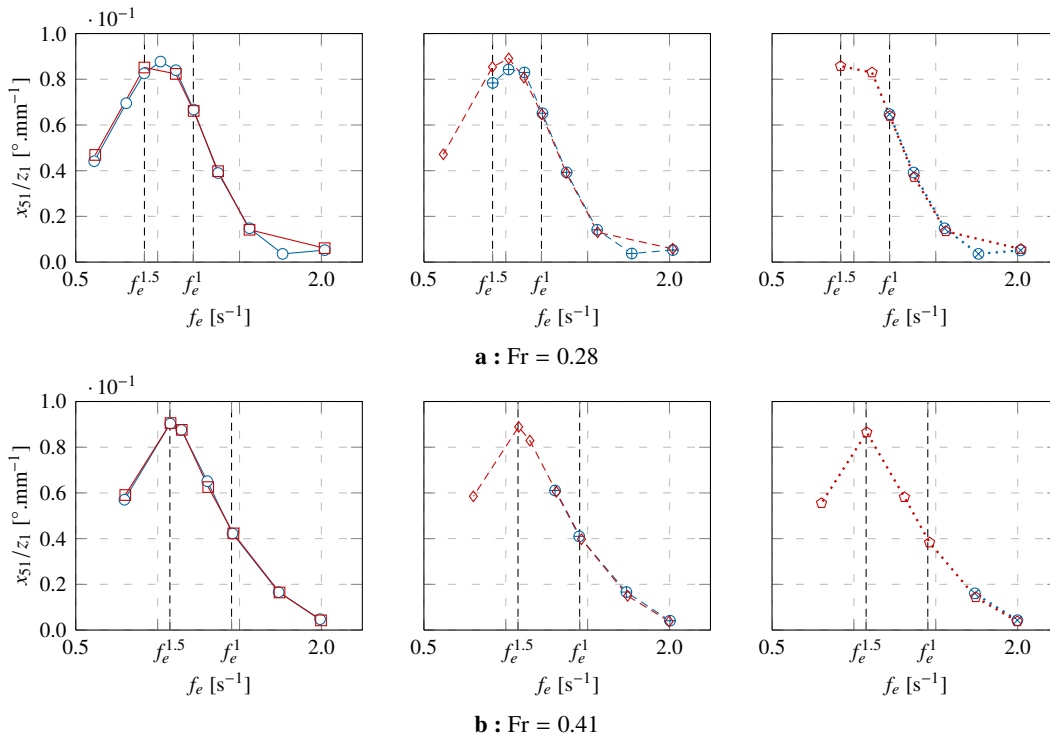
**Figure E.3.15 :** DTMB 5512 – Valeur moyenne du mouvement de pilonnement – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\odot\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$



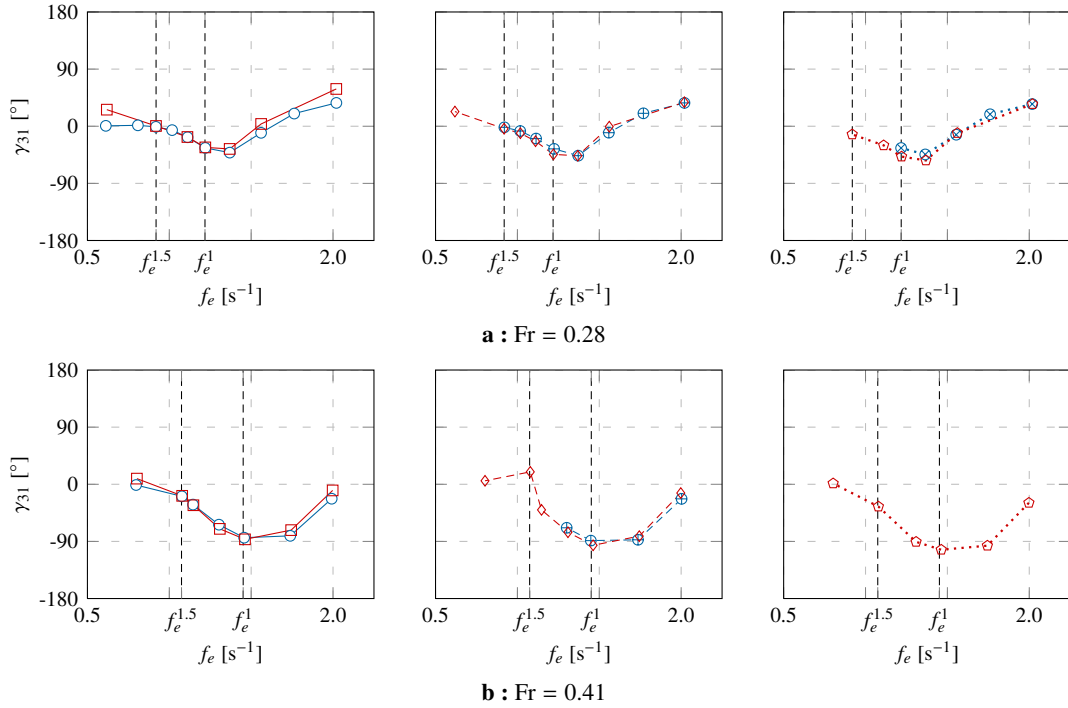
**Figure E.3.16 :** DTMB 5512 – Valeur moyenne du mouvement de tangage – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\odot\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$



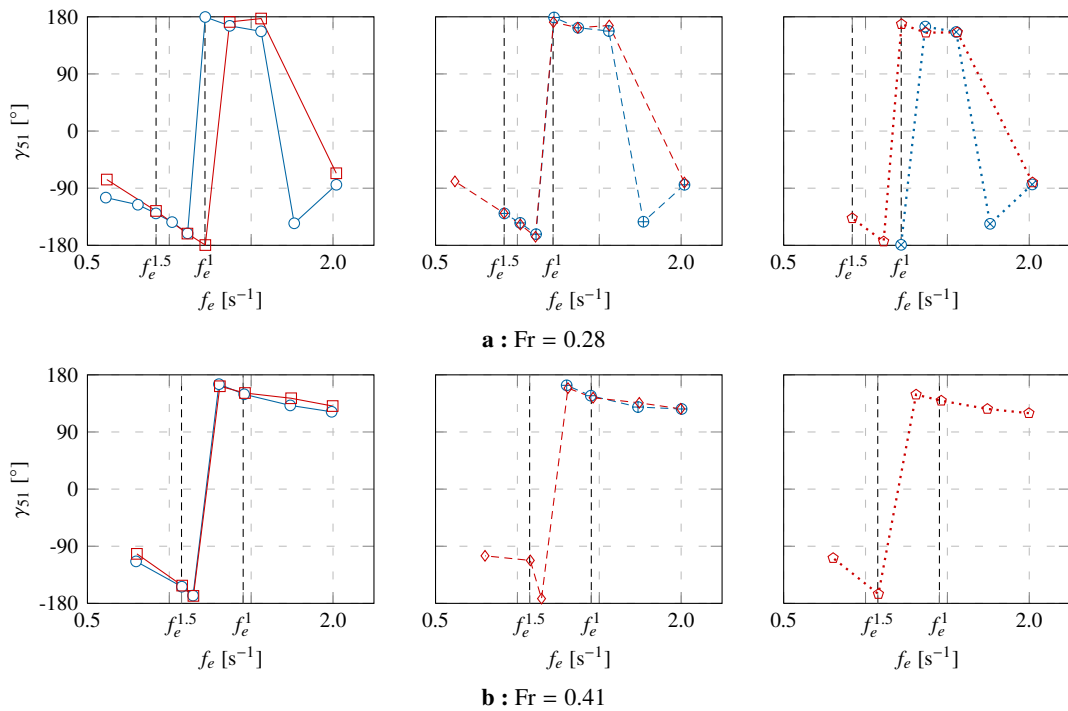
**Figure E.3.17 :** DTMB 5512 – Amplitude du premier harmonique du mouvement de pilonnement – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$



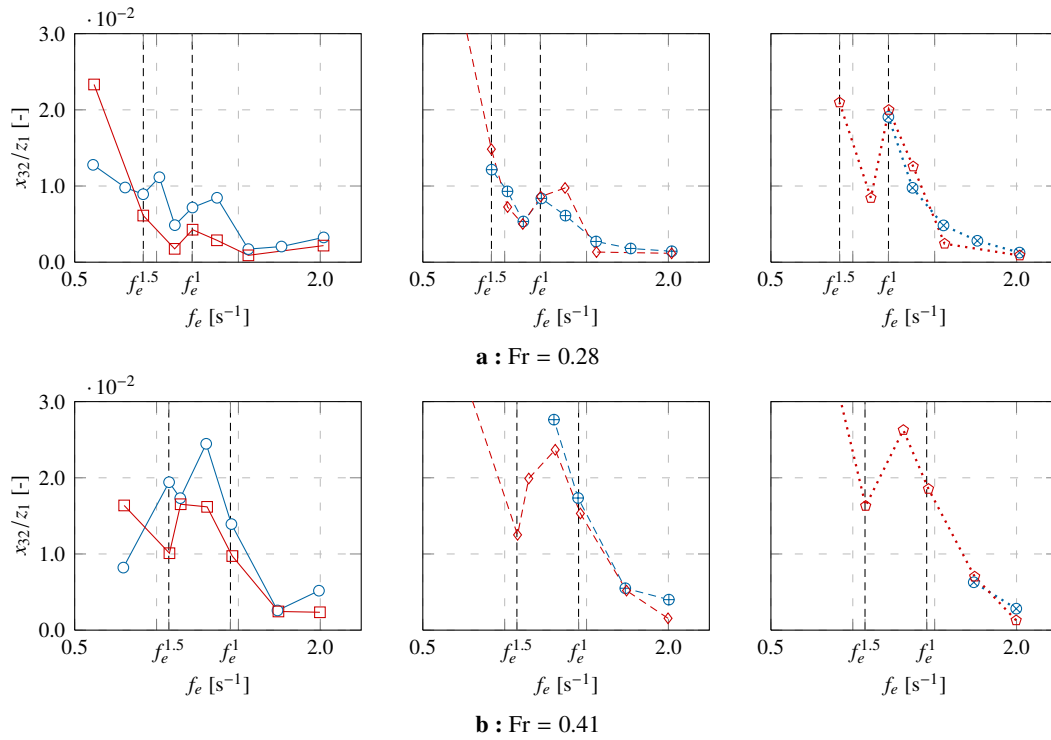
**Figure E.3.18 :** DTMB 5512 – Amplitude du premier harmonique du mouvement de tangage – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$



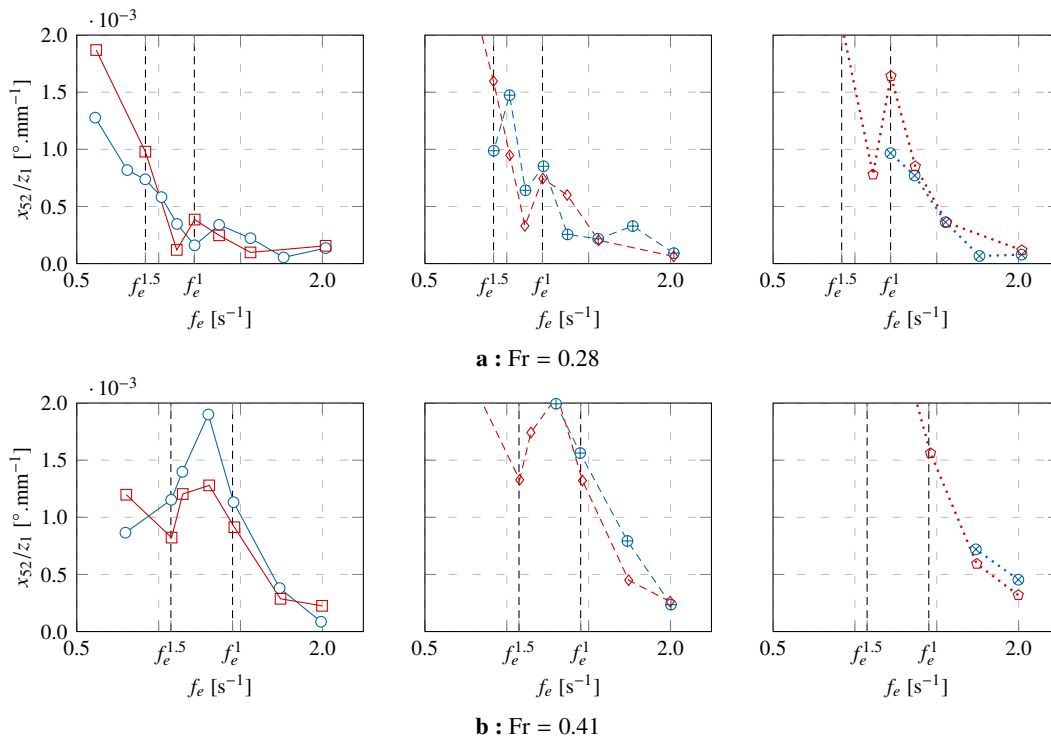
**Figure E.3.19 :** DTMB 5512 – Phase du premier harmonique du mouvement de pilonnement – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) : —○— simulation  $A_k = 0.025$ , —□— expérience  $A_k = 0.025$ , —⊕— simulation  $A_k = 0.050$ , —◇— expérience  $A_k = 0.050$ , —⊗— simulation  $A_k = 0.075$  et —◇— expérience  $A_k = 0.075$



**Figure E.3.20 :** DTMB 5512 – Phase du premier harmonique du mouvement de tangage – Fr = 0.28 (haut) et Fr = 0.41 (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) : —○— simulation  $A_k = 0.025$ , —□— expérience  $A_k = 0.025$ , —⊕— simulation  $A_k = 0.050$ , —◇— expérience  $A_k = 0.050$ , —⊗— simulation  $A_k = 0.075$  et —◇— expérience  $A_k = 0.075$



**Figure E.3.21 :** DTMB 5512 – Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de pilonnement –  $Fr = 0.28$  (haut) et  $Fr = 0.41$  (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$



**Figure E.3.22 :** DTMB 5512 – Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de tangage –  $Fr = 0.28$  (haut) et  $Fr = 0.41$  (bas) –  $A_k = 0.025$  (gauche),  $A_k = 0.050$  (centre) et  $A_k = 0.075$  (droite) :  $\text{---}\circ\text{---}$  simulation  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\square\text{---}$  expérience  $A_k = 0.025$ ,  $\text{---}\oplus\text{---}$  simulation  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.050$ ,  $\text{---}\otimes\text{---}$  simulation  $A_k = 0.075$  et  $\text{---}\diamond\text{---}$  expérience  $A_k = 0.075$

### E.3.3.5 Résistance ajoutée sur houle de face

L'analyse de la résistance ajoutée sur houle de face est présentée dans cette section. Les résultats des simulations sont donnés sous forme de tableau en annexe (cf. annexe G.6.2.2 p. 383) et présentés graphiquement dans cette section.

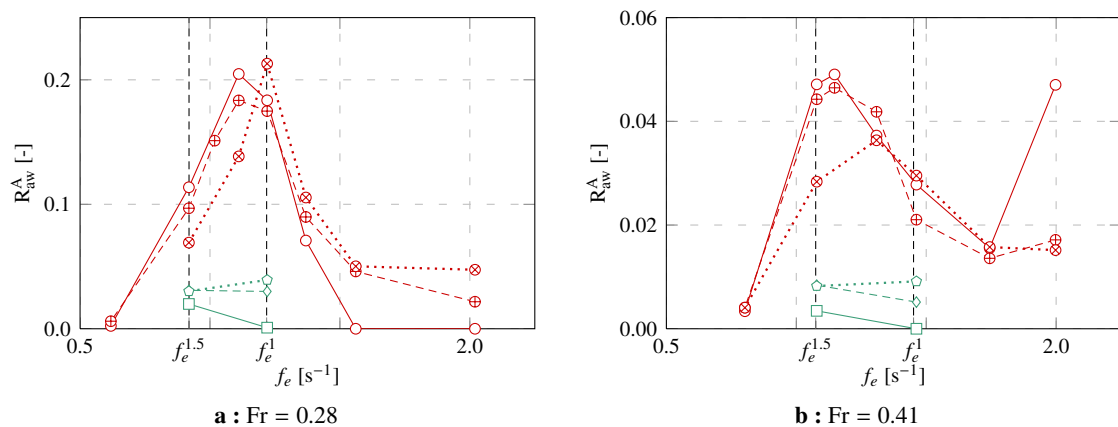
Les deux coefficients de résistance ajoutée sont présentés aux figures E.3.24 et E.3.23. La figure E.3.24 permet d'évaluer rapidement l'augmentation de résistance due à la houle et la figure E.3.23 permet d'analyser le modèle adimensionnel couramment utilisé (cf. équation E.3.2 p. 214).

Une analyse rapide permet de vérifier qualitativement la cohérence des résultats sur plusieurs points. En effet, la figure E.3.24 montre que, pour une fréquence de rencontre donnée, plus la hauteur de houle est importante, plus la résistance ajoutée est également importante. De plus, la part due aux effets de diffraction (résultats expérimentaux et de simulation) est bien faible dans la zone de résonance et prépondérante lorsque les mouvements du navire sont faibles (fréquences de rencontre élevées).

Plus précisément, lorsque l'amplitude de la houle est faible ( $A_k = 0.025$ ), il est plus difficile de capter numériquement une augmentation de la résistance et ceci tant en modèle fixe qu'en modèle libre. La cambrure de la houle étant particulièrement faible (8%), une légère diffusion numérique de la houle peut fortement influencer les résultats obtenus. Des résultats plus cohérents sont obtenus pour des cambrures plus élevées (pas de résistance ajoutée négative).

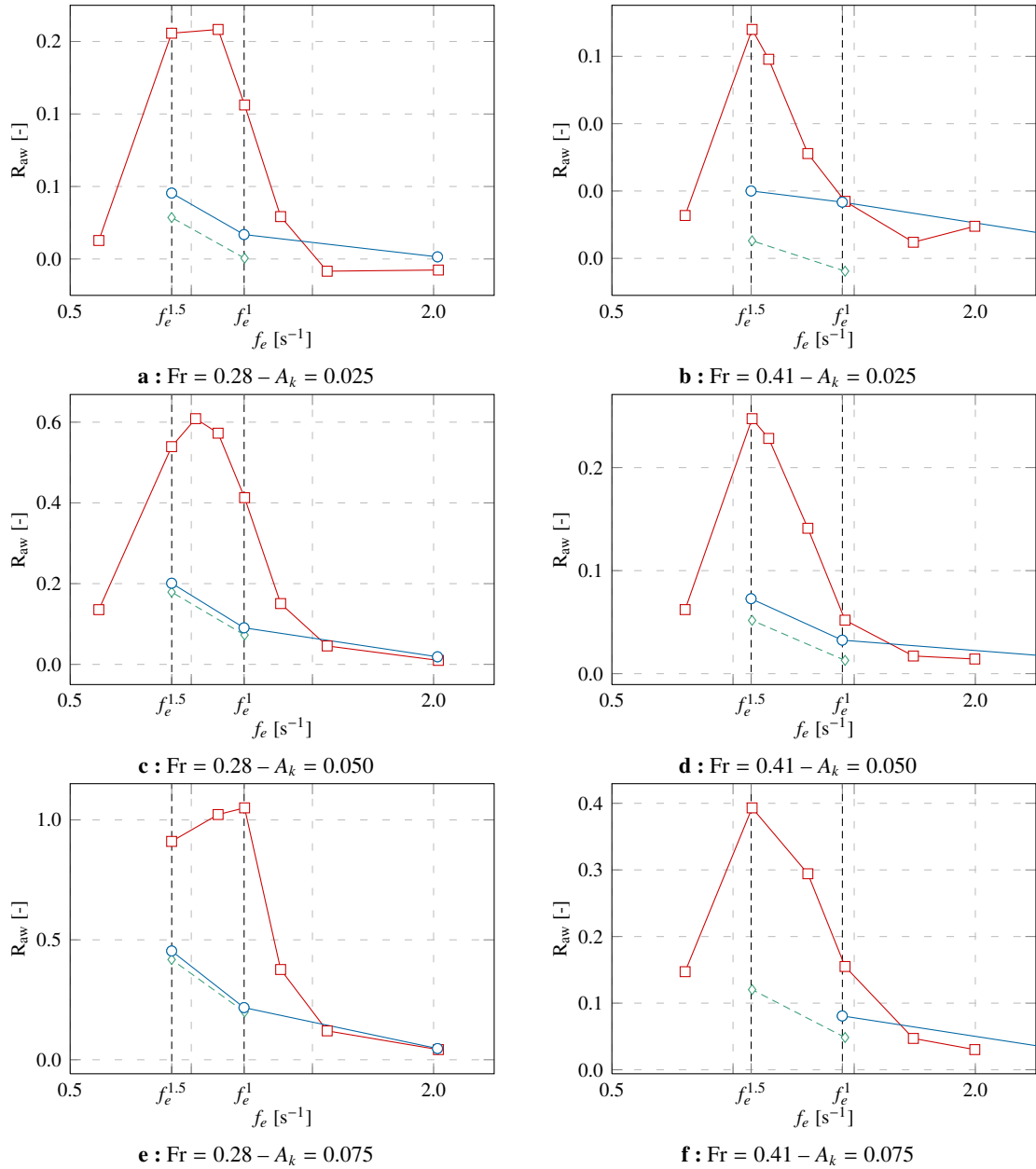
Finalement, la figure E.3.23 permet de vérifier que, dans le cas présent, malgré une légère dispersion des résultats, la résistance ajoutée dépend bien du carré de l'amplitude de la houle pour une fréquence de rencontre donnée.

En conclusion, les tendances observées sont celles attendues même si ces simulations sous-estiment légèrement la résistance ajoutée par rapport aux essais expérimentaux. Il est également important de rappeler que l'évaluation de la résistance ajoutée est assez difficile et ceci pour plusieurs raisons. Premièrement, elle peut être faible par rapport à la valeur de résistance en eau calme. Cette dernière quantité doit donc être connue précisément. Deuxièmement, le signal de l'effort de résistance considéré doit être suffisamment long pour pouvoir extraire une valeur moyenne représentative. Finalement, la capture de certains effets non-linéaires très fins est également difficile.



**Figure E.3.23 :** DTMB 5512 – Résistance ajoutée adimensionnelle en modèle libre – Moyenne de l'effort de résistance sous houle de face –  $Fr = 0.28$  (gauche),  $Fr = 0.41$  (droite) :  $\text{—}\circ\text{—}$  simulation en modèle libre ( $A_k = 0.025$ ),  $\text{--}\oplus\text{--}$  simulation en modèle libre ( $A_k = 0.050$ ),  $\text{--}\otimes\text{--}$  simulation en modèle libre ( $A_k = 0.075$ ),  $\text{—}\square\text{—}$  simulation en modèle fixe ( $A_k = 0.025$ ),  $\text{--}\diamond\text{--}$  simulation en modèle fixe ( $A_k = 0.050$ ) et  $\text{--}\diamond\text{--}$  simulation en modèle fixe ( $A_k = 0.075$ )





**Figure E.3.24 :** DTMB 5512 – Résistance ajoutée en modèle libre et fixe – Moyenne de l'effort de résistance sous houle de face –  $Fr = 0.28$  (gauche),  $Fr = 0.41$  (droite) —□— simulation en modèle libre, —○— expérience en modèle fixe et —◇— simulation en modèle fixe

### E.3.4 Conclusion

L'objectif principal de cette application était de valider l'algorithme de couplage sur un premier cas d'application à caractère industriel. Pour cela, le cas d'un navire libre en pilonnement et tangage avec houle de face a été considéré. Lorsque cela était possible, les résultats obtenus ont été comparés à des données expérimentales.

Dans un premier temps, des simulations de résistance à l'avancement en modèle libre ont été réalisées pour évaluer l'effort de résistance en eau calme. Lorsqu'une configuration identique est utilisée, les efforts de résistance obtenus sont proches des efforts de résistance évalués expérimentalement.

Dans un second temps, des simulations en modèle fixe avec houle de face ont été réalisées pour évaluer la part de la résistance ajoutée due aux phénomènes de diffraction. De nouveau, les résultats ont été comparés à des résultats expérimentaux mais des différences plus importantes sont observées sur les coefficients d'effort et de moment. Cependant, la position de référence n'étant pas identique, il est difficile de conclure quant à l'origine des écarts observés. En outre, pour réaliser une étude pertinente, il aurait été nécessaire d'effectuer un certain nombre de simulations avec des maillages et des pas de temps plus fins. Le nombre de simulations visé étant important, il a été choisi de ne pas approfondir cette partie de l'étude.

Enfin, de nombreuses simulations en modèle libre avec houle de face ont été réalisées. Les fonctions de transfert de la cinématique du navire ont bien été retrouvées pour la totalité des configurations étudiées (41 configurations). En particulier, les amplitudes des premiers et seconds harmoniques mais également la phase des premiers harmoniques sont très proches des résultats expérimentaux. Cependant, des différences plus significatives sont observées sur les valeurs moyennes. Finalement, une analyse qualitative de la résistance ajoutée a été réalisée. Les tendances attendues ont été retrouvées mais il aurait fallu disposer de résultats expérimentaux pour pouvoir valider définitivement ces résultats.

Malgré son caractère complexe, l'évaluation de la résistance ajoutée sur houle n'est que la première étape dans l'évaluation des performances propulsives d'un navire sur houle. Effectivement, les études de l'impact de la houle sur les performances propulsives (c.-à-d. en réalisant des simulations ou des essais d'auto-propulsion avec houle) sont encore plus complexes et difficiles à réaliser, à exploiter et à analyser. Ce sont les raisons pour lesquelles ces simulations s'inscrivent dans un domaine de recherche toujours très actif à l'heure actuelle.

Tout au long de cette étude, les difficultés liées à la validation des résultats par rapport à des données expérimentales ont également été présentées. Les évaluations des valeurs de référence, de l'amplitude de la houle, des différentes phases et des valeurs moyennes sont autant de points qui peuvent influencer de manière non négligeable les résultats.

Il a également été vérifié que l'algorithme de couplage converge à tout moment. De plus, il a été observé que certains des coefficients extra-diagonaux de l'opérateur de relaxation ne sont pas négligeables par rapport aux coefficients de relaxation diagonaux. L'étude de l'influence des coefficients extra-diagonaux est réalisée lors de la prochaine application.

## E.4 Des parallélépipèdes de faible densité

### Liste des figures de l'application

E.4.1	Cas 1 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires . . . . .	243
E.4.2	Cas 2 – Opérateur de relaxation en fonction de $d_e$ . . . . .	244
E.4.3	Cas 2 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires . . . . .	244
E.4.4	Cas 1 – Trajectoire et orientation pour différents pas de temps . . . . .	247
E.4.5	Cas 1 – Trajectoire dans le plan horizontal . . . . .	247
E.4.6	Cas 1 – Effort de masse ajoutée en fonction du temps . . . . .	248
E.4.7	Cas 1 – Accélération en fonction du temps . . . . .	248
E.4.8	Cas 1 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps . . . . .	249
E.4.9	Cas 1 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps . . . . .	249
E.4.10	Cas 1 – Accélération calculée et relaxée – $\Delta t = 0.002$ s . . . . .	250
E.4.11	Cas 1 – Accélération calculée et relaxée – $\Delta t = 0.050$ s . . . . .	251
E.4.12	Cas 1 – Effort fluide lorsque le mouvement est calculé et imposé – $\Delta t = 0.010$ s . . . . .	252
E.4.13	Cas 1 – Effort fluide lorsque le mouvement est calculé et imposé – $\Delta t = 0.050$ s . . . . .	253
E.4.14	Cas 1 – Iso-surface de pression dynamique – $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	254
E.4.15	Cas 2 – Trajectoire et orientation pour deux pas de temps – $d_e = 0.3$ . . . . .	258
E.4.16	Cas 2 – Trajectoire et orientation pour différentes densités équivalentes . . . . .	259
E.4.17	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.1$ . . . . .	260
E.4.18	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.2$ . . . . .	260
E.4.19	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.3$ . . . . .	261
E.4.20	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.5$ . . . . .	261
E.4.21	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.7$ . . . . .	262
E.4.22	Cas 2 – Accélération en pilonnement et tangage – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s – $t = 8.25$ s . . . . .	262
E.4.23	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	263
E.4.24	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	263
E.4.25	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.3$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	264
E.4.26	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.3$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	264
E.4.27	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.7$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	265
E.4.28	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.7$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	265
E.4.29	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.1.a, 2.1.b et 2.1.c . . . . .	266
E.4.30	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.3.a, 2.3.b et 2.3.c . . . . .	267
E.4.31	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.7.a, 2.7.b et 2.7.c . . . . .	268

### Liste des tableaux de l'application

E.4.1	Informations diverses . . . . .	240
E.4.2	Cas 1 – Matrice de masse ajoutée artificielle et opérateur de relaxation . . . . .	241
E.4.3	Cas 2 – Matrices de masse ajoutée artificielle . . . . .	241
E.4.4	Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations . . . . .	242
E.4.5	Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations diagonalisés . . . . .	242
E.4.6	Cas 2 – Ratios entre la matrice de masse ajoutée et la matrice d'inertie . . . . .	243
E.4.7	Cas 1 – Nombre moyen d'itérations par pas de temps . . . . .	246
E.4.8	Cas 1 – Moyenne quadratique des efforts de masse ajoutée . . . . .	246
E.4.9	Cas 1 – Moyenne quadratique de la dérivée temporelle des accélérations . . . . .	246
E.4.10	Cas 2 – Nombres moyens d'itérations par pas de temps – $d_e = 0.3$ , $d_e = 0.5$ et $d_e = 0.7$ . . . . .	257
E.4.11	Cas 2 – Nombres moyens d'itérations par pas de temps – $d_e = 0.1$ et $d_e = 0.2$ . . . . .	258

### Liste des figures de l'application en annexe

G.6.3.1	Cas 1 – Géométrie et position initiale . . . . .	409
G.6.3.2	Cas 2 – Géométrie et position initiale . . . . .	409
G.6.3.3	Répartition longitudinale de la masse volumique . . . . .	409
G.6.3.4	Maillage de référence – Vue 3D du parallélépipède . . . . .	410
G.6.3.5	Maillage de référence – Vue selon l'axe $x$ . . . . .	410
G.6.3.6	Maillage de référence – Vue selon l'axe $z$ . . . . .	410

## Liste des tableaux de l'application en annexe

G.6.3.1	Information sur le maillage . . . . .	410
---------	---------------------------------------	-----

### E.4.1 Description

La présente étude consiste à étudier numériquement la cinématique de plusieurs parallélépipèdes qui sont immergés et en déséquilibre hydrostatique. Ces différents parallélépipèdes sont plus légers que la masse du volume d'eau qu'ils occupent et les paramètres sont choisis de telle sorte que les phénomènes de masse ajoutée soient importants par rapport à l'inertie mécanique de ces parallélépipèdes. Le premier objectif de cette étude est de valider l'algorithme de couplage sur des corps possédant six degrés de liberté. Le second objectif est d'analyser les caractéristiques numériques de cet algorithme de couplage dans des cas limites, c.-à-d. lorsque les effets de masse ajoutée sont très importants par rapport à l'inertie du corps rigide considéré.

Deux points principaux sont étudiés. Le premier point consiste à vérifier la pertinence d'utiliser des coefficients de relaxation particulièrement faibles sur des cas physiques qui théoriquement s'y prêtent. D'un point de vue numérique, il est rarement conseillé d'utiliser des coefficients de relaxation faibles car la vitesse de convergence de l'algorithme de couplage peut être dégradée de manière importante. Une fois cette première étude réalisée, la question de l'influence des termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée se pose. Effectivement, du fait de la non nullité de ces termes, certains degrés de liberté sont relaxés de manière couplée. Sans ce couplage, l'implémentation de l'algorithme de résolution peut être grandement simplifiée. Il est donc intéressant d'analyser l'influence de ce couplage sur les propriétés de convergence de l'algorithme.

Pour s'affranchir des termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée lors de la première phase de cette étude, le centre de gravité du premier parallélépipède étudié coïncide avec le centre de volume de ce dernier. Il y a donc un équilibre indéterminé. Pour éviter cette indétermination, le parallélépipède est initialement penché arbitrairement. Lors de la deuxième étude, la répartition spatiale de la densité volumique n'est plus considérée uniforme. Par conséquent, la position du centre de gravité ne coïncide plus avec le centre de volume et du fait de cette « dissymétrie », l'opérateur de relaxation des accélérations n'est plus diagonal. Le centre de gravité est décalé de 1 mètre selon la plus grande longueur du parallélépipède. Les dimensions des parallélépipèdes étudiées restent constantes au cours de cette étude.

Le premier parallélépipède (c.-à-d. celui dont le centre de gravité correspond au centre géométrique du parallélépipède) est caractérisé par une densité de 0.1 (la densité de référence étant celle de l'eau). La densité équivalente des autres parallélépipèdes, c.-à-d. le simple ratio entre la masse totale de ces parallélépipèdes et la masse du volume d'eau occupé, est notée  $d_e$  et est comprise entre 0.1 et 0.7. Les caractéristiques inertielles des parallélépipèdes sont données au tableau E.4.1. Ces informations sont exprimées dans le repère lié aux parallélépipèdes. Ce repère est noté  $\mathcal{B}_3$  et est positionné au centre de gravité de ces derniers. Le repère fixe est, quant à lui, noté  $\mathcal{B}_0$ . La géométrie, position et orientation initiales et la répartition longitudinale de la masse volumique de ces parallélépipèdes sont présentées en annexe (cf. annexe G.6.3 p. 409).

Le maillage reste identique quel que soit le cas étudié. Des visualisations en sont proposées en annexe (cf. annexe G.6.3 p. 409). Il est composé d'environ 1 million de cellules. L'orientation initiale et la dynamique des parallélépipèdes sont prises en compte par un mouvement en bloc du maillage. La masse volumique de l'eau est fixée à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et sa viscosité dynamique à  $0.001 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Des conditions d'adhérence sont appliquées sur la surface des parallélépipèdes. Aucun modèle de turbulence n'est utilisé car cela n'a théoriquement pas d'impact sur les analyses réalisées au sein de cette étude. Le gain limite du solveur de pression est de nouveau fixé à 3 ordres. Afin d'étudier les propriétés de convergence de l'algorithme de couplage de façon rigoureuse, 30 itérations de couplage sont réalisées par pas de temps.

Lors de cette étude, les composantes de la position du centre de gravité sont notées  $(x, y, z)$ . L'orientation du corps est présentée par le biais des angles de Cardan  $(\phi, \theta, \psi)$ . Les composantes des vecteurs vitesse linéaire et angulaire (vecteur vitesse de rotation instantanée) sont respectivement notées  $(u, v, w)$  et  $(p, q, r)$ . Ces derniers vecteurs sont donnés dans le repère du corps pour faciliter l'analyse par degré de liberté. Les vitesses de Cardan sont, quant à elles, notées  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ . Afin de faciliter la présentation des résultats, les composantes du vecteur

de rotation instantanée pourront être abusivement assimilées aux vitesses de roulis, tangage et lacet<sup>11</sup>. Les composantes des vecteurs efforts et moments sont notées  $(f_x, f_y, f_z)$  et  $(m_x, m_y, m_z)$  et également exprimées au centre de gravité dans le repère des parallélépipèdes.

Caractéristique	Cas 1	Cas 2					Unité
	1	2.1	2.2	2.3	2.5	2.7	
$Lx/\mathcal{B}_0$	4			4			m
$Ly/\mathcal{B}_0$	2			2			m
$Lz/\mathcal{B}_0$	0.5			0.5			m
$d_e$	0.1	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	-
$m$	400	400	800	1200	2000	2800	kg
$(x_g, y_g, z_g)$	(0,0,0,0,0)			(1,0,0,0,0)			m
$I_{xx}/\mathcal{B}_3$	140	140	285	430	710	990	kg.m <sup>2</sup>
$I_{yy}/\mathcal{B}_3$	540	880	1 800	2 600	4 400	6 200	kg.m <sup>2</sup>
$I_{zz}/\mathcal{B}_3$	670	1 000	2 000	3 000	5 000	7 000	kg.m <sup>2</sup>
$(\phi_0, \theta_0, \psi_0)$	(20,15,35)			(20,15,35)			°

Tableau E.4.1 : Parallélépipèdes – Caractéristiques géométriques et inertielles – Position et orientation initiales

## E.4.2 Critère de convergence

Lors de cette étude, 30 itérations de couplage sont réalisées à chaque pas de temps afin de s’affranchir de l’influence de la définition d’un critère de convergence. Cependant, afin d’analyser rapidement les propriétés de convergence de l’algorithme de couplage utilisé, l’évaluation d’un critère de convergence est réalisée après coup. La présentation et la définition de ce critère de convergence est réalisée ci-dessous.

Ce critère de convergence est évalué pour chaque degré de liberté et à chaque pas de temps. Il est ensuite moyenné sur le nombre de pas de temps simulés. Il représente le nombre moyen d’itérations nécessaires pour que la valeur absolue de la différence entre les accélérations relaxées et celles calculées par le solveur structure à la fin du pas de temps soit en dessous d’une limite arbitraire. Cette limite est ici fixée à 0.005 m.s<sup>-2</sup> pour les mouvements de translation et 0.005 rad.s<sup>-2</sup> pour les mouvements de rotation. Cette quantité, notée  $c$ , est donc définie pour le  $k$ -ième degré de liberté de la façon suivante :

$$c_k = \text{moyenne}_n \left( \min_{j \in [1,30]} (j), \forall i \geq j \left| \ddot{\delta}_k^i |_n - \tilde{\delta}_k |_n \right| \leq 0.005 \right) \quad (\text{E.4.1})$$

Cette quantité permet d’évaluer rapidement les propriétés de convergence de l’algorithme de couplage en post-traitement mais elle ne peut pas être utilisée au cours de la simulation car elle nécessite de connaître les accélérations à la fin du pas de temps qui est en cours de résolution. Cette même quantité peut également être définie de manière globale pour la totalité des degrés de liberté. Dans ce cas, elle est évaluée de la façon suivante :

$$c = \text{moyenne}_n \left( \max_{k \in [1,6]} \left( \min_{j \in [1,30]} (j) \right), \forall i \geq j \left| \ddot{\delta}_k^i |_n - \tilde{\delta}_k |_n \right| \leq 0.005 \right) \quad (\text{E.4.2})$$

## E.4.3 Masse ajoutée et opérateur de relaxation des accélérations

Les matrices exposées dans cette section sont exprimées dans le repère des parallélépipèdes (cf. figure G.6.3.1 p. 409) et au centre de gravité de ces derniers, c.-à-d. le repère  $\mathcal{B}_3$ . La matrice  $\mathbf{MA}$  représente la matrice de masse ajoutée artificielle utilisée. Elle est évaluée selon la méthode présentée à la section B.2.7 p. 70. La matrice  $\mathbf{H}_a$  représente l’opérateur de relaxation de l’accélération des degrés de liberté des parallélépipèdes (cf. section D.5.6.4 p. 168). Lorsque le centre de gravité est positionné au centre de volume du parallélépipède, ces deux matrices sont données au tableau E.4.2. Dans le cas contraire, les matrices de masse ajoutée artificielle utilisées sont données au tableau E.4.3. Elles sont identiques quel que soit la densité équivalente utilisée car

11. La relation entre le vecteur rotation instantanée et les vitesses de Cardan est donnée en annexe (cf. annexe G.1.2 p. 323).

elles dépendent uniquement de la géométrie du parallélépipède. Les opérateurs de relaxation sont, quant à eux, donnés aux tableaux E.4.4 et E.4.5 et à la figure E.4.2.

Trois différents opérateurs de relaxation sont testés pour évaluer l'influence des termes extra-diagonaux de l'opérateur de relaxation. Ces trois cas sont respectivement notés *a*, *b* et *c*. Lors du premier cas, aucun traitement particulier n'est réalisé, c.-à-d. la totalité des termes des matrices de masse ajoutée artificielle et des opérateurs de relaxation des accélérations est prise en compte (cf. tableau E.4.4 page suivante). Dans le deuxième cas, les termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée artificielle sont négligés lors de l'évaluation de l'opérateur de relaxation des accélérations (cf. tableau E.4.5 page suivante). Finalement, dans le troisième cas la totalité de la matrice de masse ajoutée artificielle est utilisée lors de l'évaluation de l'opérateur de relaxation des accélérations, mais les termes extra-diagonaux de l'opérateur de relaxation sont négligés après coup (cf. tableau E.4.5 page suivante). En résumé, le premier cas représente théoriquement la situation optimale puisque les différents couplages sont pris en compte. Au contraire, le deuxième cas néglige totalement les effets de couplage entre les degrés de liberté. Le troisième cas néglige également les effets de couplage mais à un niveau moins élevé puisque l'influence des termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée artificielle est prise en compte dans l'évaluation des termes diagonaux de l'opérateur de relaxation. Ce dernier cas permet notamment d'analyser si le découplage numérique entre les degrés de liberté améliore ou dégrade les propriétés de convergence de l'algorithme de couplage. Les champs de pression obtenus pour l'évaluation des matrices de masse ajoutée sont présentés aux figures E.4.1 et E.4.3.

Afin de rapidement fixer les idées, le ratio entre les termes diagonaux de la matrice de masse ajoutée et la matrice d'inertie généralisée est donné au tableau E.4.6. Des ratios particulièrement élevés sont observés pour le mouvement de pilonnement, de roulis et de tangage du fait des dimensions des parallélépipèdes.

Lorsque l'opérateur de relaxation des accélérations n'est pas diagonalisé, du fait de la translation du centre de gravité utilisée, le mouvement d'embardee est couplé au mouvement de lacet et le mouvement de pilonnement est couplé au mouvement de tangage. Les degrés de liberté en cavalement et roulis sont, quant à eux, découplés. Les coefficients de relaxation extra-diagonaux liés au mouvement d'embardee et de lacet sont plus petits que les coefficients diagonaux correspondants si la densité équivalente est supérieure à 0.3 (cf. figure E.4.2 p. 244) et sont d'un ordre de grandeur identique dans le cas contraire. En ce qui concerne les coefficients extra-diagonaux liés aux mouvements de pilonnement et de tangage, ils sont du même ordre de grandeur que celui des termes diagonaux correspondants et ceci, quel que soit la densité équivalente utilisée.

$d_e$	Cas	$\overline{\mathbf{MA}}_{/B_3}$	$\mathbf{H}_a/B_3$
0.1	1	$\begin{bmatrix} 564 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1255 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11348 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1633 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9657 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1274 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.415 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.242 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.034 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.053 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.343 \end{bmatrix}$

Tableau E.4.2 : Parallélépipèdes – Cas 1 – Matrice de masse ajoutée artificielle et opérateur de relaxation

$d_e$	Cas	$\overline{\mathbf{MA}}_{/B_3}$ (pleine)	$\overline{\mathbf{MA}}_{/B_3}$ (diagonalisée)
0.1	2.x	$\begin{bmatrix} 569 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1257 & 0 & 0 & 0 & -1256 \\ 0 & 0 & 11432 & 0 & 11433 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1633 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11433 & 0 & 21166 & 0 \\ 0 & -1256 & 0 & 0 & 0 & 2535 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 569 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1257 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1633 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2535 \end{bmatrix}$

Tableau E.4.3 : Parallélépipèdes – Cas 2 – Matrices de masse ajoutée artificielle

$d_e$	Cas	$\mathbf{H}_{a/\mathcal{B}_3}$
0.1	2.1.a	$\begin{bmatrix} 0.413 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.330 & 0 & 0 & 0 & 0.294 \\ 0 & 0 & 0.068 & 0 & -0.077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0 & 0.080 & 0 \\ 0 & 0.117 & 0 & 0 & 0 & 0.388 \end{bmatrix}$
0.2	2.2.a	$\begin{bmatrix} 0.584 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.468 & 0 & 0 & 0 & 0.325 \\ 0 & 0 & 0.123 & 0 & -0.134 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.061 & 0 & 0.144 & 0 \\ 0 & 0.129 & 0 & 0 & 0 & 0.532 \end{bmatrix}$
0.3	2.3.a	$\begin{bmatrix} 0.678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.552 & 0 & 0 & 0 & 0.314 \\ 0 & 0 & 0.168 & 0 & -0.177 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.207 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.081 & 0 & 0.196 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0.614 \end{bmatrix}$
0.5	2.5.a	$\begin{bmatrix} 0.779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.656 & 0 & 0 & 0 & 0.274 \\ 0 & 0 & 0.240 & 0 & -0.236 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.303 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.108 & 0 & 0.278 & 0 \\ 0 & 0.109 & 0 & 0 & 0 & 0.710 \end{bmatrix}$
0.7	2.7.a	$\begin{bmatrix} 0.831 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.719 & 0 & 0 & 0 & 0.237 \\ 0 & 0 & 0.296 & 0 & -0.273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.124 & 0 & 0.339 & 0 \\ 0 & 0.094 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$

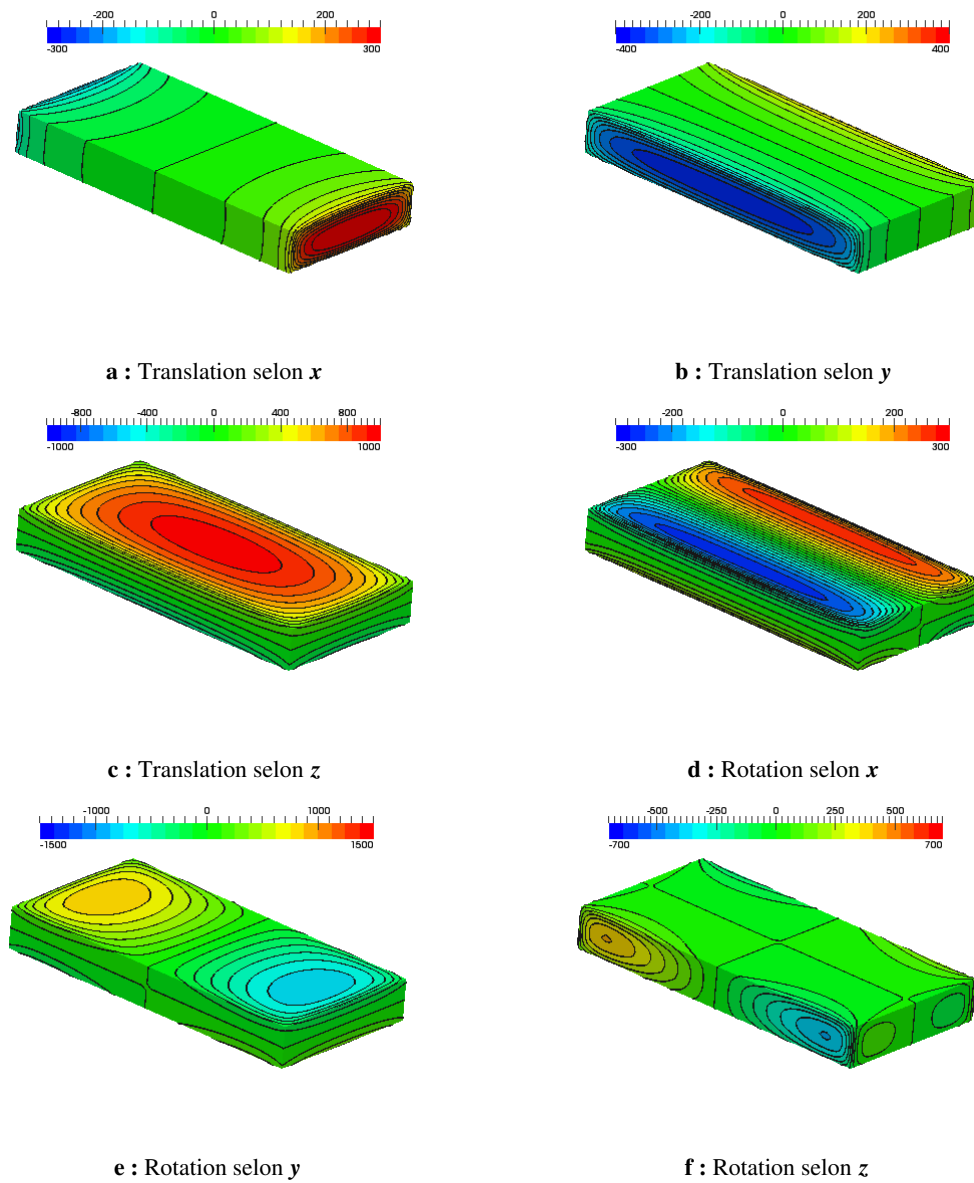
**Tableau E.4.4 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations lorsque la totalité des termes est prise en compte

$d_e$	Cas	$\mathbf{H}_{a/\mathcal{B}_3}$	Cas	$\mathbf{H}_{a/\mathcal{B}_3}$
0.1	2.1.b	$\begin{bmatrix} 0.413 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.241 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.034 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.284 \end{bmatrix}$	2.1.c	$\begin{bmatrix} 0.413 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.330 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.068 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.080 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.388 \end{bmatrix}$
0.2	2.2.b	$\begin{bmatrix} 0.584 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.389 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.442 \end{bmatrix}$	2.2.c	$\begin{bmatrix} 0.584 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.468 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.123 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.148 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.532 \end{bmatrix}$
0.3	2.3.b	$\begin{bmatrix} 0.678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.488 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.095 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.207 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.543 \end{bmatrix}$	2.3.c	$\begin{bmatrix} 0.678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.552 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.168 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.207 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.614 \end{bmatrix}$
0.5	2.5.b	$\begin{bmatrix} 0.779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.614 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.149 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.303 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.172 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.664 \end{bmatrix}$	2.5.c	$\begin{bmatrix} 0.779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.656 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.240 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.303 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.278 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.710 \end{bmatrix}$
0.7	2.7.b	$\begin{bmatrix} 0.831 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.690 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.197 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.735 \end{bmatrix}$	2.7.c	$\begin{bmatrix} 0.831 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.719 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.296 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.339 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$

**Tableau E.4.5 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations lorsque les termes extra-diagonaux de la matrice de masse ajoutée artificielle sont négligés (gauche) et lorsque les termes extra-diagonaux de l'opérateur sont négligés (droite)

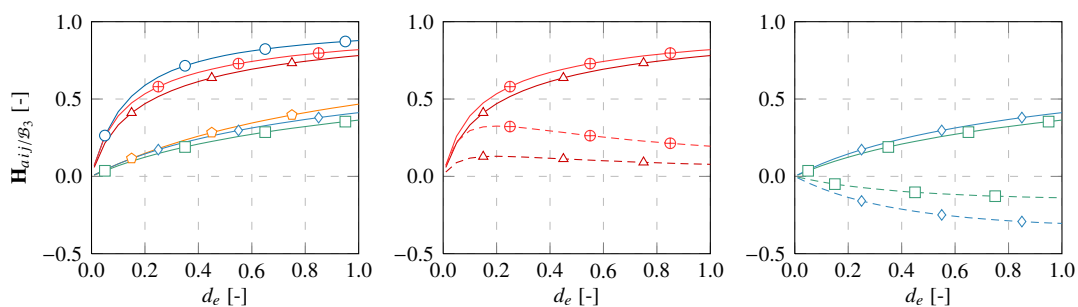
Cas	$\overline{MA}_{11}/m$	$\overline{MA}_{22}/m$	$\overline{MA}_{33}/m$	$\overline{MA}_{44}/I_{xx}$	$\overline{MA}_{55}/I_{yy}$	$\overline{MA}_{66}/I_{zz}$
1	1.4	3.1	28.3	11.4	10.9	1.3
2.1	1.4	3.1	28.3	11.4	23.8	2.5
2.3	0.5	1.0	9.4	3.8	7.9	0.8
2.5	0.3	0.6	5.7	2.3	4.8	0.5
2.7	0.2	0.4	4.0	1.6	3.4	0.4

**Tableau E.4.6 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Ratios entre les termes diagonaux de la matrice de masse ajoutée et la matrice d'inertie généralisée lorsqu'elles sont exprimées dans  $\mathcal{B}_3$

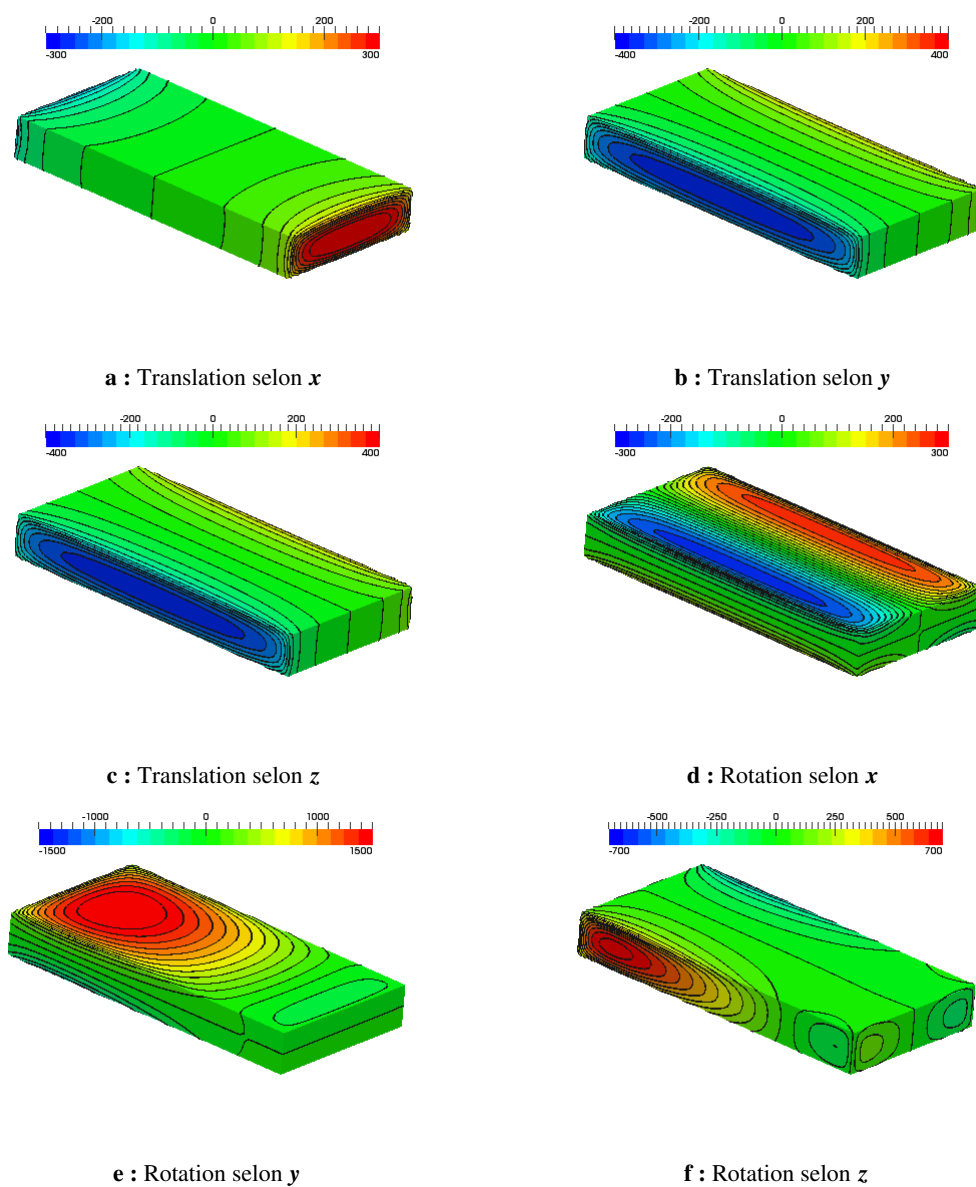


**Figure E.4.1 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires [Pa] – Les accélérations utilisées sont unitaires





**Figure E.4.2 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Opérateur de relaxation en fonction de la densité équivalente utilisée : —○—  $H_{a,11}$ , —△—  $H_{a,22}$ , —□—  $H_{a,33}$ , —◇—  $H_{a,44}$ , —◇—  $H_{a,55}$ , —⊕—  $H_{a,66}$ , —△—  $H_{a,62}$ , —⊕—  $H_{a,26}$ , —□—  $H_{a,53}$  et —◇—  $H_{a,35}$



**Figure E.4.3 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires [Pa] – Les accélérations utilisées sont unitaires

### E.4.4 Parallélépipède 1

Les résultats et analyses du parallélépipède de type 1 (parallélépipède dont le centre de gravité coïncide avec le centre de volume) sont présentés dans cette section. Lors de cette étude, cinq différents pas de temps sont testés :  $\Delta t = 0.002$  s,  $\Delta t = 0.005$  s,  $\Delta t = 0.010$  s,  $\Delta t = 0.025$  s et  $\Delta t = 0.050$  s. Les simulations effectuées représentent 15 s de temps physique.

Les trajectoires et orientations des différents cas sont présentées aux figures E.4.4 et E.4.5 pour quelques pas de temps. Un mouvement de type « feuille morte ascendante » est observé. La position, l'orientation et les vitesses linéaire et angulaire sont données en fonction du temps aux figures E.4.8 et E.4.9 pour quelques pas de temps. Afin d'obtenir une cinématique initiale indépendante des paramètres numériques utilisés, le parallélépipède possède une orientation initiale non-nulle. Malgré cette initialisation, les cinématiques obtenues commencent à se différencier au-delà de 7 s. Le pas de temps utilisé influence donc de manière non négligeable la cinématique du parallélépipède considéré. La complexité de ce type d'écoulement, son fort caractère instationnaire et le fort couplage entre l'écoulement et la cinématique du parallélépipède permettent d'expliquer les différences observées. La visualisation d'iso-surfaces de pression dynamique à différents instants permet d'appréhender rapidement les caractéristiques de l'écoulement précédemment citées. Elles sont présentées à la figure E.4.14.

La convergence des degrés de liberté à différents instants est présentée par les figures E.4.10 à E.4.11. Ces figures montrent que les degrés de liberté convergent correctement et ceci malgré la présence d'efforts de masse ajoutée importants et l'utilisation de pas de temps élevés dans certains cas. Il est important de rappeler que les coefficients de relaxation sont fortement anisotropes (cf. tableau E.4.2 p. 241). En effet, certains degrés de liberté sont très fortement relaxés (0.034 et 0.053 pour les mouvements respectifs de pilonnement et de tangage) et d'autres sont relaxés par des coefficients dont l'ordre de grandeur est plus classique (0.415 et 0.343 pour les mouvements respectifs d'embarquée et de lacet). L'utilisation de coefficients de relaxation faibles et anisotropes ne semble donc pas poser de problèmes particuliers.

Le tableau résumant le nombre moyen d'itérations nécessaires pour que le critère de convergence soit atteint (cf. tableau E.4.7 page suivante) permet également de mettre en évidence la dépendance du nombre d'itérations au degré de liberté considéré. Notamment, les degrés de liberté qui nécessitent le plus d'itérations pour atteindre la convergence sont principalement les degrés de liberté en embarquée et en roulis. En théorie, si les effets de masse ajoutée sont correctement relaxés, ce nombre d'itérations ne doit pas dépendre directement de ces effets. Afin de vérifier cette hypothèse, ces résultats sont comparés à la moyenne quadratique<sup>12</sup> des effets de masse ajoutée (cf. tableau E.4.8 page suivante). La moyenne quadratique est utilisée car la moyenne temporelle des effets de masse ajoutée ne reflète pas suffisamment les différences observées à la figure E.4.6 entre les degrés de liberté (moyenne quasi nulle). L'hypothèse précédemment énoncée est bien vérifiée puisque des plus importants effets de masse ajoutée sont observés pour les degrés de liberté de pilonnement et de tangage et non pas ceux en embarquée et en roulis. Ainsi, le nombre d'itérations ne dépend pas des effets de masse ajoutée.

La question de l'origine des différences entre les degrés de liberté se pose donc naturellement. L'analyse conjointe du tableau E.4.7 et de la figure E.4.7 amène à penser qu'il existe un lien potentiel entre le nombre d'itérations et les variations d'accélération. Effectivement, les mouvements d'embarquée et de roulis présentent des accélérations fortement oscillantes avec des niveaux élevés. Comme les variations d'accélération peuvent être considérées comme proportionnelles aux variations des efforts fluides dans un premier temps (le couplage cinématique entre les degrés de liberté en rotation peut se négliger car les inerties sont faibles), cette nouvelle hypothèse suppose un lien entre la convergence des degrés de liberté et la convergence des efforts fluides. Par conséquent, le nombre d'itérations pour atteindre le critère de convergence est comparé à la moyenne quadratique de la dérivée temporelle des accélérations (cf. tableau E.4.9 page suivante). Les fortes variations d'accélération sont bien observées pour les degrés de liberté qui nécessitent un plus grand nombre d'itérations (degrés de liberté en embarquée et roulis), ce qui semble donc justifier cette dernière hypothèse.

Afin de vérifier la pertinence d'utiliser un opérateur de Steklov-Poincaré linéarisé, (cf. section D.3.4 p. 128), les résultats des simulations réalisées en mouvement calculé sont réutilisés pour effectuer des simulations en mouvement imposé pour certains pas de temps. Lors de ces simulations, la cinématique du parallélépipède est imposée à chaque pas de temps comme étant égale à celle évaluée à la fin de ce même pas de temps lorsque le mouvement est calculé. Ces simulations représentent une situation idéale puisque les inconnues cinématiques du problème couplé sont connues à l'avance. Les résultats obtenus sont présentés par les figures E.4.12 à E.4.13.

12. La moyenne quadratique du signal  $x(t)$  est définie comme étant égale à  $\sqrt{1/T \int_0^T x^2(t) dt}$ .

Ces figures présentent la convergence des efforts fluides (seules inconnues restantes du problème couplé) à différents instants. Deux points particuliers en ressortent. Tout d'abord, des différences sont observées lorsque le nombre de pas de temps simulés devient important, et ceci, malgré une cinématique identique. L'accumulation d'erreurs numériques, l'utilisation de pas de temps trop élevés et la forte influence des effets d'histoire sur ce type de situation permettent d'expliquer ces différences. Cependant, il est possible de comparer qualitativement la convergence des efforts fluides entre ces deux types de simulation. Cette dernière est atteinte pour un nombre d'itérations sensiblement identique. Ceci est d'autant plus vrai que les variations entre deux pas de temps sont significatives (au-delà de 1% par exemple). L'utilisation d'un opérateur de Steklov-Poincaré linéarisé est donc toujours justifiée dans un cas à six degrés de liberté avec des effets de masse ajoutée importants.

Il est également important de remarquer que la situation présente ( $d_e = 0.1$ ) est particulièrement difficile à résoudre et que les remarques effectuées tout au long de cette analyse ne peuvent être étendues aux situations classiquement rencontrées en hydrodynamique navale (effets de masse ajoutée moins importants). C'est la raison pour laquelle, des densités structurales équivalentes plus importantes sont également étudiées dans la seconde partie de cette étude. Néanmoins, l'objectif premier était de valider l'algorithme de couplage sur un cas extrême et de vérifier la pertinence d'utiliser des coefficients de relaxation particulièrement faibles. Ces deux points ont bien été vérifiés sur ce cas d'application.

$\Delta t$	translation			rotation			tous
	$\dot{u}_{/B_3}$	$\dot{v}_{/B_3}$	$\dot{w}_{/B_3}$	$\dot{p}_{/B_3}$	$\dot{q}_{/B_3}$	$\dot{r}_{/B_3}$	
0.002	5.4	<b>6.5</b>	2.8	<b>2.6</b>	1.2	1.8	8.1
0.005	7.9	<b>8.6</b>	6.5	<b>6.3</b>	2.6	3.9	11.3
0.010	8.7	<b>10.2</b>	8.2	<b>8.5</b>	4.6	5.3	12.6
0.025	9.2	<b>10.6</b>	8.0	<b>9.4</b>	6.6	7.0	11.7
0.050	<b>10.7</b>	<b>10.9</b>	8.8	<b>12.6</b>	9.1	9.8	13.9

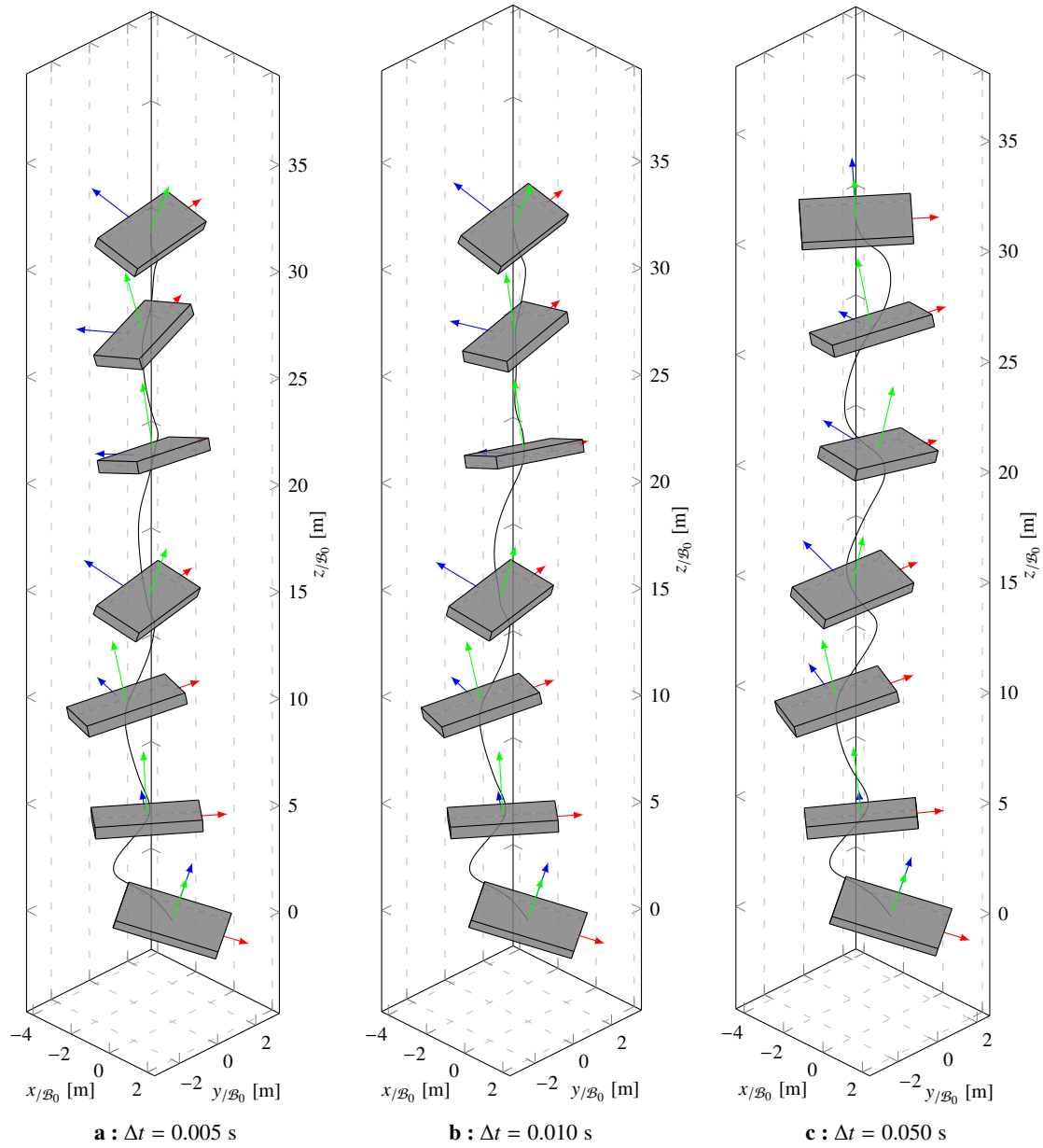
**Tableau E.4.7 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Nombre moyen d'itérations par pas de temps pour que le critère de convergence soit respecté

$\Delta t$	translation			rotation		
	$\dot{u}_{/B_3}$	$\dot{v}_{/B_3}$	$\dot{w}_{/B_3}$	$\dot{p}_{/B_3}$	$\dot{q}_{/B_3}$	$\dot{r}_{/B_3}$
0.002	$9.1 \cdot 10^2$	$1.8 \cdot 10^3$	<b><math>9.3 \cdot 10^3</math></b>	$1.6 \cdot 10^3$	<b><math>3.9 \cdot 10^3</math></b>	$6.2 \cdot 10^2$
0.005	$9.6 \cdot 10^2$	$1.8 \cdot 10^3$	<b><math>9.5 \cdot 10^3</math></b>	$1.6 \cdot 10^3$	<b><math>4.3 \cdot 10^3</math></b>	$7.2 \cdot 10^2$
0.010	$9.4 \cdot 10^2$	$1.9 \cdot 10^3$	<b><math>8.4 \cdot 10^3</math></b>	$1.7 \cdot 10^3$	<b><math>4.3 \cdot 10^3</math></b>	$7.6 \cdot 10^2$
0.025	$1.1 \cdot 10^3$	$2.1 \cdot 10^3$	<b><math>1.1 \cdot 10^4</math></b>	$1.6 \cdot 10^3$	<b><math>4.1 \cdot 10^3</math></b>	$6.3 \cdot 10^2$
0.050	$1.2 \cdot 10^3$	$1.9 \cdot 10^3$	<b><math>8.9 \cdot 10^3</math></b>	$1.6 \cdot 10^3$	<b><math>4.6 \cdot 10^3</math></b>	$7.8 \cdot 10^2$

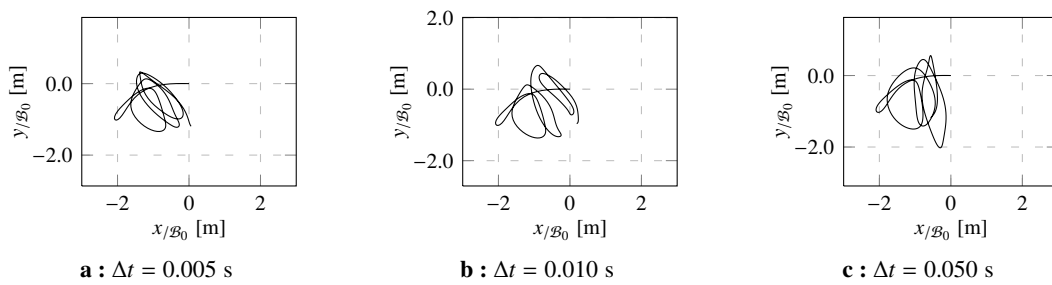
**Tableau E.4.8 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Moyenne quadratique des efforts de masse ajoutée par degré de liberté – [N] pour les degrés de liberté en translation et [N.m] pour les degrés de liberté en rotation

$\Delta t$	translation			rotation		
	$\ddot{u}_{/B_3}$	$\ddot{v}_{/B_3}$	$\ddot{w}_{/B_3}$	$\ddot{p}_{/B_3}$	$\ddot{q}_{/B_3}$	$\ddot{r}_{/B_3}$
0.002	<b>4.1</b>	<b>4.5</b>	2.7	<b>3.7</b>	1.3	2.2
0.005	4.1	<b>5.5</b>	2.9	<b>4.4</b>	1.5	2.7
0.010	4.0	<b>6.4</b>	2.8	<b>4.6</b>	1.5	3.1
0.025	4.2	<b>6.4</b>	3.4	<b>4.4</b>	1.3	2.9
0.050	<b>4.9</b>	<b>5.7</b>	2.7	<b>4.1</b>	1.6	2.7

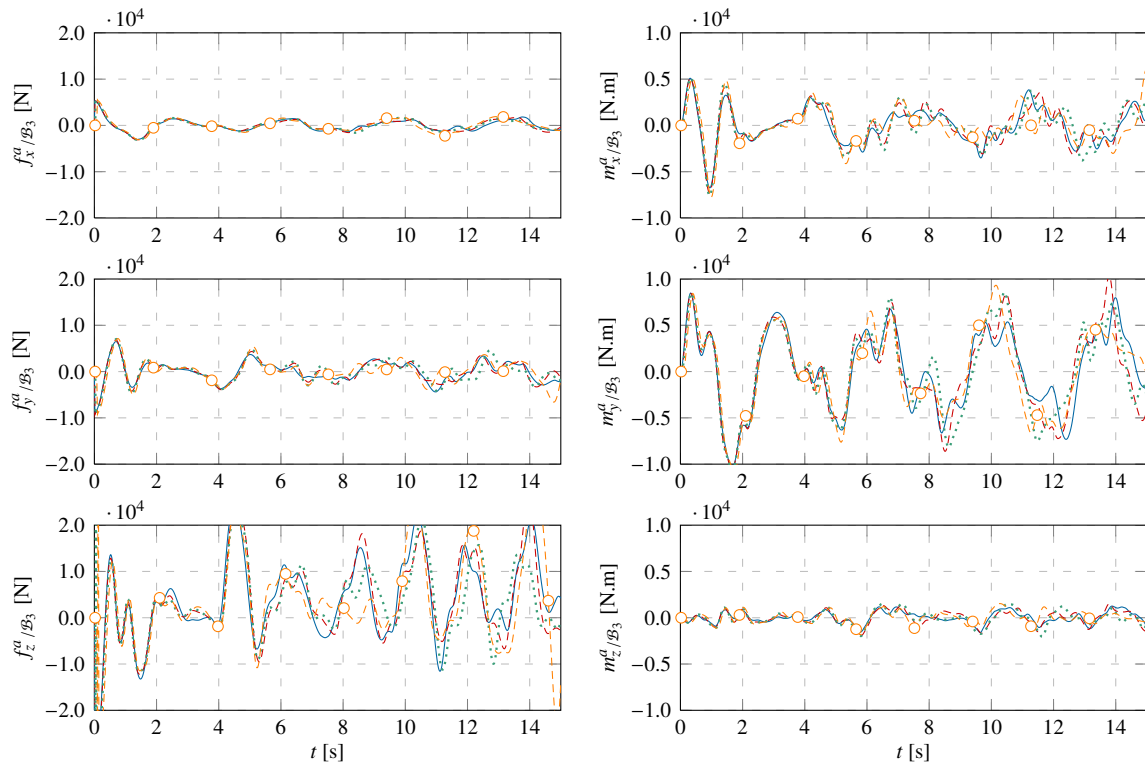
**Tableau E.4.9 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Moyenne quadratique de la dérivée temporelle des accélérations par degré de liberté – [m.s<sup>-3</sup>] pour les degrés de liberté en translation et [rad.s<sup>-3</sup>] pour les degrés de liberté en rotation



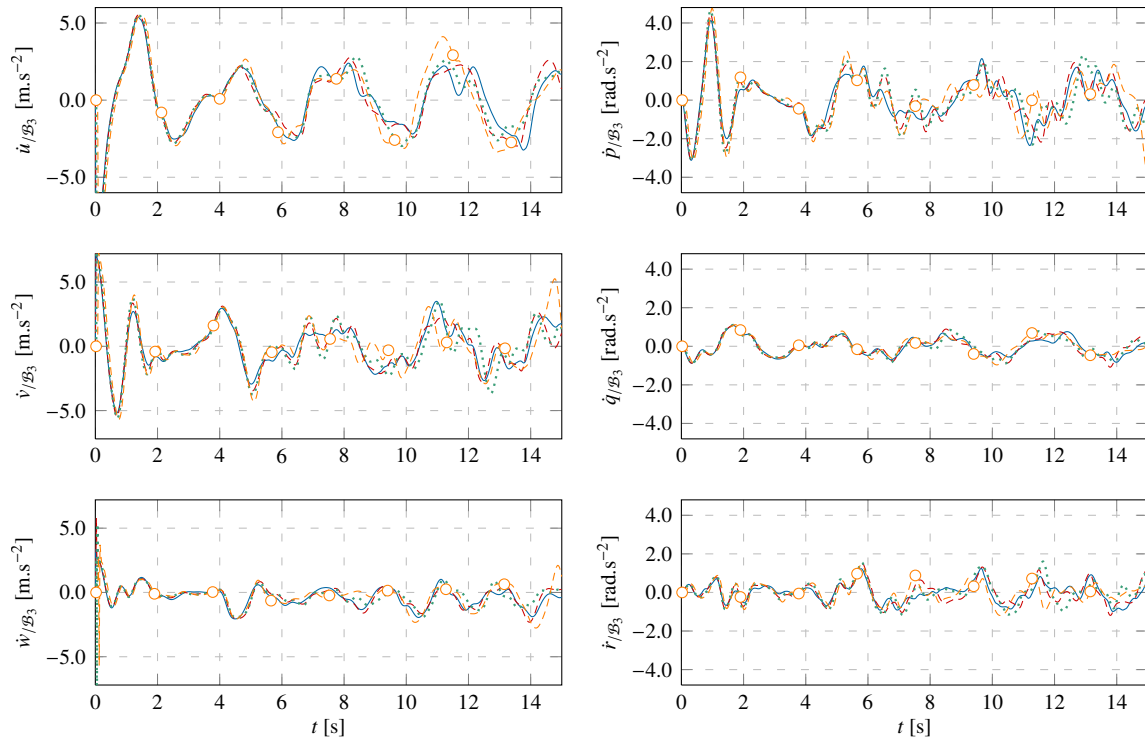
**Figure E.4.4** : Parallélépipèdes – Cas 1 – Trajectoire et orientation pour différents pas de temps



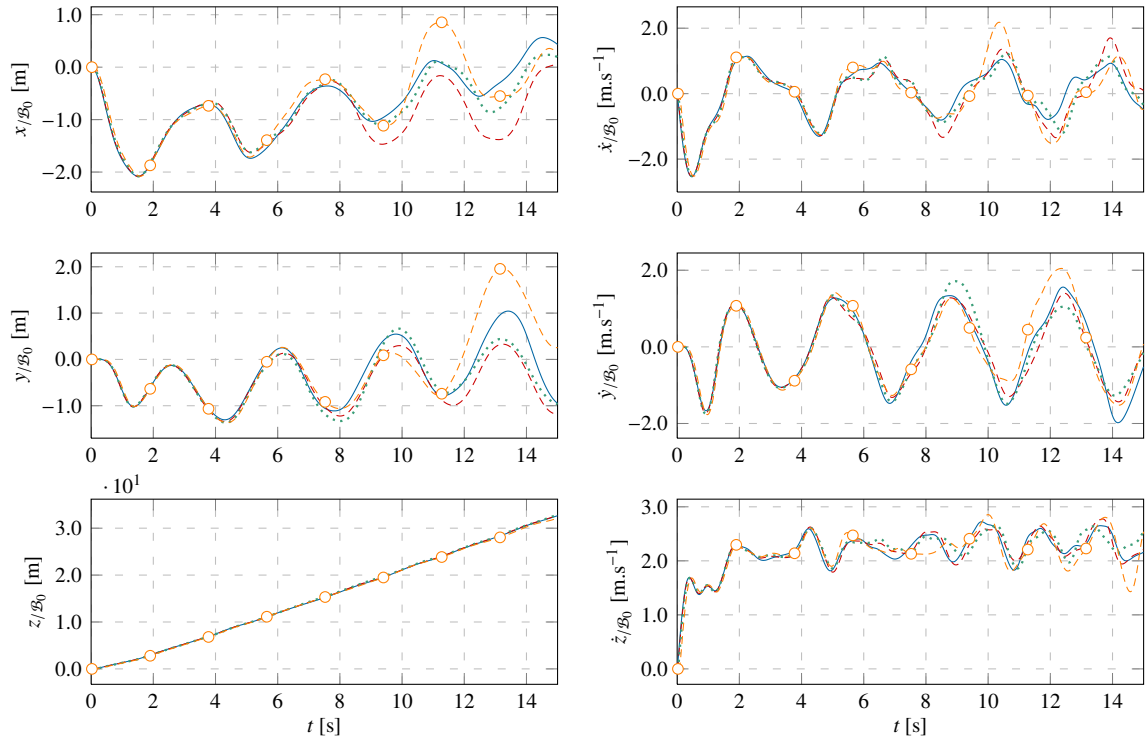
**Figure E.4.5** : Parallélépipèdes – Cas 1 – Trajectoire dans le plan horizontal



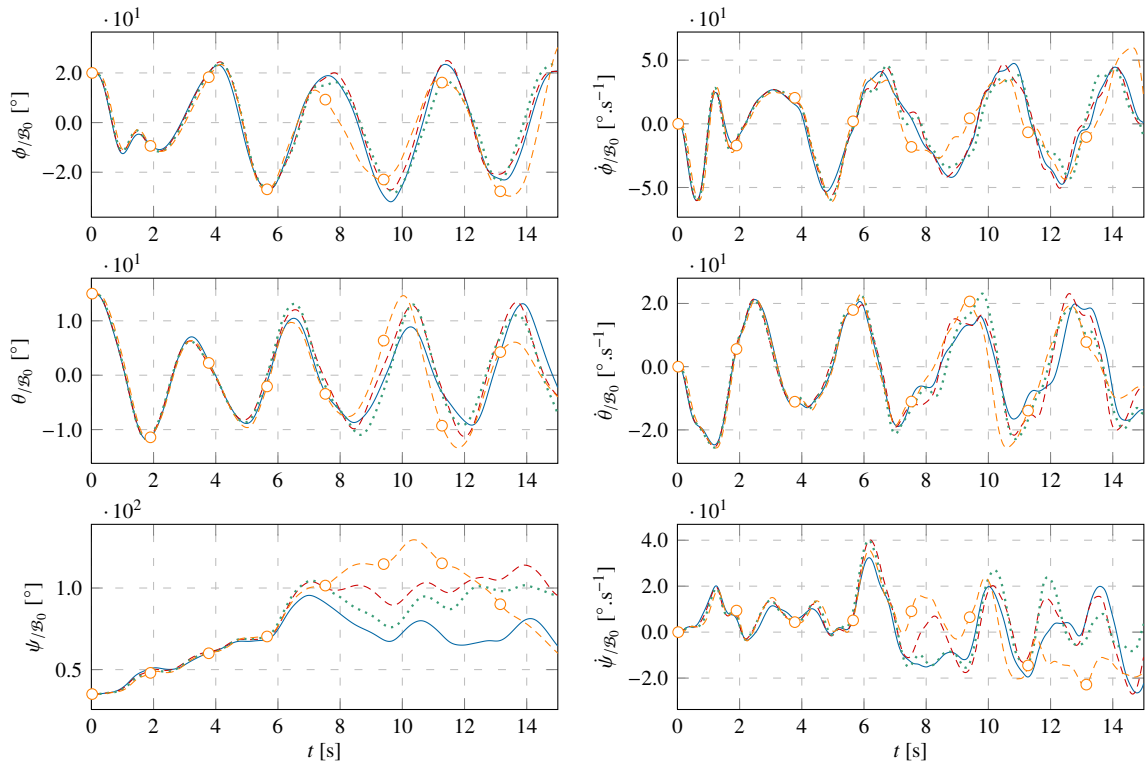
**Figure E.4.6 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Effort de masse ajoutée en fonction du temps : —  $\Delta t = 0.002$  s, ---  $\Delta t = 0.005$  s, .....  $\Delta t = 0.010$  s et -○-  $\Delta t = 0.025$  s



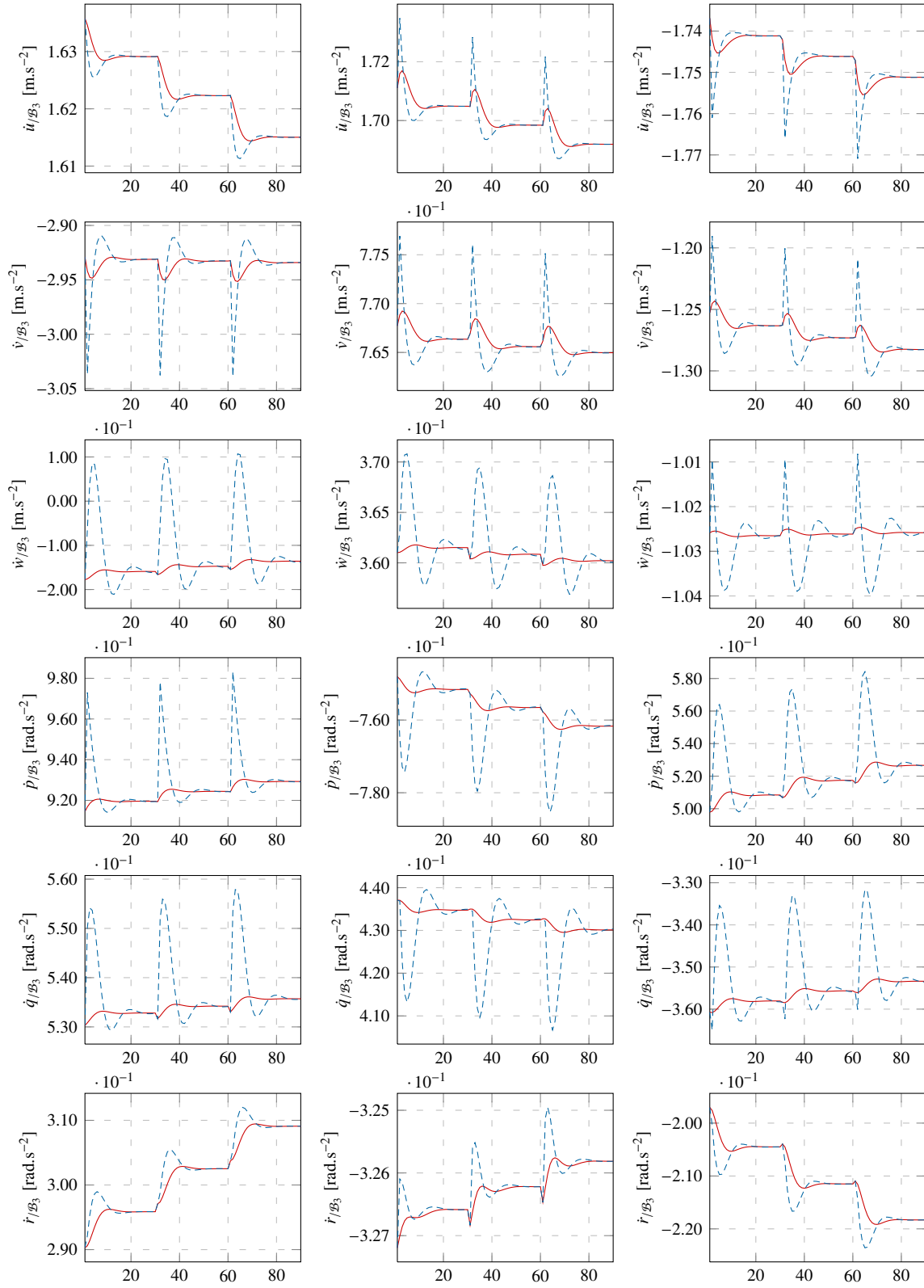
**Figure E.4.7 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Accélération en fonction du temps : —  $\Delta t = 0.002$  s, ---  $\Delta t = 0.005$  s, .....  $\Delta t = 0.010$  s et -○-  $\Delta t = 0.025$  s



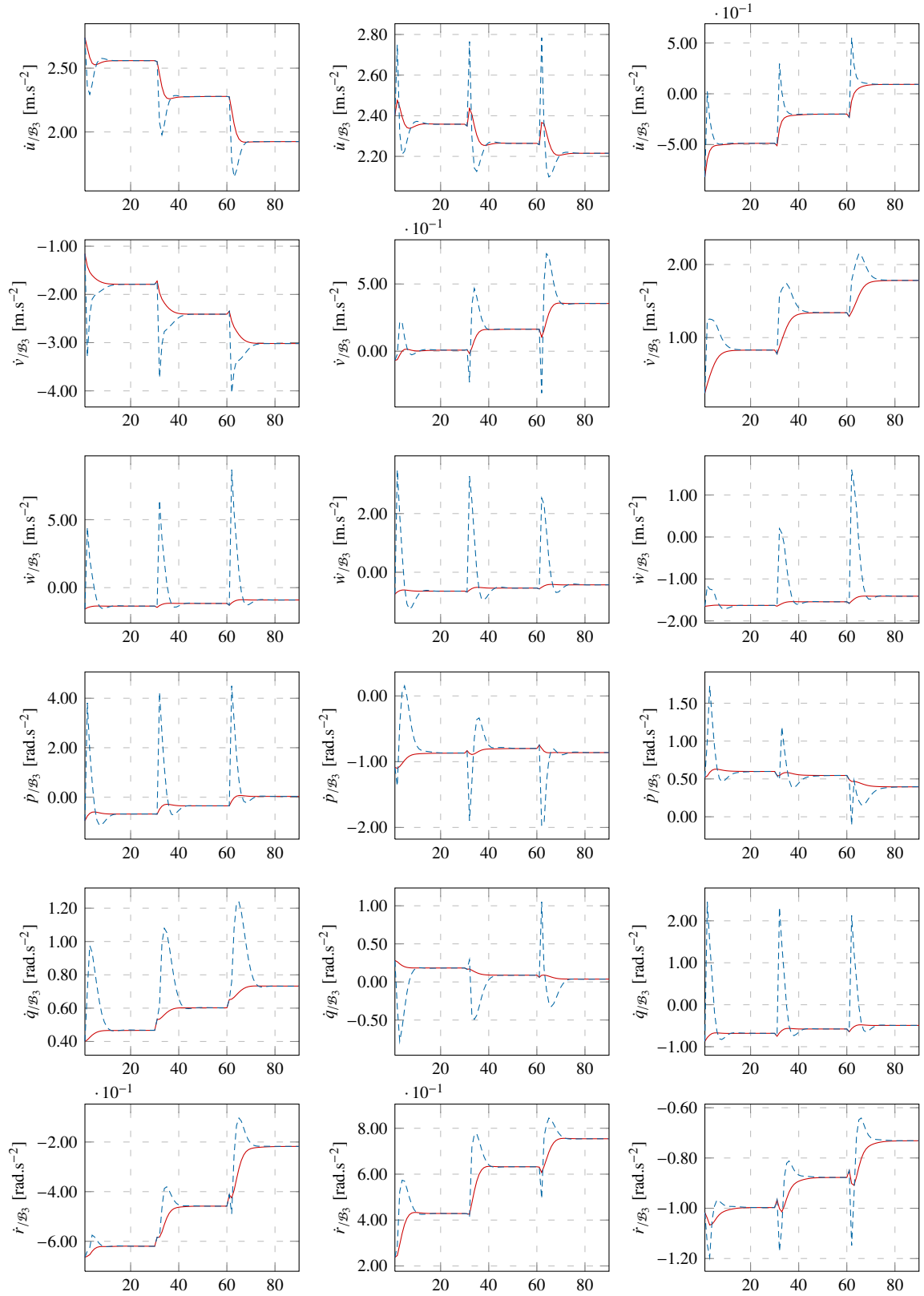
**Figure E.4.8 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps : —  $\Delta t = 0.002$  s, ---  $\Delta t = 0.005$  s, .....  $\Delta t = 0.010$  s et -○-  $\Delta t = 0.025$  s



**Figure E.4.9 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps : —  $\Delta t = 0.002$  s, ---  $\Delta t = 0.005$  s, .....  $\Delta t = 0.010$  s et -○-  $\Delta t = 0.025$  s

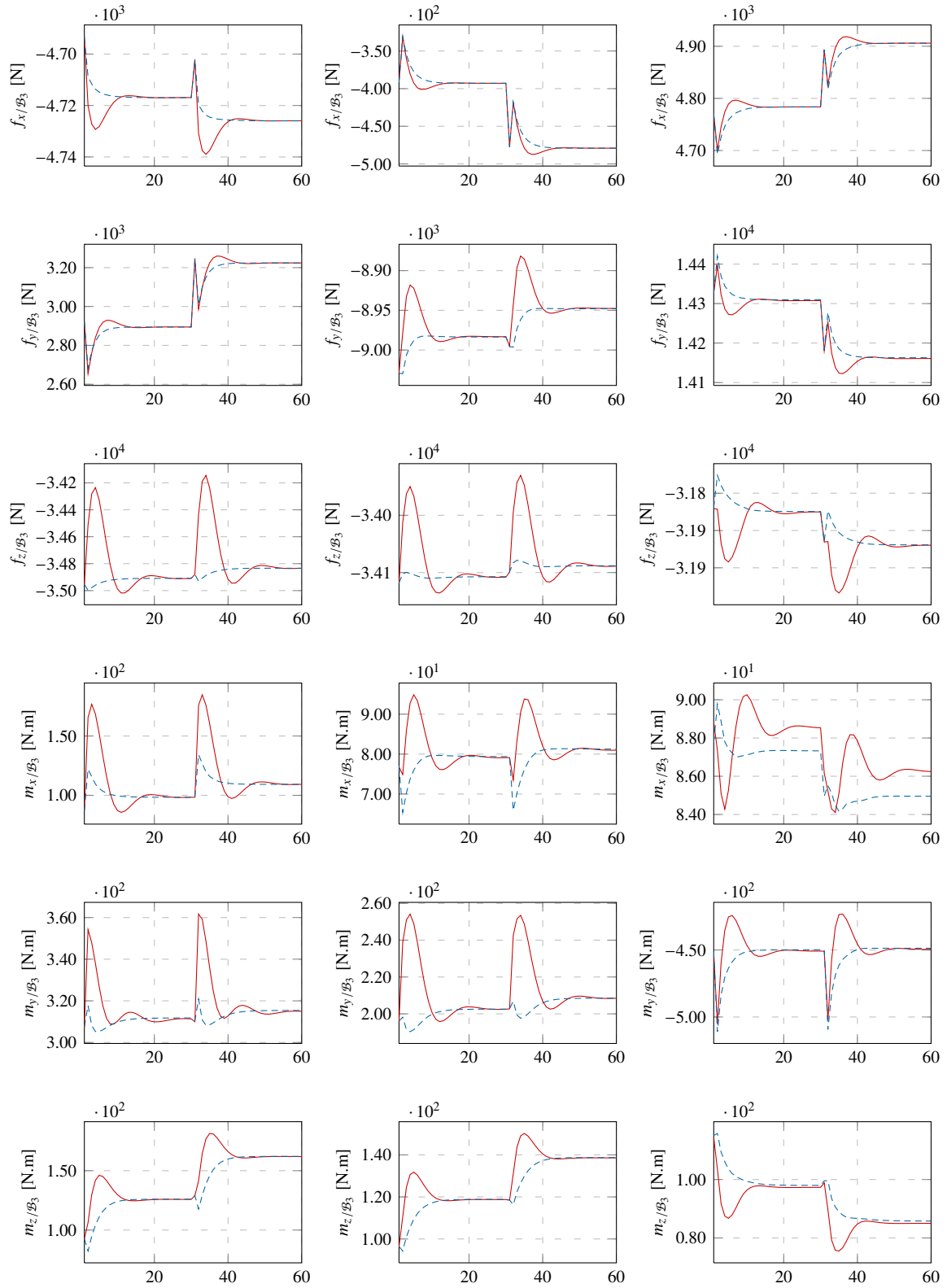


**Figure E.4.10 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Accélération en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.002$  s : --- accélérations calculée et — accélérations relaxée

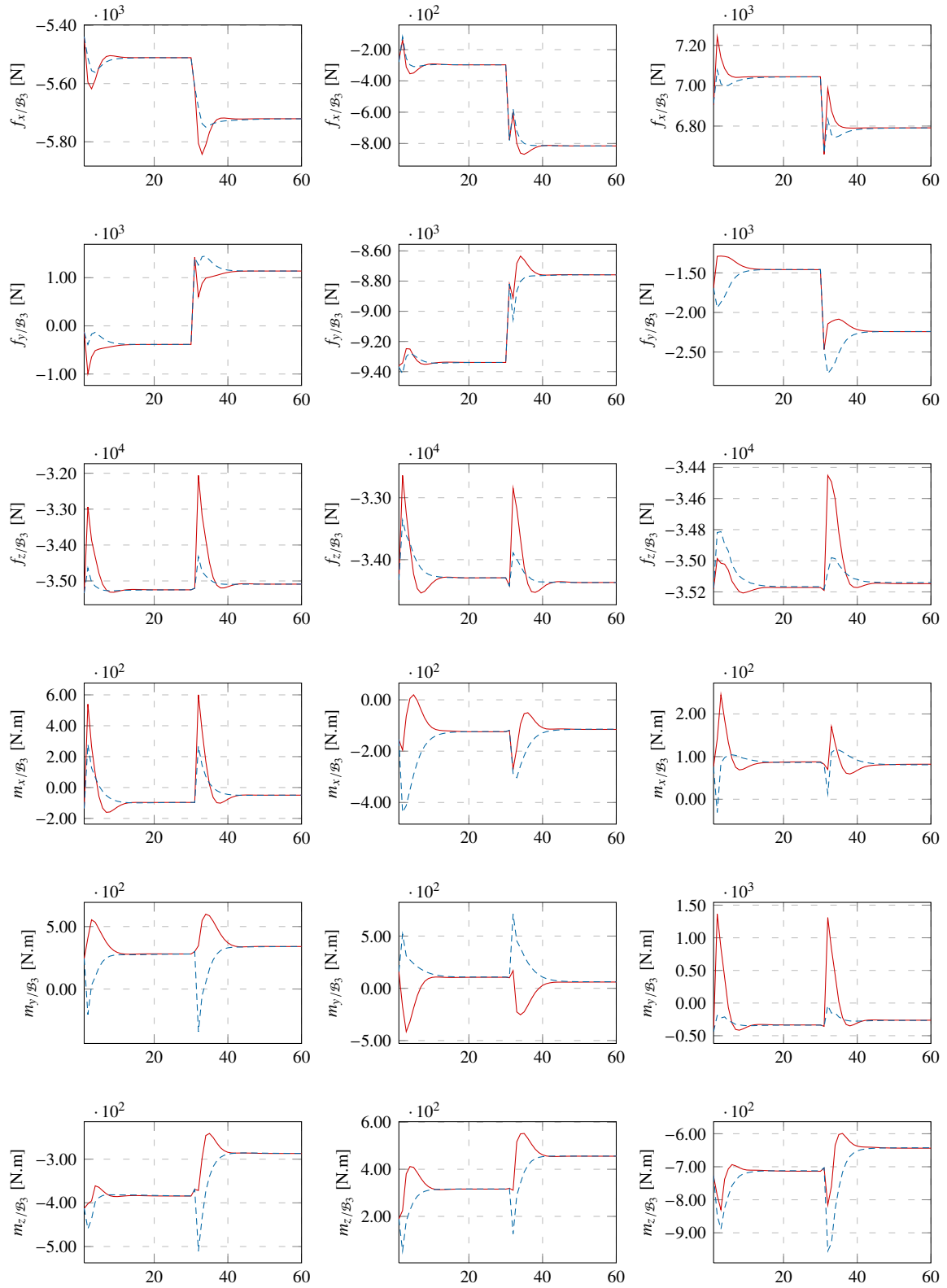


**Figure E.4.11 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Accélération en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.050$  s : --- accélération calculée et — accélération relaxée

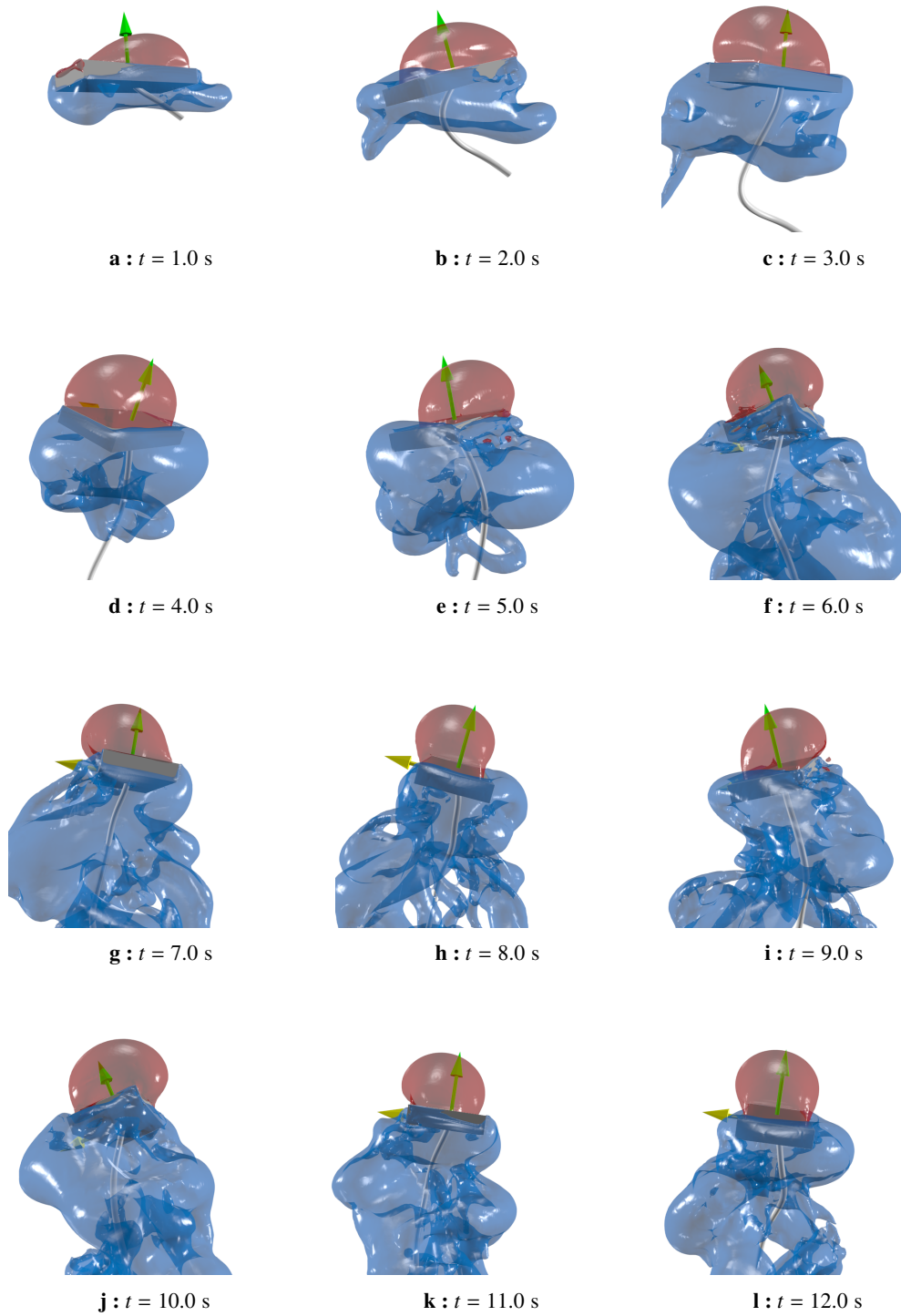




**Figure E.4.12 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Effort fluide en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.010$  s : --- mouvement imposé et — mouvement calculé



**Figure E.4.13 :** Parallélépipèdes – Cas 1 – Effort fluide en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.050$  s : --- mouvement imposé et — mouvement calculé



**Figure E.4.14** : Parallélépipèdes – Cas 1 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $\Delta t = 0.025$  s

### E.4.5 Parallélépipèdes 2

Les résultats et analyses des parallélépipèdes de type 2 (parallélépipèdes dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de volume) sont présentés dans cette section. Lors de cette étude, les mêmes pas de temps que précédemment sont testés :  $\Delta t = 0.002$  s,  $\Delta t = 0.005$  s,  $\Delta t = 0.010$  s,  $\Delta t = 0.025$  s et  $\Delta t = 0.050$  s. Pour la plus faible des densités équivalentes utilisées ( $d_e = 0.1$ ), les simulations utilisant le pas de temps le plus élevé ne convergent pas. Dans tous les autres cas, les simulations ne divergent pas durant les 15 s de temps physique simulé.

Dans un premier temps, les trajectoires et orientations des différents cas sont présentées à la figure E.4.16. Le comportement des parallélépipèdes dépend fortement de la densité équivalente utilisée. En effet, plus cette densité équivalente est grande, plus le degré de liberté en cavement s'oriente naturellement avec la verticale du fait du décalage imposé entre le centre de gravité et le centre de volume des parallélépipèdes. Ces situations se retrouvent pour  $d_e = 0.5$  et  $d_e = 0.7$ . Au contraire, lorsque la densité équivalente est faible ( $d_e = 0.1$  et  $d_e = 0.2$ ), un mouvement de type « feuille morte ascendante » est de nouveau observé. Lorsque cette dernière est égale à  $d = 0.3$ , une dynamique intermédiaire est obtenue. Dans tous les cas, les écoulements restent instationnaires du fait de la présence de nombreux détachements tourbillonnaires. La visualisation des iso-surfaces de pression dynamique à plusieurs instants (cf. figures E.4.17 à E.4.21 p. 262) permet de nouveau d'appréhender le caractère instationnaire de l'écoulement.

Dans un deuxième temps, la position, les angles de Cardan et les vitesses correspondantes sont présentées de la figures E.4.23 à E.4.28. Les simulations correspondantes utilisent un pas de temps égal à  $\Delta t = 0.025$  s mais des résultats aux caractéristiques identiques sont obtenus pour les autres pas de temps. Lors des 10 premières secondes, il y a peu de différence entre les situations *a*, *b* et *c*. Au-delà, les cinématiques évaluées par les simulations de type *b*, et dans une moindre mesure les simulations de type *c*, se différencient des cinématiques de référence (type *a*). Ces 10 premières secondes représentent 200 pas de temps lorsque  $\Delta t = 0.050$  s et 1000 pas de temps lorsque  $\Delta t = 0.010$  s. De manière identique au cas du parallélépipède de type 1, les différences observées peuvent résulter de l'accumulation de faibles erreurs lors du processus de résolution temporelle. Cependant, à la vue de la forte complexité de l'écoulement et de son caractère fortement instationnaire, les cinématiques obtenues restent globalement cohérentes entre elles. Il est également possible de remarquer que le processus de convergence vers la solution est fortement lié aux coefficients diagonaux de l'opérateur de relaxation des accélérations. Effectivement, les simulations utilisant des coefficients diagonaux identiques (situations de type *a* et *c*) fournissent des résultats proches sur les 15 secondes de temps simulé. Au contraire, lorsque ces coefficients diagonaux diffèrent (situations de type *b*), les différences apparaissent plus rapidement. Finalement, il est nécessaire de préciser que les pics de vitesse angulaire observés lorsque la densité équivalente est égale à  $d = 0.5$  ou  $d = 0.7$  sont dus à la conversion du vecteur de rotation instantanée (vecteur utilisé lors de la résolution) vers les vitesses des angles de Cardan<sup>13</sup> utilisées pour le post-traitement, et non pas à une mauvaise résolution du problème.

Dans un troisième temps, la comparaison des accélérations calculées et relaxées des degrés de liberté est réalisée. Il a été observé que plus le pas de temps utilisé est élevé plus les accélérations calculées (et par conséquent les accélérations relaxées) présentent de forts pics d'accélération au début de chaque pas de temps. À la première itération de couplage, les amplitudes de ces pics ne dépendent pas de l'opérateur de relaxation puisqu'une prédiction de la cinématique identique est utilisée. La définition de l'opérateur de relaxation influence donc uniquement les itérations suivantes.

Dans un quatrième temps, le nombre d'itérations moyen pour atteindre le critère de convergence est fourni aux tableaux E.4.11 et E.4.10. L'analyse de ces derniers peut se réaliser en deux parties. Premièrement, seules les simulations où la densité équivalente est supérieure ou égale à 0.3 sont considérées (cf. tableau E.4.10 p. 257). Dans ces situations, plusieurs résultats logiques et attendus sont obtenus. En effet, plus le pas de temps est faible, plus le nombre d'itérations pour atteindre le critère de convergence est faible à l'exception du mouvement de roulis lorsque  $d_e = 0.3$ . Le lien entre le pas de temps et les variations initiales des accélérations, lien qui a été explicité à la section précédente, permet de justifier ce résultat. L'exception précédemment citée peut également s'expliquer par le fait que la dynamique du parallélépipède dépend fortement du pas de temps utilisé dans ce cas précis (cf. figure E.4.15 p. 258). Lorsque des densités différentes sont utilisées, la dynamique du parallélépipède ne dépend pas de manière aussi conséquente du pas de temps utilisé. De plus, lorsque les degrés de liberté sont découplés vis-à-vis de l'effet de masse ajoutée (degré de liberté en cavement et en roulis), les

13. Il existe une singularité lorsque l'angle de tangage  $\theta$  se rapproche de  $\pm\pi/2$  (cf. annexe G.1.2 p. 323).

diagonalisations de la matrice de masse ajoutée artificielle ou de l'opérateur de relaxation n'ont logiquement aucune influence sur ce nombre d'itérations. Lorsque les degrés de liberté sont couplés par les effets de masse ajoutée (degrés de liberté en embardée, pilonnement, tangage et lacet) la prise en compte de la totalité des termes dans l'évaluation de l'opérateur de relaxation (situations de type *a*) donne de meilleurs résultats en matière de vitesse de convergence. Les moins bons résultats sont obtenus lorsque la matrice de masse ajoutée artificielle est diagonalisée (situations de type *b*). Lorsque l'opérateur de relaxation est diagonalisé après-coup (situations *c*), des résultats intermédiaires sont obtenus. La comparaison des accélérations relaxées à différents instants va également dans le sens de ces observations (cf. figures E.4.30 p. 267 à E.4.31 p. 268). Lorsque aucune diagonalisation de l'opérateur de relaxation n'est réalisée, les accélérations relaxées des degrés de liberté couplés présentent moins d'oscillations que dans les autres cas. En outre, et toujours dans ce cas, les accélérations relaxées présentent généralement un comportement de convergence propre qu'on peut qualifier de pseudo-amortie, comportement observé lors de l'étude du parallélépipède de type 1. En première conclusion, l'utilisation de la totalité des termes lors de l'évaluation de l'opérateur de relaxation est bénéfique ici lorsque la densité équivalente est supérieure ou égale à 0.3.

Au contraire, l'utilisation de la totalité des termes dans l'évaluation de l'opérateur de relaxation des accélérations n'est pas toujours bénéfique lorsque la densité équivalente est inférieure ou égale à 0.2 (cf. tableau E.4.11 p. 258). Lorsque de grands pas de temps sont utilisés, de meilleures propriétés de convergence sont observées pour les situations *c*, c.-à-d. lorsque l'opérateur de relaxation est diagonalisé après-coup et non plus pour les situations *a* comme auparavant. Dans ces situations, le nombre d'itérations nécessaires pour que les degrés de liberté couplés atteignent le critère de convergence croît de façon anormale (par rapport aux degrés de liberté) avec une augmentation du pas de temps. Plus précisément, ce sont les degrés de liberté dont le coefficient extra-diagonal de l'opérateur de relaxation des accélérations ne domine pas le coefficient diagonal correspondant, c.-à-d. les degrés de liberté en embardée, en pilonnement et en tangage, qui posent principalement problème. Le degré de liberté couplé restant, c.-à-d. celui qui converge plus rapidement dans les situations *a* que *c*, est celui de lacet (cf. tableau E.4.4 p. 242). Il est également important de remarquer que ce phénomène dépend du pas de temps utilisé puisque, lorsque la densité équivalente est égale à 0.2 et qu'un pas de temps faible ( $\Delta t = 0.010$  s) est utilisé, le nombre d'itérations pour atteindre le critère de convergence devient plus cohérent.

Ainsi, cette dégradation des performances de l'algorithme de couplage n'intervient que lorsque certains degrés de liberté sont couplés car de bonnes propriétés de convergence sont observées lorsque l'opérateur de relaxation est naturellement diagonalisé (cas du parallélépipède 1). Elle intervient uniquement lorsque les effets de masse ajoutée sont particulièrement forts (cf. tableau E.4.6 p. 243), lorsque le pas de temps utilisé est élevé par rapport à la situation étudiée et lorsque le coefficient extra-diagonal de l'opérateur de relaxation du degré considéré n'est pas dominé par le coefficient diagonal. De surcroît, ce n'est pas la valeur des coefficients de relaxation qui est à remettre en cause car une simple diagonalisation de l'opérateur de relaxation permet de s'affranchir du problème (situations *c*). Seul le couplage entre certains degrés de liberté doit donc être discuté. La figure E.4.22 présente un pas de temps où les accélérations en pilonnement et en tangage (degrés de liberté couplés) ne convergent pas lorsque aucune diagonalisation n'est réalisée. Cette figure met en évidence le fait que les accélérations calculées (celles qui dépendent directement des efforts fluides) ne convergent pas au bout de 30 itérations de couplage, et ceci malgré des accélérations relaxées moins oscillantes (cf. figures E.4.22 p. 262 et E.4.29 p. 266). Le couplage entre ces degrés de liberté explique ce phénomène puisque, quand l'opérateur est diagonalisé (situations *c*), ces accélérations (et donc par déduction les efforts fluides) convergent avant les 30 itérations. Comme les coefficients diagonaux ne dominent pas clairement les coefficients extra-diagonaux, les deux degrés de liberté s'influencent fortement l'un et l'autre et s'empêchent mutuellement de converger. Avant de conclure, il est important de remarquer que le cas proposé est particulièrement difficile à résoudre lorsque le solveur fluide est utilisé en tant qu'un opérateur de Steklov-Poincaré linéarisé, car les accélérations calculées après la première évaluation des efforts fluides sont très éloignées de la solution finale (cf. figure E.4.22 p. 262). Effectivement, comme les inerties sont très faibles, un simple saut numérique au niveau des efforts fluides provoque des variations d'accélération importantes.

Enfin, quelques simulations en mouvement imposé sont réalisées pour vérifier qualitativement les propriétés de convergence de l'algorithme de couplage. Les mêmes conclusions que celles faites dans le cas du parallélépipède 1 peuvent de nouveau s'appliquer ici.

Il est important d'ajouter que ce cas d'application numérique permet principalement de donner des tendances sur les propriétés de l'algorithme de couplage. Ainsi, il est impossible d'affirmer que l'utilisation de la totalité des termes dans l'évaluation de l'opérateur de relaxation permet de diminuer de 2 ou 3 les itérations nécessaires pour atteindre un critère de convergence car cela dépend très fortement des paramètres numériques et de la

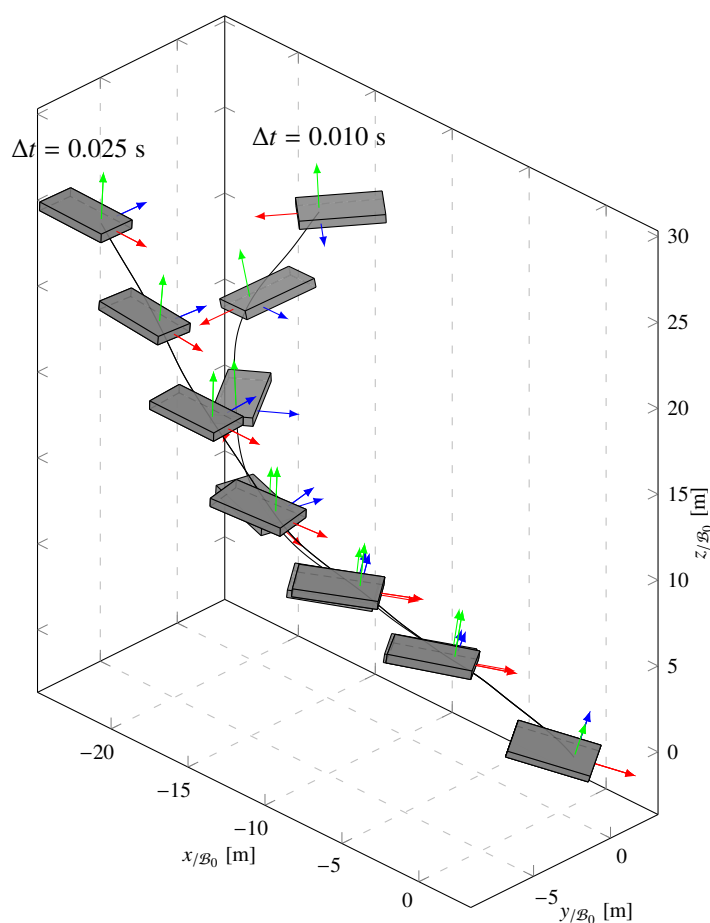
physique du cas étudié. De plus, si gagner 1 par pas de temps semble anecdotique par rapport aux 15 itérations souvent nécessaires, il ne faut pas oublier que ce type de gain est loin d'être négligeable lorsque des simulations beaucoup plus complexes et longues sont réalisées.

$d_e$	$\Delta t$	cas	DDL découplés		DDL couplés				classement	tous
			$\dot{u}/\mathcal{B}_3$	$\dot{p}/\mathcal{B}_3$	$\dot{v}/\mathcal{B}_3$	$\dot{r}/\mathcal{B}_3$	$\dot{w}/\mathcal{B}_3$	$\dot{q}/\mathcal{B}_3$		
0.3	0.010	a	2.4	12.1	<b>3.7</b>	<b>2.1</b>	2.2	1.5	<b>1</b>	12.2
		b	2.3	12.2	4.0	2.9	2.8	1.9	3	12.4
		c	2.4	12.0	4.0	2.7	2.4	1.7	2	12.1
	0.025	a	3.7	10.2	4.3	<b>3.0</b>	<b>4.2</b>	<b>2.9</b>	<b>1</b>	10.3
		b	3.4	10.1	4.6	3.5	6.6	5.2	3	10.9
		c	3.7	10.1	4.4	3.4	4.9	3.9	2	10.4
	0.050	a	5.8	9.2	6.8	5.2	<b>6.4</b>	<b>5.2</b>	<b>1</b>	9.8
		b	5.9	9.1	7.0	5.4	11.4	9.7	3	12.7
		c	5.9	9.0	6.7	5.1	7.5	6.5	2	10.1
0.5	0.010	a	3.9	5.2	3.3	2.1	<b>6.0</b>	<b>4.4</b>	<b>1</b>	7.3
		b	4.1	5.3	3.3	2.0	9.7	8.9	3	10.6
		c	3.8	5.3	3.1	2.0	6.8	6.3	2	7.9
	0.025	a	6.1	7.3	5.2	3.6	<b>7.7</b>	<b>6.8</b>	<b>1</b>	9.0
		b	6.5	7.0	5.4	3.6	12.7	11.4	3	13.1
		c	6.2	7.2	<b>4.6</b>	<b>3.2</b>	8.7	7.9	2	9.6
	0.050	a	10.2	13.2	10.8	7.6	<b>11.9</b>	<b>10.1</b>	<b>1</b>	14.9
		b	10.0	13.7	11.1	7.8	18.0	15.8	3	19.4
		c	10.0	13.0	10.7	7.8	13.7	12.1	2	15.7
0.7	0.010	a	2.4	3.1	1.4	1.2	<b>4.3</b>	<b>3.4</b>	<b>1</b>	5.4
		b	2.5	3.2	1.8	1.3	6.6	5.2	3	7.4
		c	2.5	3.3	1.4	1.3	5.1	4.0	2	6.1
	0.025	a	3.8	5.3	2.9	2.1	<b>6.2</b>	<b>5.4</b>	<b>1</b>	7.3
		b	3.8	5.3	2.6	2.0	8.5	7.5	3	9.2
		c	3.9	5.1	2.7	2.0	7.4	6.8	2	8.1
	0.050	a	6.5	8.4	5.9	3.5	<b>8.5</b>	<b>7.5</b>	<b>1</b>	10.1
		b	6.2	8.3	5.4	3.3	11.7	10.6	3	12.6
		c	6.5	8.5	5.6	3.6	9.4	8.5	2	10.6

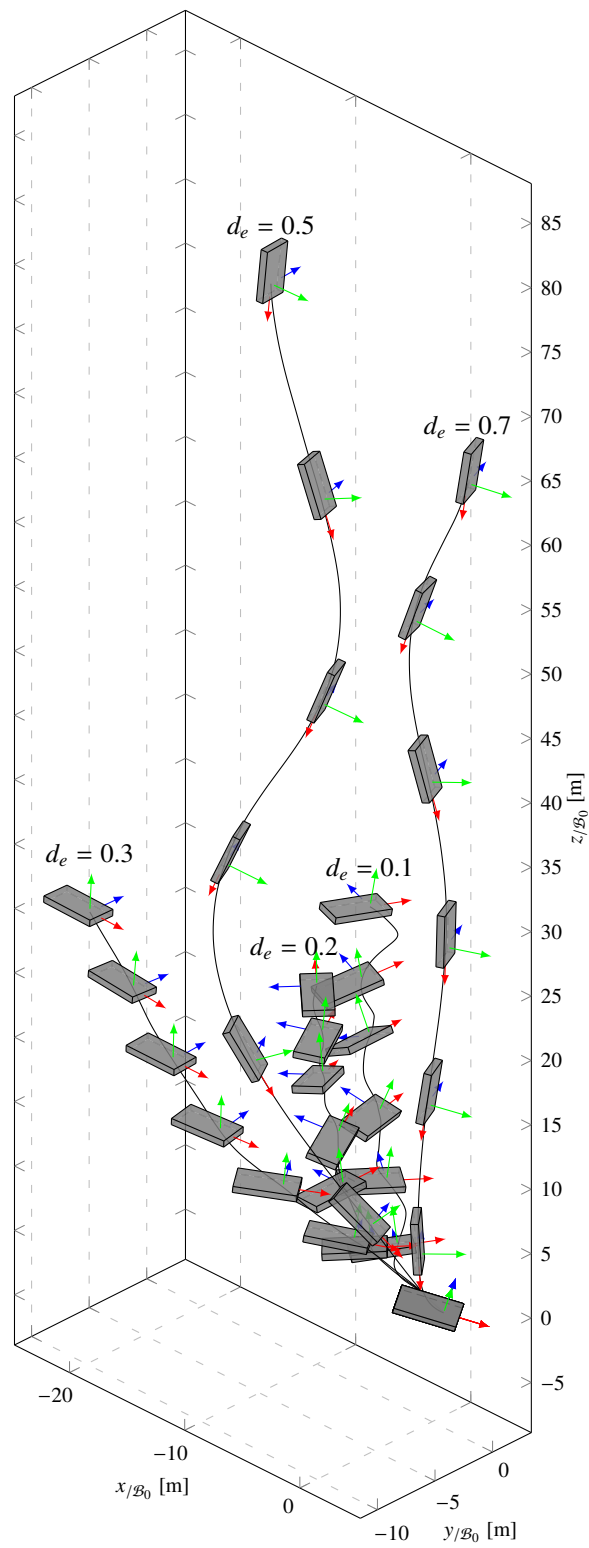
**Tableau E.4.10 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Nombres moyens d'itérations par pas de temps pour que le critère de convergence soit respecté –  $d_e = 0.3$ ,  $d_e = 0.5$  et  $d_e = 0.7$

$d_e$	$\Delta t$	cas	DDL découplés		DDL couplés				classement	tous
			$\dot{u}/\mathcal{B}_3$	$\dot{p}/\mathcal{B}_3$	$\dot{v}/\mathcal{B}_3$	$\dot{r}/\mathcal{B}_3$	$\dot{w}/\mathcal{B}_3$	$\dot{q}/\mathcal{B}_3$		
0.1	0.005	a	6.2	19.5	6.8	<b>4.3</b>	4.6	<b>2.3</b>	<b>1</b>	19.6
		b	6.2	19.6	<b>5.8</b>	6.3	4.5	3.6	2	19.7
		c	7.7	26.2	6.3	6.5	4.5	3.5	3	26.4
	0.010	a	8.7	26.6	9.5	<b>6.2</b>	14.1	6.0	3	27.0
		b	8.6	26.3	9.4	8.5	8.7	7.6	2	26.4
		c	8.7	26.6	<b>8.5</b>	7.9	<b>6.5</b>	6.0	<b>1</b>	26.7
	0.025	a	9.4	19.2	13.2	<b>9.4</b>	19.9	12.1	2	23.0
		b	9.5	18.3	12.5	11.8	15.4	16.2	3	21.8
		c	9.5	18.0	<b>11.6</b>	11.1	<b>8.9</b>	<b>8.2</b>	<b>1</b>	18.1
	0.010	a	6.9	15.0	6.5	<b>4.2</b>	5.2	<b>3.2</b>	<b>1</b>	15.1
		b	6.8	15.1	5.9	5.7	6.9	5.7	3	15.3
		c	6.9	14.9	5.8	5.2	5.2	4.4	2	14.9
0.2	0.025	a	6.8	15.8	9.2	<b>6.5</b>	10.1	<b>5.4</b>	2	16.6
		b	7.0	15.7	9.4	7.7	9.9	9.6	3	16.5
		c	6.7	15.9	9.1	7.4	<b>7.2</b>	5.9	<b>1</b>	15.9
	0.050	a	8.3	15.0	12.1	<b>8.6</b>	18.2	12.0	2	20.7
		b	7.9	14.5	11.2	10.8	13.4	16.7	3	20.2
		c	7.8	14.2	<b>10.8</b>	10.0	<b>8.5</b>	<b>7.9</b>	<b>1</b>	14.6

**Tableau E.4.11** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Nombres moyens d’itérations par pas de temps pour que le critère de convergence soit respecté –  $d_e = 0.1$  et  $d_e = 0.2$

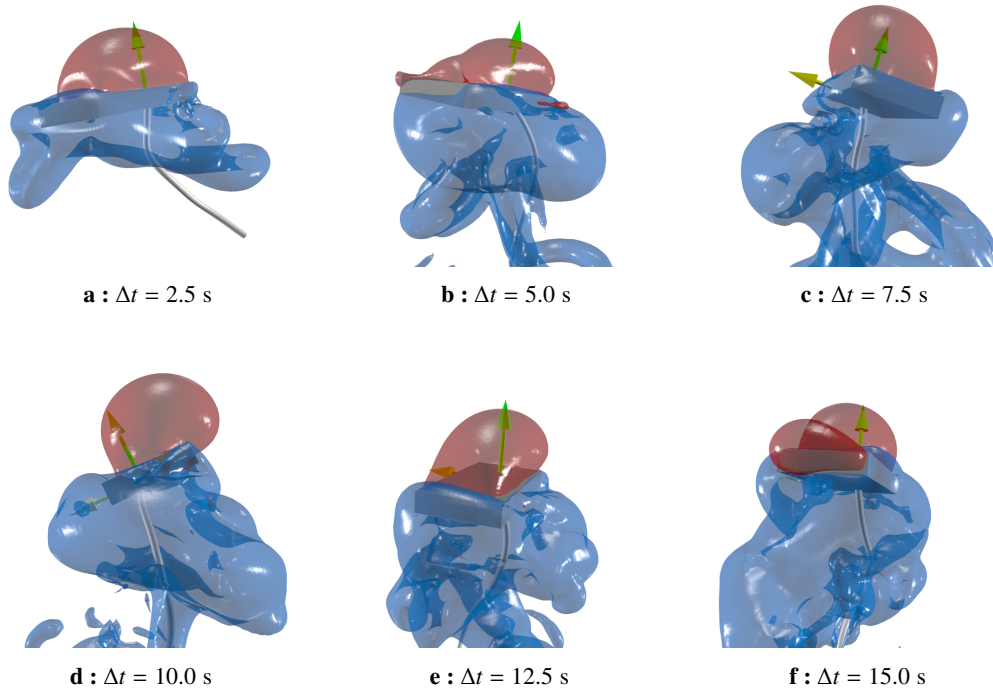


**Figure E.4.15** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Trajectoire et orientation pour deux pas de temps –  $d_e = 0.3$

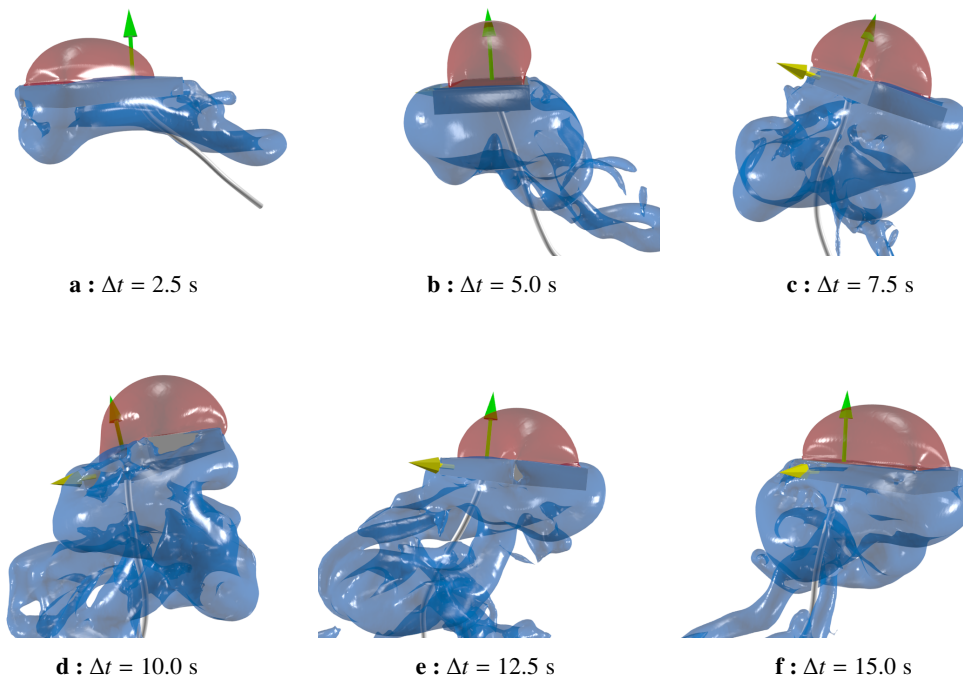


**Figure E.4.16 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Trajectoire et orientation pour différentes densités équivalentes –  $\Delta t = 0.025$  s

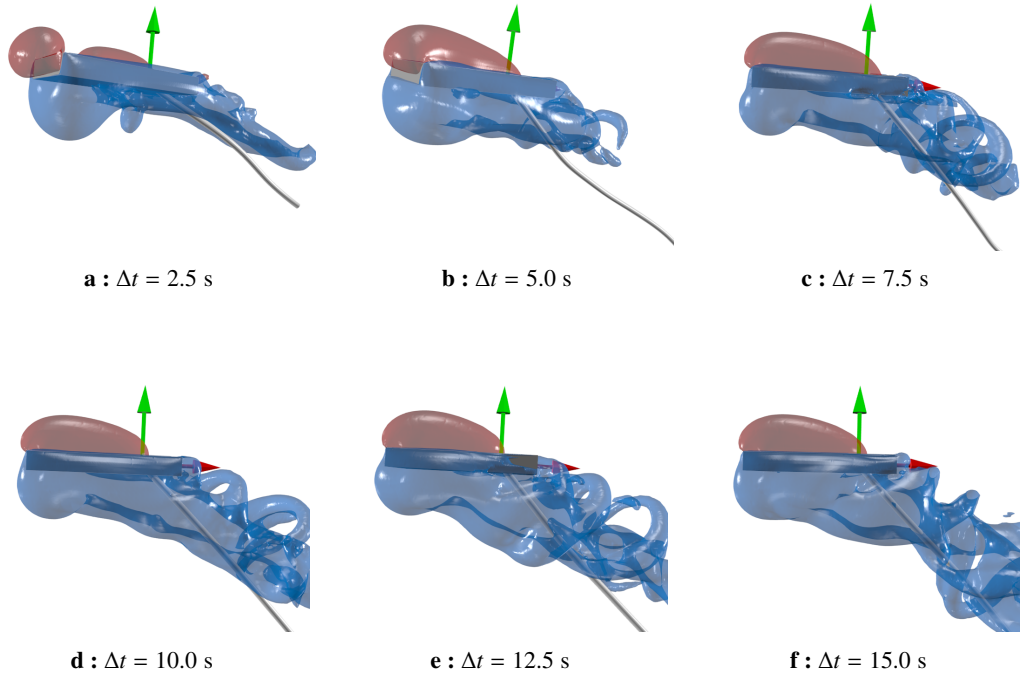




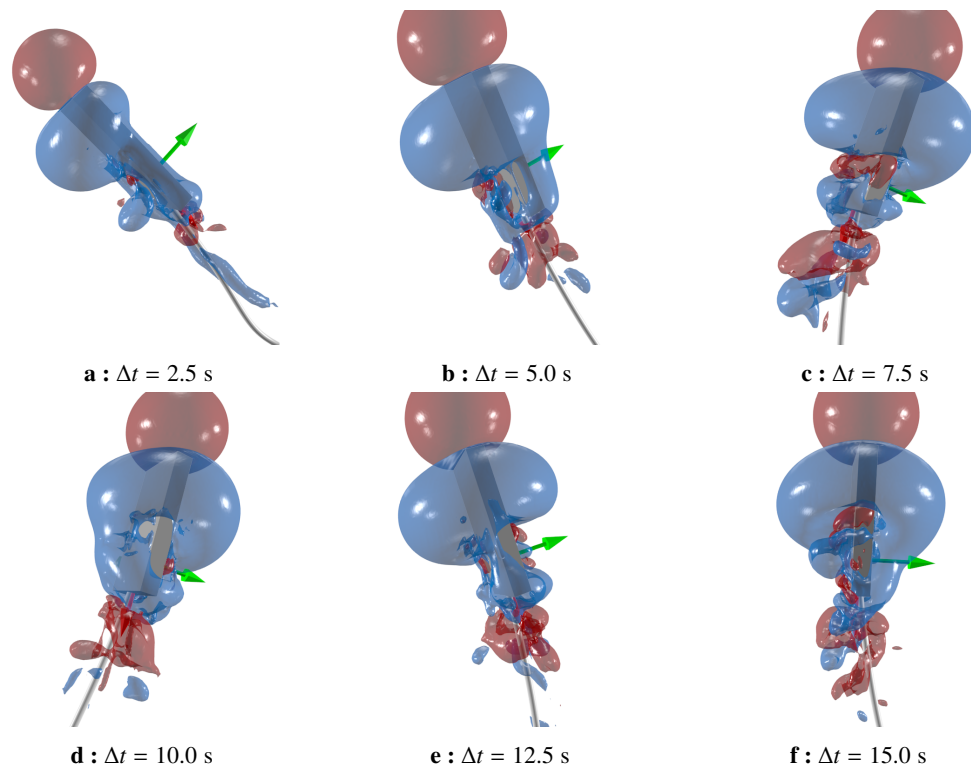
**Figure E.4.17** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $d_e = 0.1$



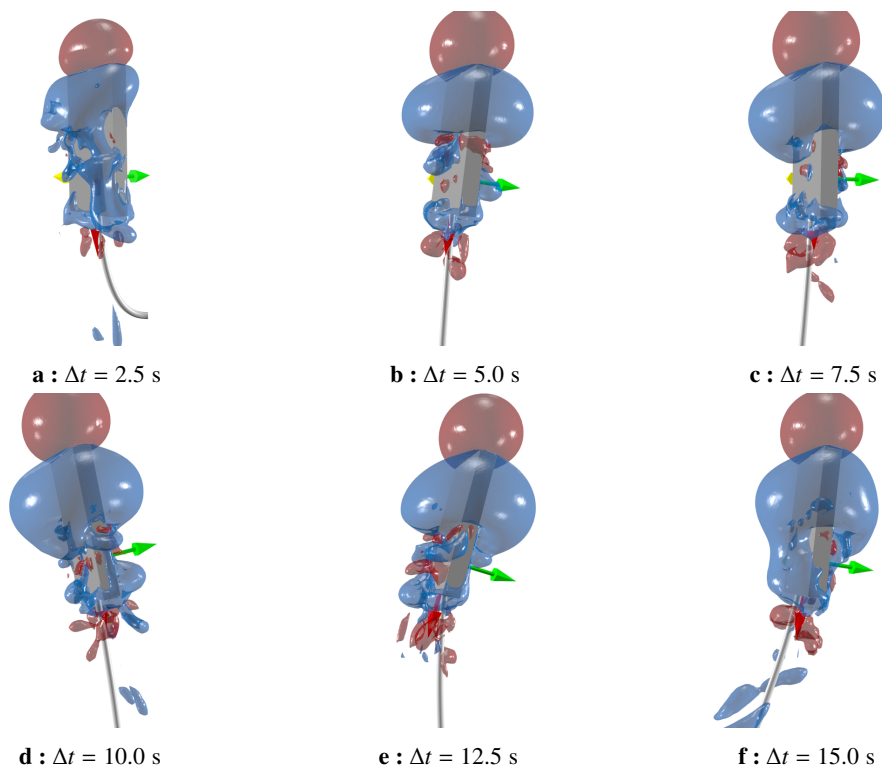
**Figure E.4.18** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $d_e = 0.2$



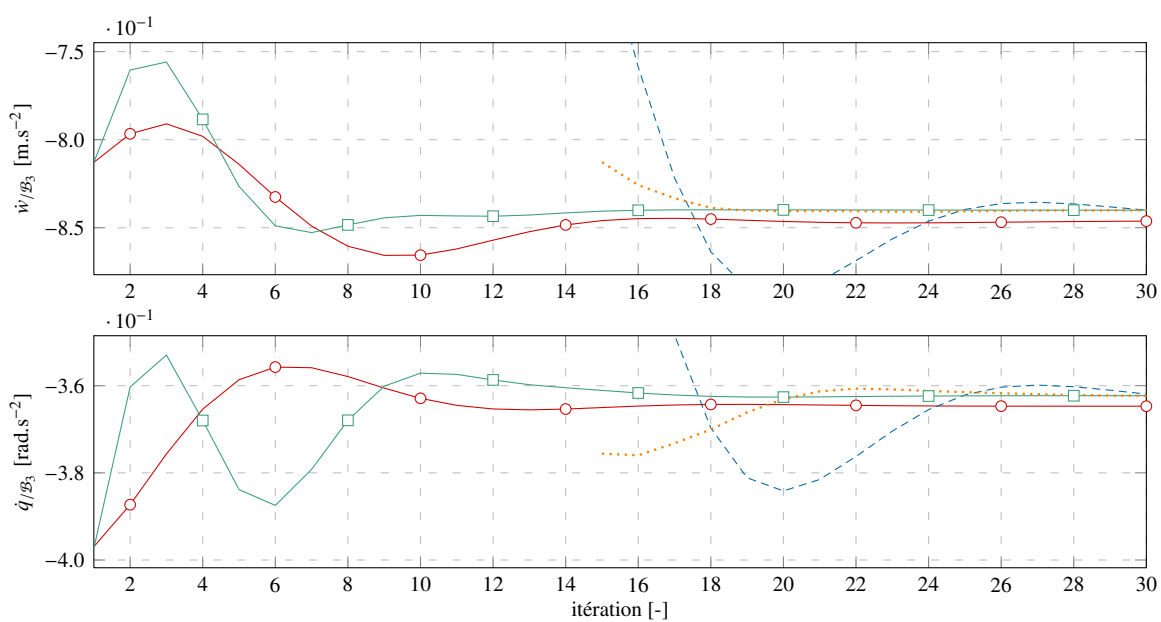
**Figure E.4.19** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $d_e = 0.3$



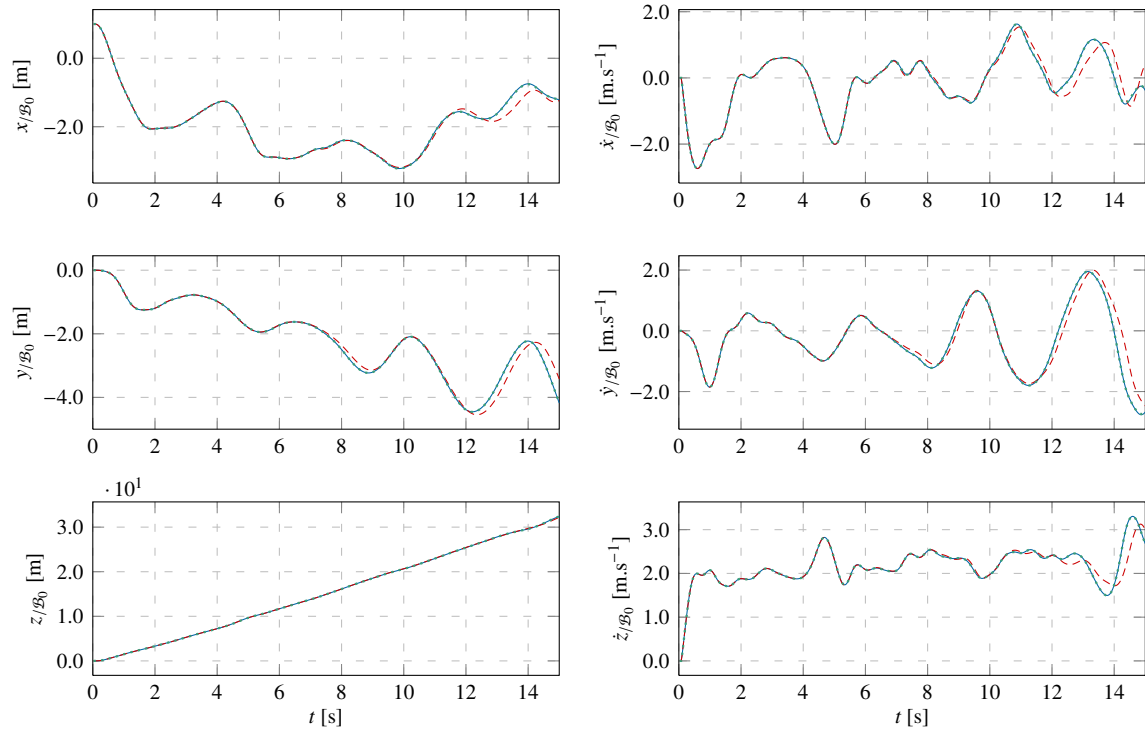
**Figure E.4.20** : Parallélépipèdes – Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $d_e = 0.5$



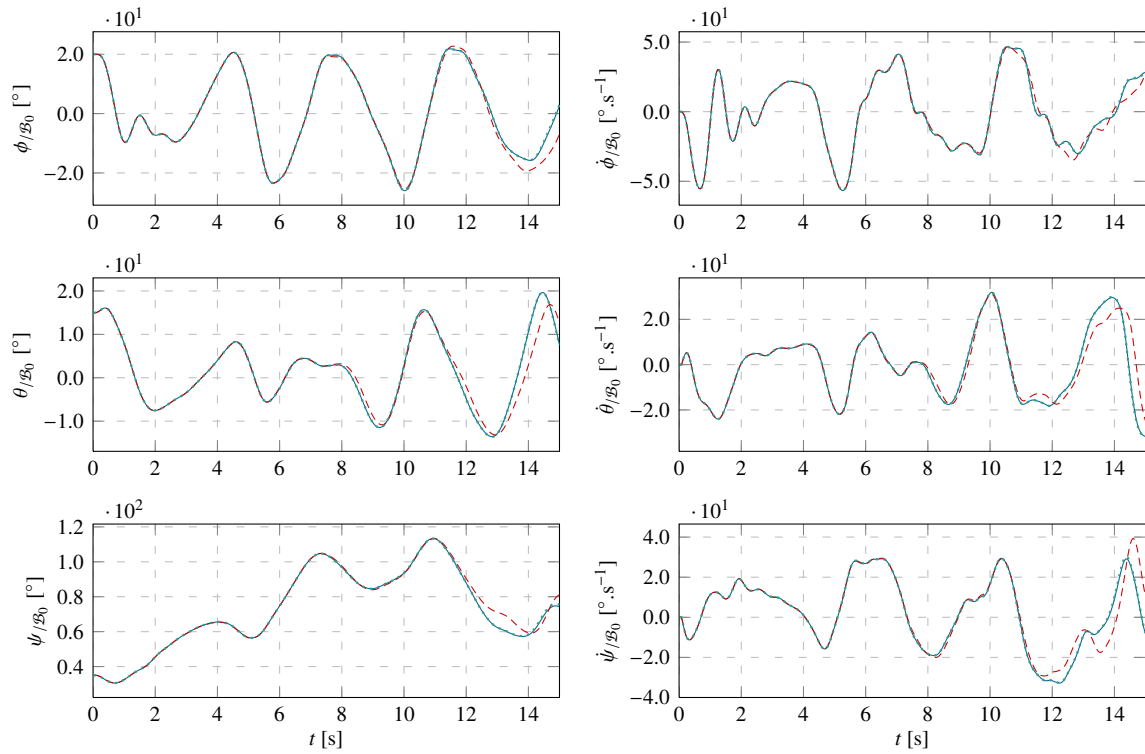
**Figure E.4.21 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique –  $p = -1000$  Pa (bleu) et  $p = 1000$  Pa (rouge) –  $d_e = 0.7$



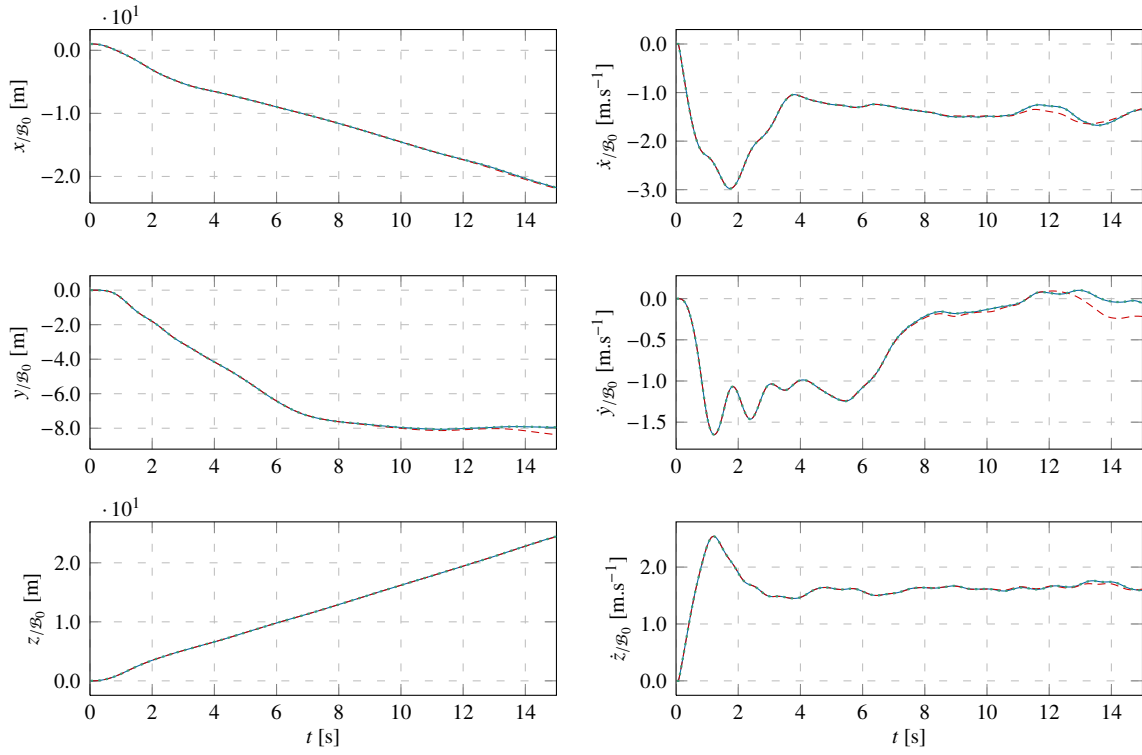
**Figure E.4.22 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Accélération en pilonnement et tangage –  $d_e = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  s –  $t = 8.25$  s : —○— accélération calculée cas a, —□— accélération calculée cas c, --- accélération relaxée cas a et ..... accélération relaxée cas c



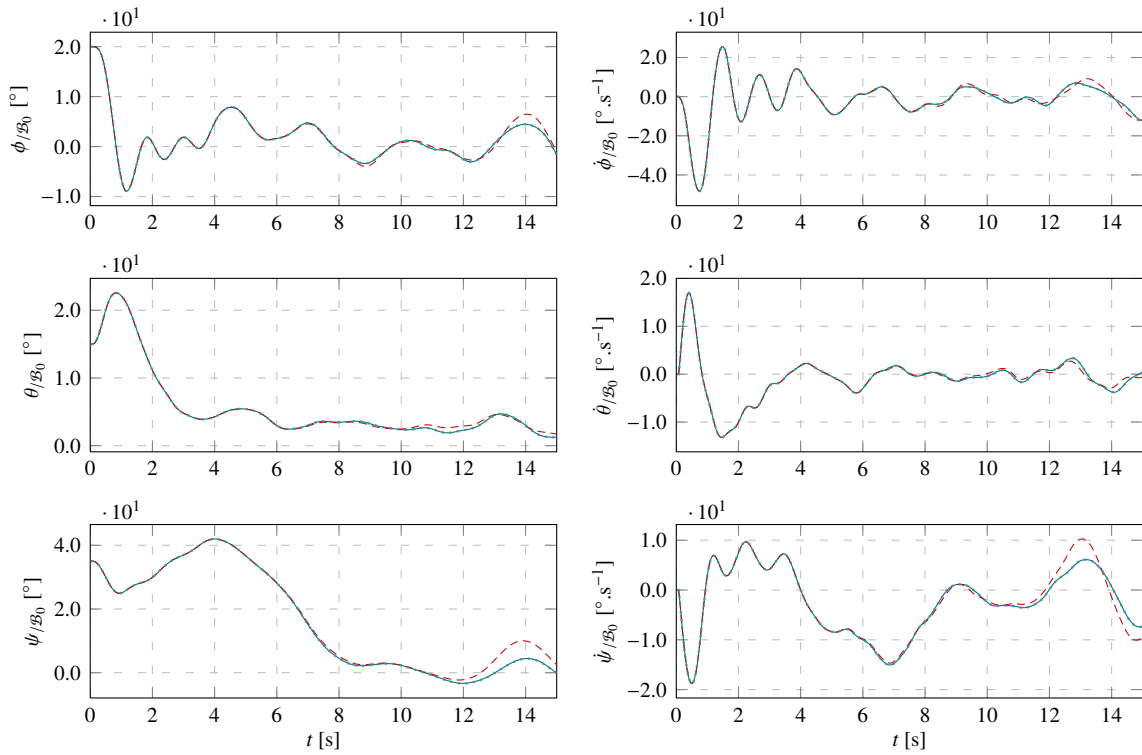
**Figure E.4.23 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps –  $d_e = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  s :  
 — cas a, - - - cas b et ..... cas c



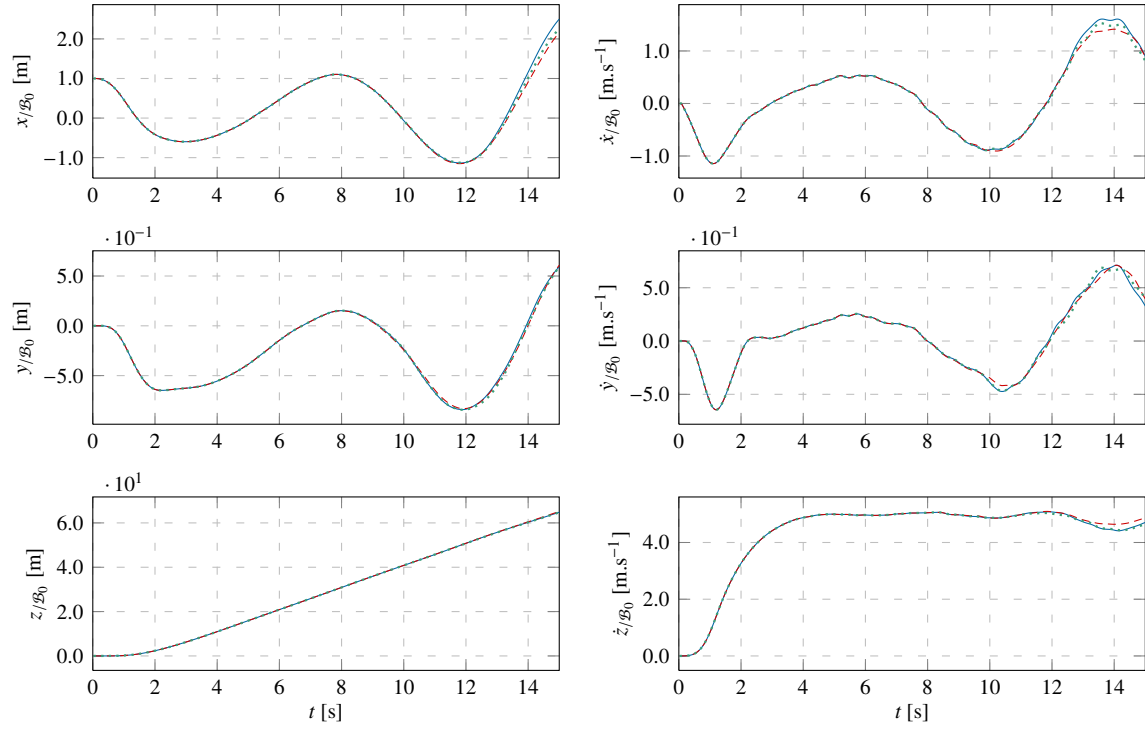
**Figure E.4.24 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps –  $d_e = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  s :  
 — cas a, - - - cas b et ..... cas c



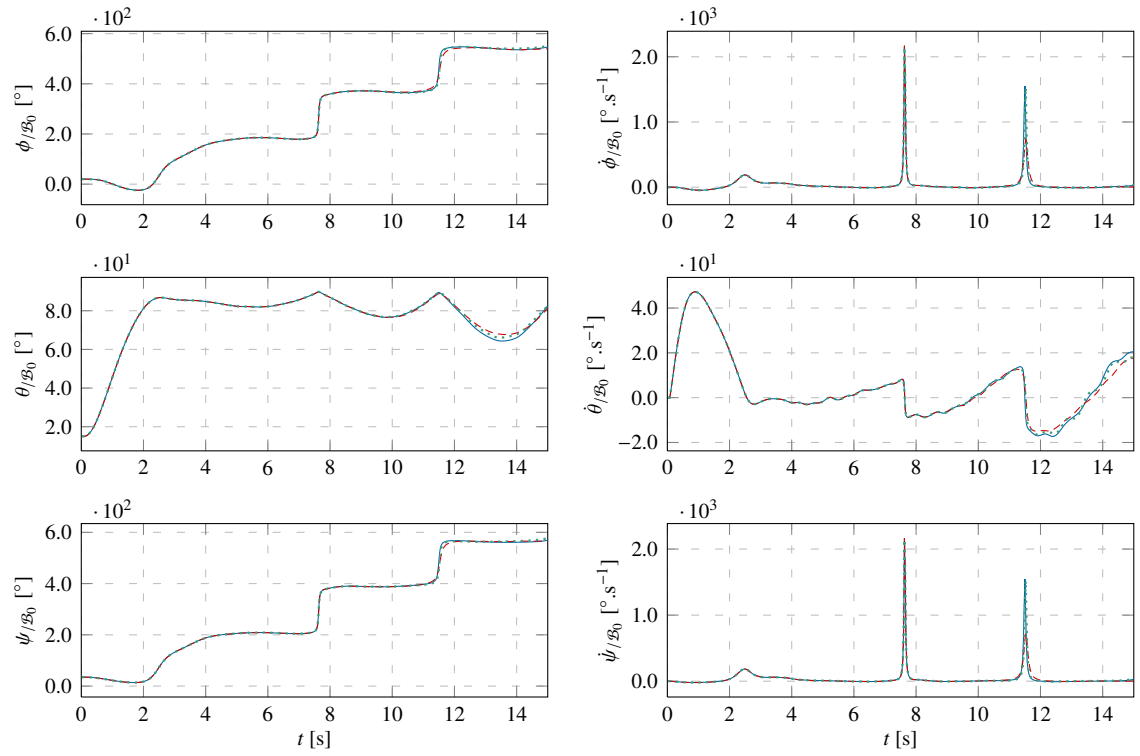
**Figure E.4.25 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps –  $d_e = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.025$  s : — cas a, - - - cas b et ... cas c



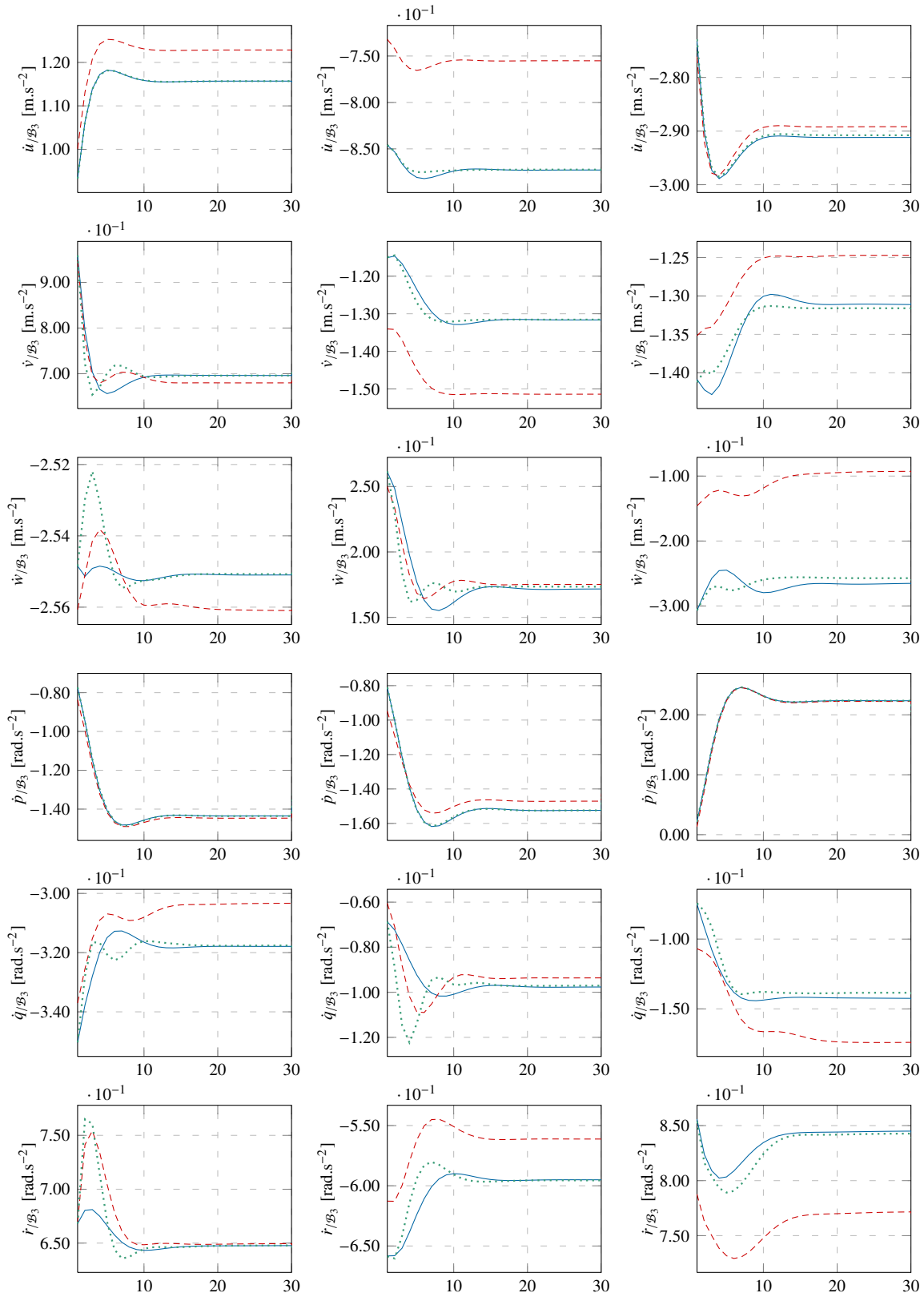
**Figure E.4.26 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps –  $d_e = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.025$  s : — cas a, - - - cas b et ... cas c



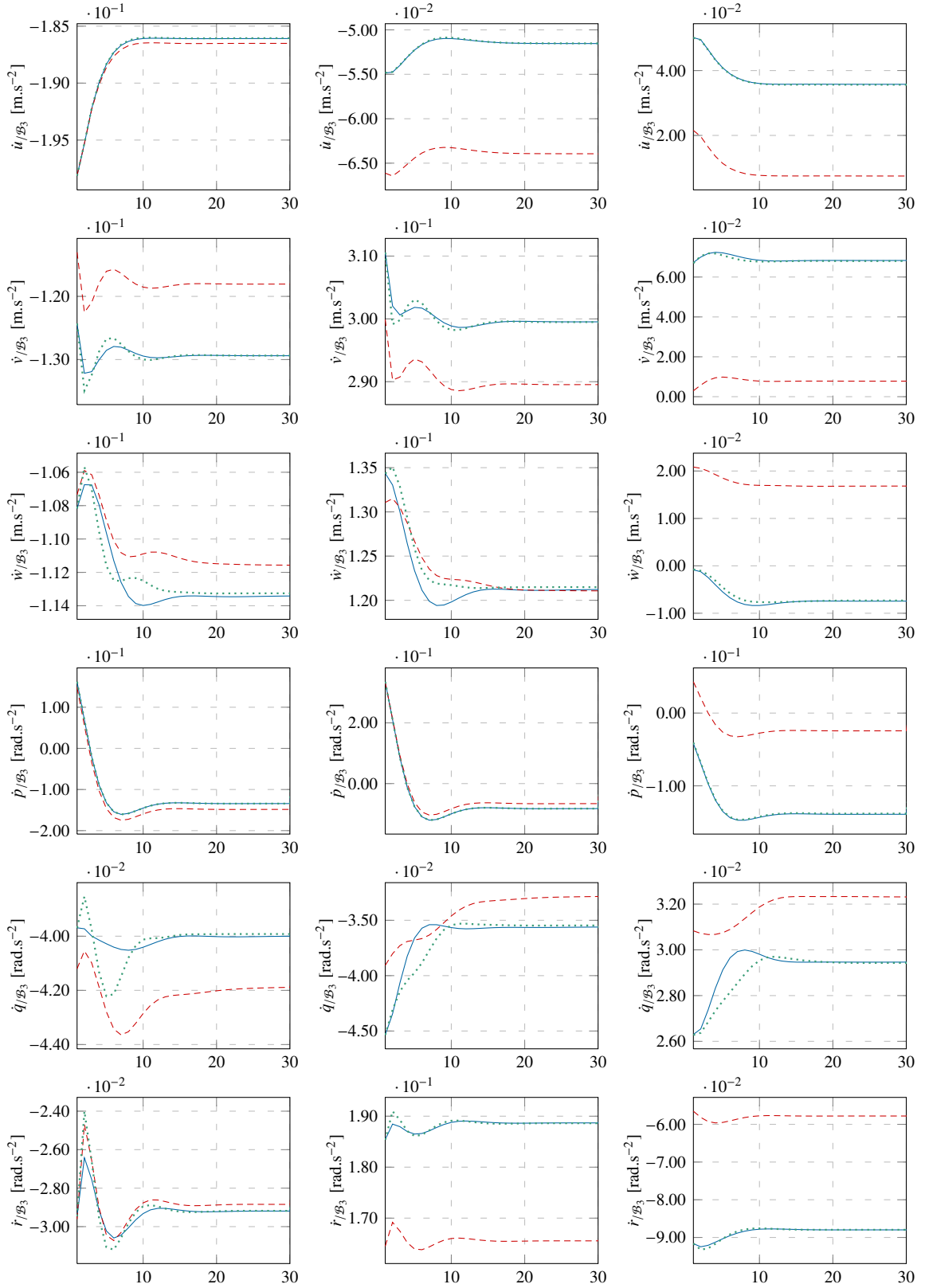
**Figure E.4.27 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps –  $d_e = 0.7$ ,  $\Delta t = 0.025$  s :  
 — cas a, - - - cas b et ..... cas c



**Figure E.4.28 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps –  $d_e = 0.7$ ,  $\Delta t = 0.025$  s :  
 — cas a, - - - cas b et ..... cas c

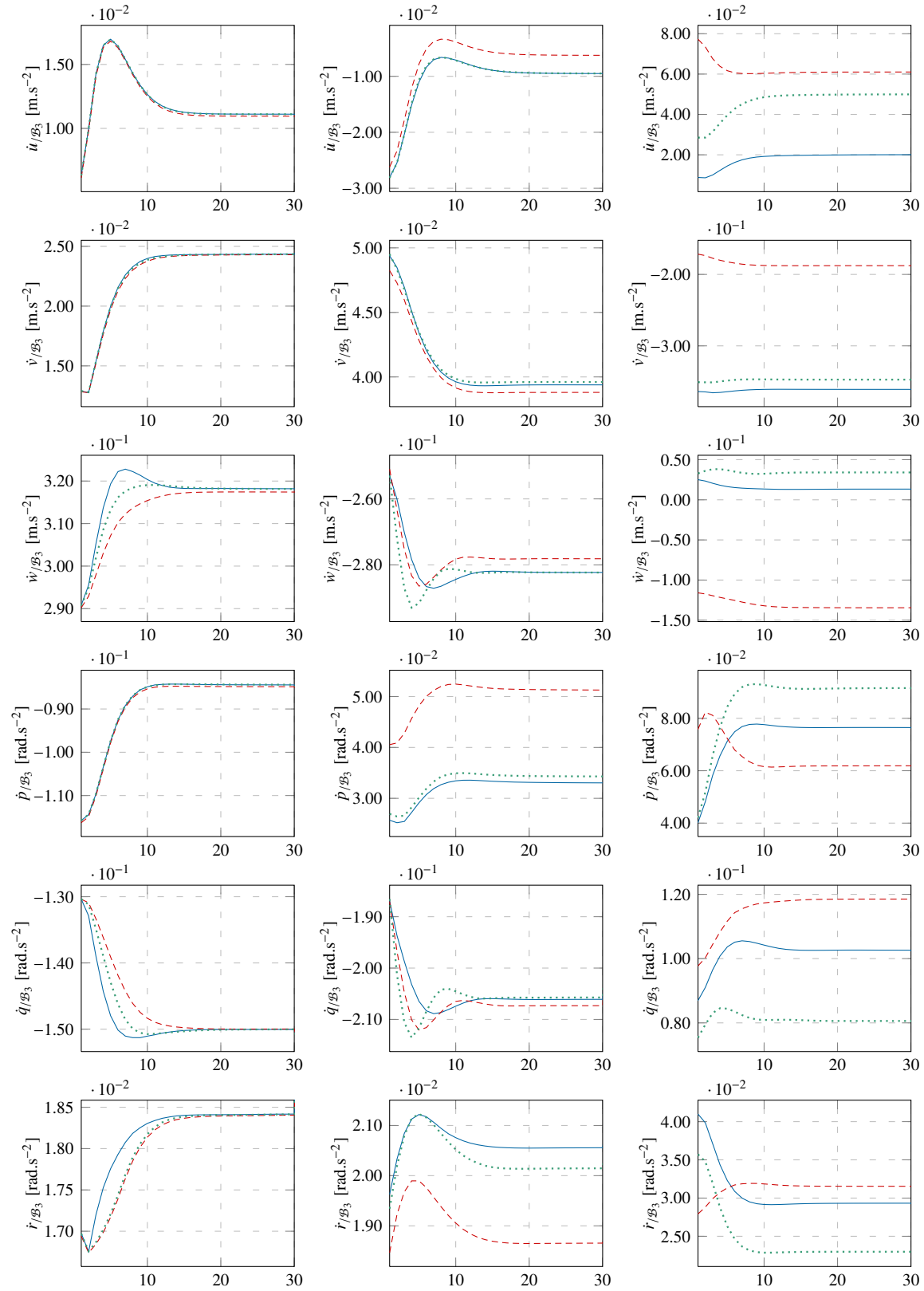


**Figure E.4.29 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Accélération relaxée en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.025$  s – Cas 2.1.a, 2.1.b et 2.1.c : — cas a, - - - cas b et ... cas c



**Figure E.4.30 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Accélération relaxée en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.025$  s – Cas 2.3.a, 2.3.b et 2.3.c : — cas a, - - - cas b et ... cas c





**Figure E.4.31 :** Parallélépipèdes – Cas 2 – Accélération relaxée en fonction des itérations –  $t = 5.0$  s (gauche),  $t = 7.5$  s (centre) et  $t = 10.0$  s (droite) –  $\Delta t = 0.025$  s – Cas 2.7.a, 2.7.b et 2.7.c : — cas a, - - - cas b et ... cas c

### E.4.6 Conclusion

Lors de cette étude, la caractérisation des propriétés de convergence de l'algorithme de couplage proposé a été réalisée sur un corps rigide à six degrés de liberté dont l'opérateur de relaxation des accélérations est naturellement diagonalisé (parallélépipède 1) ou bien présente des couplages plus ou moins forts entre certains degrés de liberté (parallélépipèdes 2). En outre, les cas étudiés ont la particularité d'être soumis à de très forts effets de masse ajoutée (effets déstabilisant pour un algorithme de couplage fluide-structure).

Dans un premier temps, la pertinence d'utiliser des coefficients de relaxation particulièrement faibles et anisotropes a été vérifiée. Les résultats obtenus en mouvement calculé ont également été comparés à des simulations en mouvement imposé. Ces simulations permettent d'affirmer que l'algorithme de couplage proposé possède des propriétés de convergence intéressantes puisque, malgré l'utilisation d'un opérateur de Steklov-Poincaré linéarisé pour le problème fluide, le nombre d'itérations pour résoudre le problème couplé est sensiblement identique lorsque le mouvement est inconnu et lorsqu'il est imposé. Il a également été montré que le nombre d'itérations pour atteindre la convergence ne dépend pas des effets de masse ajoutée mais uniquement et logiquement de la cinématique du corps considéré.

Dans un second temps, l'influence des termes extra-diagonaux de l'opérateur de relaxation a été étudiée. Il est important de remarquer que, sans ces termes extra-diagonaux, les degrés de liberté sont relaxés de façon découplée, ce qui simplifie l'implémentation de l'algorithme de couplage. La pertinence d'utiliser les termes extra-diagonaux doit donc être vérifiée pour éviter une complexification inutile de la méthode. Pour cela, deux diagonalisations différentes ont été étudiées en plus de la formulation théorique de l'opérateur de relaxation. La première consiste à ne prendre en compte que les termes diagonaux de la matrice de masse ajoutée artificielle dans l'évaluation de l'opérateur de relaxation. Cette diagonalisation représente le cas typiquement rencontré en ingénierie où les termes extra-diagonaux sont souvent inconnus ou ne peuvent facilement être évalués <sup>14</sup> (ce qui n'est pas le cas avec la méthode proposée). La deuxième diagonalisation est effectuée directement au niveau de l'opérateur de relaxation des accélérations. Cette diagonalisation est donc plus numérique que physique. À l'exception de certains cas explicités plus loin, de meilleures propriétés de convergence sont obtenues lorsque aucune diagonalisation n'est effectuée. L'utilisation de l'opérateur de relaxation théorique est donc pleinement justifiée dans la très grande majorité des cas rencontrés en hydrodynamique navale.

La diagonalisation de l'opérateur de relaxation des degrés de liberté devient nécessaire lorsque les conditions suivantes sont réunies : les effets de masse ajoutée sont importants (c.-à-d. lorsque les ratios entre les masses ajoutées et les inerties sont supérieurs à 5 environ), le pas de temps utilisé est élevé (dépend bien entendu de la situation considérée) et les coefficients diagonaux de l'opérateur de relaxation ne dominent pas clairement les coefficients extra-diagonaux. Dans ce cas, afin d'éviter des problèmes de convergence, il est préférable de diagonaliser l'opérateur de relaxation après son évaluation théorique (deuxième diagonalisation). L'utilisation d'une matrice de masse ajoutée artificielle diagonale (première diagonalisation) permet également de résoudre les problèmes de convergence mais la seconde diagonalisation donne de meilleurs résultats. Il est important de rappeler que les différentes conditions posant problème sont rarement rencontrées en hydrodynamique navale <sup>15</sup>. Néanmoins, ce cas reste intéressant pour la caractérisation de l'algorithme de couplage puisqu'il y a une forte anisotropie des effets de masse ajoutée et les couplages entre les degrés de liberté vis-à-vis de ces effets sont bien déterminés (pas de couplage entre 3 degrés de liberté par exemple).

De manière plus anecdotique, l'influence de la densité équivalente sur la cinématique de remontée d'un parallélépipède dont le centre de gravité est décalé par rapport à son centre de volume a été étudiée. Deux types de comportement bien distincts sont observés. Lorsque la densité équivalente est faible, un mouvement de type feuille morte ascendante est observé puisque le moment dû au décalage du centre de gravité n'est pas assez fort, compte tenu des effets hydrodynamiques, pour l'orienter verticalement. Dans le cas contraire, le parallélépipède s'oriente verticalement d'autant plus rapidement que sa densité équivalente est élevée et plus cette dernière est faible (mais au-dessus de la densité équivalente limite permettant la mise en place verticale du parallélépipède), plus la remontée sera rapide ( $d = 0.5$  ici).

14. Pour des formes simples ou des navires connus, il est possible d'estimer correctement les termes diagonaux mais rarement les termes extra-diagonaux.

15. Cela peut néanmoins se rencontrer dans le cas de leurres, de projectiles ou de flotteurs lancés par des sous-marins par exemple.

## E.5 Amortissement d'une frégate par ailerons actifs

### Liste des figures de l'application

E.5.1	Géométrie . . . . .	271
E.5.2	Repères – Vue de côté . . . . .	271
E.5.3	Repères – Vue de dessus . . . . .	271
E.5.4	Repères des appendices . . . . .	272
E.5.5	Domaine lointain . . . . .	272
E.5.6	Différentes vues des interfaces glissantes . . . . .	273
E.5.7	Décalage d'un aileron de stabilisation . . . . .	273
E.5.8	Maillage – Vue de face . . . . .	273
E.5.9	Maillage – Vue de dessus . . . . .	273
E.5.10	Maillage – Maillage de la poupe . . . . .	274
E.5.11	Maillage – Maillage des ailerons . . . . .	274
E.5.12	Scénario des simulations . . . . .	275
E.5.13	Angle de roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	277
E.5.14	Angle de roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	277
E.5.15	Mouvement de pilonnement et de tangage – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	277
E.5.16	Mouvement de pilonnement et de tangage – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	278
E.5.17	Angle de cabrage des ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	278
E.5.18	Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	279
E.5.19	Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	280
E.5.20	Efforts fluides sur les safrans – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	280
E.5.21	Efforts fluides sur les safrans – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	281
E.5.22	Efforts fluides sur les quilles anti-roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	281
E.5.23	Efforts fluides sur les quilles anti-roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	282
E.5.24	DTMB 5415M – Coefficient de pression et élévation de la surface libre . . . . .	284
E.5.25	Contribution des différents éléments en roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	285
E.5.26	Contribution des différents éléments en roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	286
E.5.27	Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	287
E.5.28	Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	288

### Liste des tableaux de l'application

E.5.1	Décomposition des coefficients – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	283
E.5.2	Décomposition des coefficients – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	284

### E.5.1 Description

La présente étude consiste à étudier l'amortissement en roulis d'une frégate militaire de l'US Navy de type DTMB. La frégate étudiée est une version modifiée de la maquette DTMB 5415 (cf. section E.3 p. 211) et est dénommée DTMB 5415M. En plus de quelques modifications géométriques et inertielles, cette version possède différents appendices dont des ailerons de stabilisation actifs pour amortir efficacement le mouvement de roulis (cf. figure E.5.1 page suivante). Lors de cette étude, ces ailerons de stabilisation sont soit passifs (c.-à-d. à orientation fixe), soit actifs (application d'une loi de pilotage). Lorsqu'ils sont actifs, les angles de cabrage des ailerons dépendent de la vitesse de roulis. L'objectif de ce cas d'application est de démontrer les possibilités offertes par la chaîne de couplage entre ISIS-CFD et MBDyn en matière de contrôle d'actionneurs et de valider une nouvelle fois l'algorithme de couplage sur un cas d'application industrielle complexe.

Les résultats des simulations sont comparés à des essais expérimentaux réalisés à l'échelle maquette au centre d'essais MARIN en 2000 pour le compte du groupe de travail NATO AVT-161. Le rapport d'essais de référence est le MARIN Report No. 23848-1-SMB. La diffusion des résultats étant restreinte au groupe de travail, les échelles ne sont pas spécifiées dans ce rapport et certaines grandeurs sont adimensionnalisées arbitrairement. Elles sont notées avec une ★ en exposant.

Au cours des essais expérimentaux, la maquette est totalement libre et autopropulsée. Lors des deux essais sélectionnés (essais 203003 et 204002), le nombre de Froude est de l'ordre de 0.25. Pour atteindre la vitesse d'avance correspondante, la vitesse de rotation des propulseurs est fixée et lorsqu'un état stationnaire est atteint, une perturbation en roulis est appliquée en poussant manuellement un des côtés de la carène dans l'eau. Un asservissement dynamique des safrans permet de contrôler le cap de la maquette.

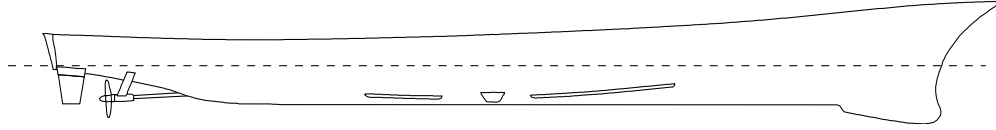


Figure E.5.1 : DTMB 5415M – Géométrie

La maquette est à l'échelle 1/35.48. Les simulations sont réalisées à cette même échelle. Les paramètres de l'eau sont calculés selon les recommandations de l'ITTC 1978 [ITTC, 1978] pour de l'eau douce dont la température est de 20 °C. Le modèle de turbulence EASM et des paramètres de simulation classiques sont utilisés.

Les différents repères utilisés sont décrits à la section E.5.2. Le domaine de calcul, le maillage et la prise en compte des différents degrés de liberté du navire et des ailerons de stabilisation sont présentés à la section E.5.3 page suivante. Le scénario utilisé lors des simulations et la loi de pilotage des ailerons de stabilisation sont expliqués à la section E.5.4 p. 274. L'énumération et l'analyse des différences par rapport aux essais expérimentaux sont effectuées à la section E.5.5 p. 275. Finalement, les résultats et leur analyse sont détaillés à la section E.5.6 p. 276.

Le travail de la géométrie et le maillage ont été réalisés par Emmanuel Guilmineau de l'équipe DSPM (Dynamique des Systèmes Propulsifs Marins).

## E.5.2 Définition des repères

Les repères utilisés sont présentés par les figures E.5.2 à E.5.4. Le repère galiléen de référence est noté  $\mathcal{B}_0$ . Les repères liés au navire sont notés  $\mathcal{B}_3$ ,  $\mathcal{B}_4$ ,  $\mathcal{B}_5$  et  $\mathcal{B}_6$ . Ils sont respectivement positionnés au centre de gravité du navire, aux axes de rotations des ailerons de stabilisation, aux extrémités des quilles anti-roulis et au centre des safrans. Un indice supplémentaire peut spécifier le côté tribord (indice  $t$ ) ou bâbord du navire (indice  $b$ ). L'orientation des repères  $\mathcal{B}_{4t}$  et  $\mathcal{B}_{4b}$  est telle, qu'un angle de braquage positif correspond à une inclinaison du bord d'attaque des ailerons vers le bas (cf. figure E.5.4.b page suivante). Les repères liés aux ailerons de stabilisation tribord et bâbord sont respectivement notés  $\mathcal{B}_{7t}$  et  $\mathcal{B}_{7b}$ . Les angles de roulis, tangage et lacet sont respectivement notés  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . Les angles de rotation des ailerons de stabilisation tribord et bâbord sont respectivement notés  $\delta_t$  et  $\delta_b$ .

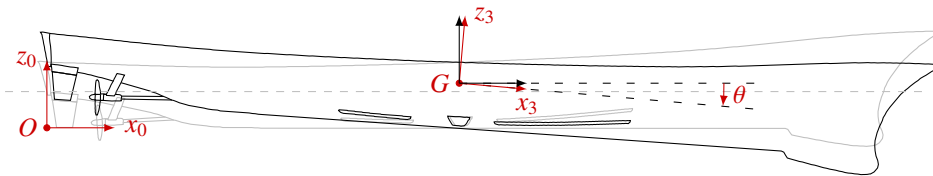


Figure E.5.2 : DTMB 5415M – Repères – Vue de côté

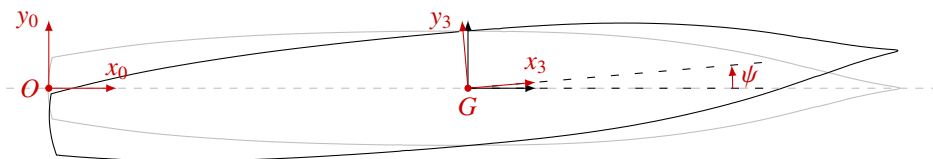


Figure E.5.3 : DTMB 5415M – Repères – Vue de dessus

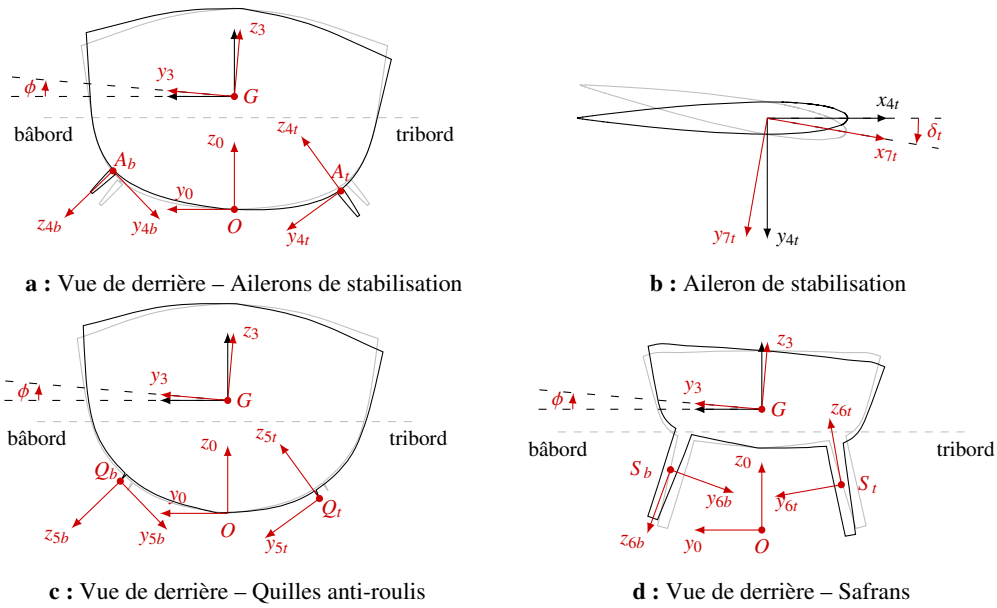


Figure E.5.4 : DTMB 5415M – Repères des appendices

### E.5.3 Domaine de calcul et maillage

Le domaine de calcul est composé de quatre zones différentes. La première zone est de forme parallélépipédique et représente le domaine fluide lointain (cf. figure E.5.5). Au sein de ce parallélépipède, un premier domaine cylindrique aligné avec l'axe de roulis du navire permet de prendre en compte les différents mouvements de ce dernier (cf. figures E.5.6.a page suivante et E.5.6.c page suivante). Dans ce cylindre, deux nouveaux domaines cylindriques permettent de prendre en compte le mouvement relatif des ailerons de stabilisation par rapport à la carène (cf. figure E.5.6.b page suivante). Afin que ces domaines cylindriques puissent englober les ailerons de stabilisation sans intersecter la surface de la carène, ces derniers sont translatés selon leur axe de rotation afin de les éloigner de la carène (cf. figures E.5.7.a page suivante et E.5.7.b page suivante). Les espaces entre les ailerons de stabilisation et la carène sont donc supérieurs à ceux présents lors des essais expérimentaux.

Les différents domaines cylindriques sont rigides. Seul le domaine parallélépipédique peut potentiellement se déformer pour prendre en compte les mouvements de tangage et de pilonnement du navire. Le mouvement de roulis du navire et le cabrage des ailerons sont naturellement pris en compte par les interfaces glissantes. Ces dernières sont utilisées afin de faciliter la prise en compte des grandes amplitudes des mouvements de rotation (roulis et cabrage des ailerons de stabilisation).

Le maillage est identique quel que soit le cas considéré. Il est composé de 31 millions de cellules. Quelques visualisations sont proposées aux figures E.5.8 à E.5.11.

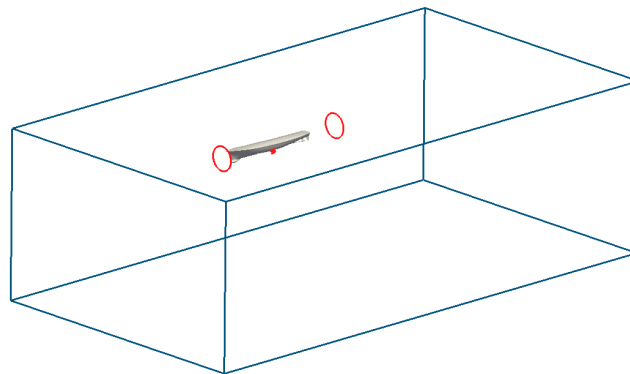
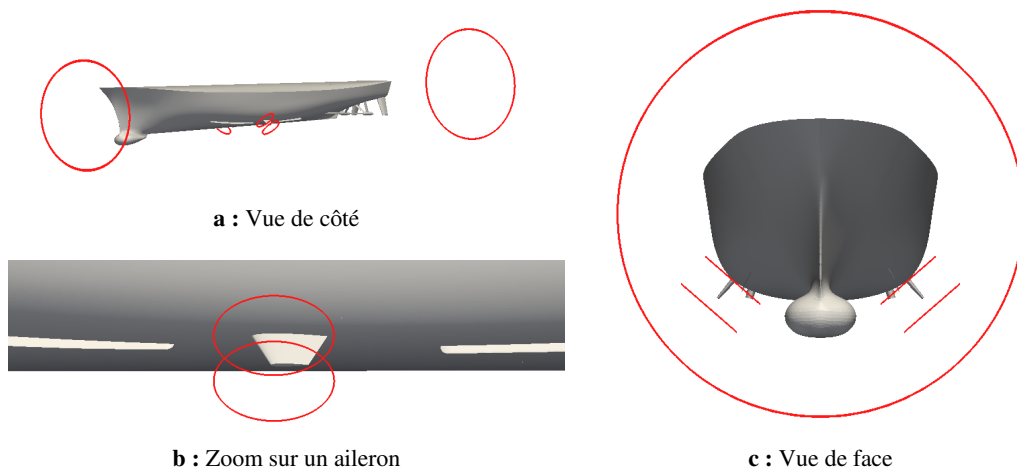
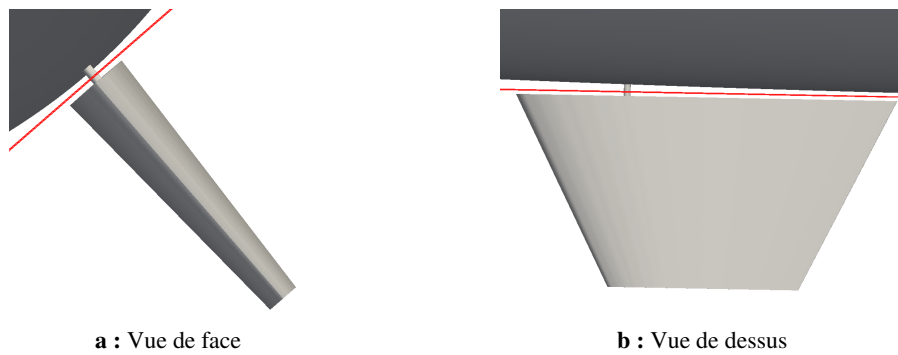


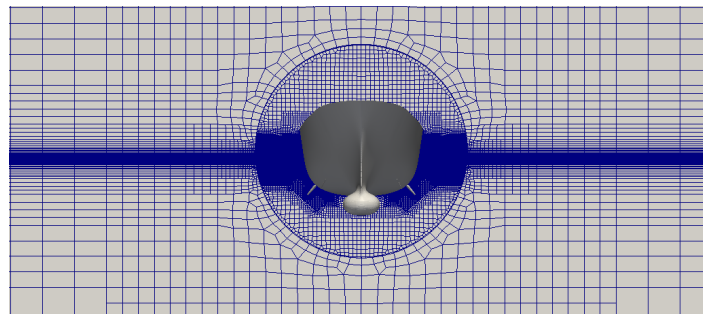
Figure E.5.5 : DTMB 5415M – Domaine lointain



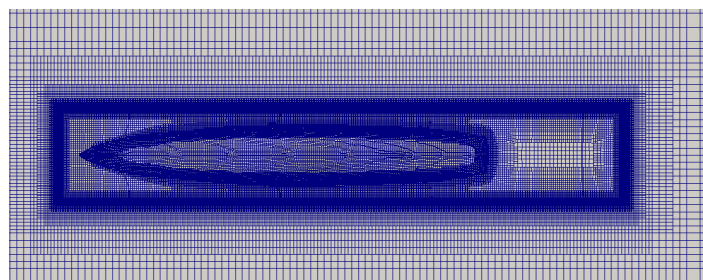
**Figure E.5.6 :** DTMB 5415M – Différentes vues des interfaces glissantes



**Figure E.5.7 :** DTMB 5415M – Décalage d'un aileron de stabilisation



**Figure E.5.8 :** DTMB 5415M – Maillage – Vue de face



**Figure E.5.9 :** DTMB 5415M – Maillage – Vue de dessus

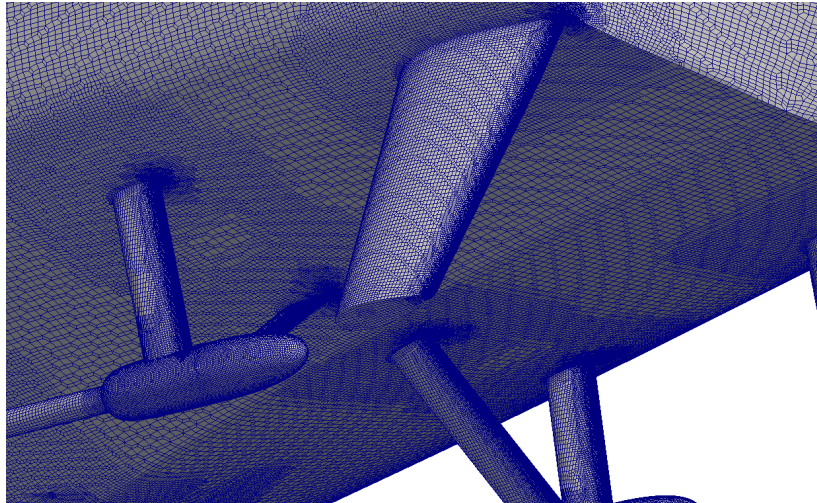
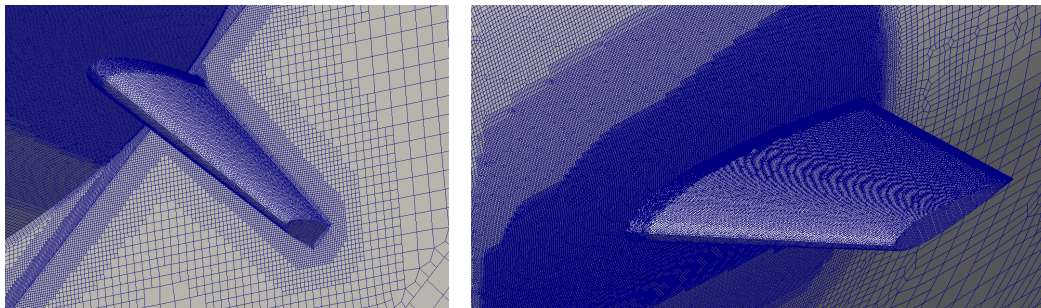


Figure E.5.10 : DTMB 5415M – Maillage – Maillage de la poupe et des appendices



a : Vue de face

b : Vue de dessus

Figure E.5.11 : DTMB 5415M – Maillage – Maillage des ailerons

### E.5.4 Scénario et loi de pilotage des ailerons

Le schéma de principe du scénario utilisé est présenté à la figure E.5.12. Les échelles des abscisses ne sont pas obligatoirement respectées. Tout au long de la simulation, la vitesse de translation du navire selon l'axe  $y$  du repère  $\mathcal{B}_0$  et la vitesse de rotation selon l'axe  $z$  de ce même repère sont bloquées. Les autres degrés de liberté sont soit pilotés, soit libres. Les temps importants sont notés  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_4$ . Entre  $t_0$  et  $t_1$ , une mise en vitesse progressive du navire selon l'axe  $x$  du repère  $\mathcal{B}_0$  est effectuée. Cette mise en vitesse est effectuée par le biais d'un quart de sinus. Entre  $t_1$  et  $t_2$ , la vitesse d'avance est maintenue jusqu'à l'obtention d'un état pseudo-stationnaire. Entre  $t_2$  et  $t_3$ , l'angle de roulis passe progressivement de 0 à l'angle de roulis mesuré lors des essais après l'application de l'effort de perturbation. Cet angle est noté  $\phi_0$  et le passage progressif est réalisé par un quart de sinus de période proche de celle mesurée lors des essais. À partir de  $t_3$ , le degré de liberté en roulis est relâché.

Les angles de cabrage des ailerons de stabilisation sont pilotés par une loi dépendant de la vitesse de roulis. L'amplitude de l'angle de cabrage est également limitée mécaniquement. Cette amplitude maximale est notée  $\delta_{\max}$ .



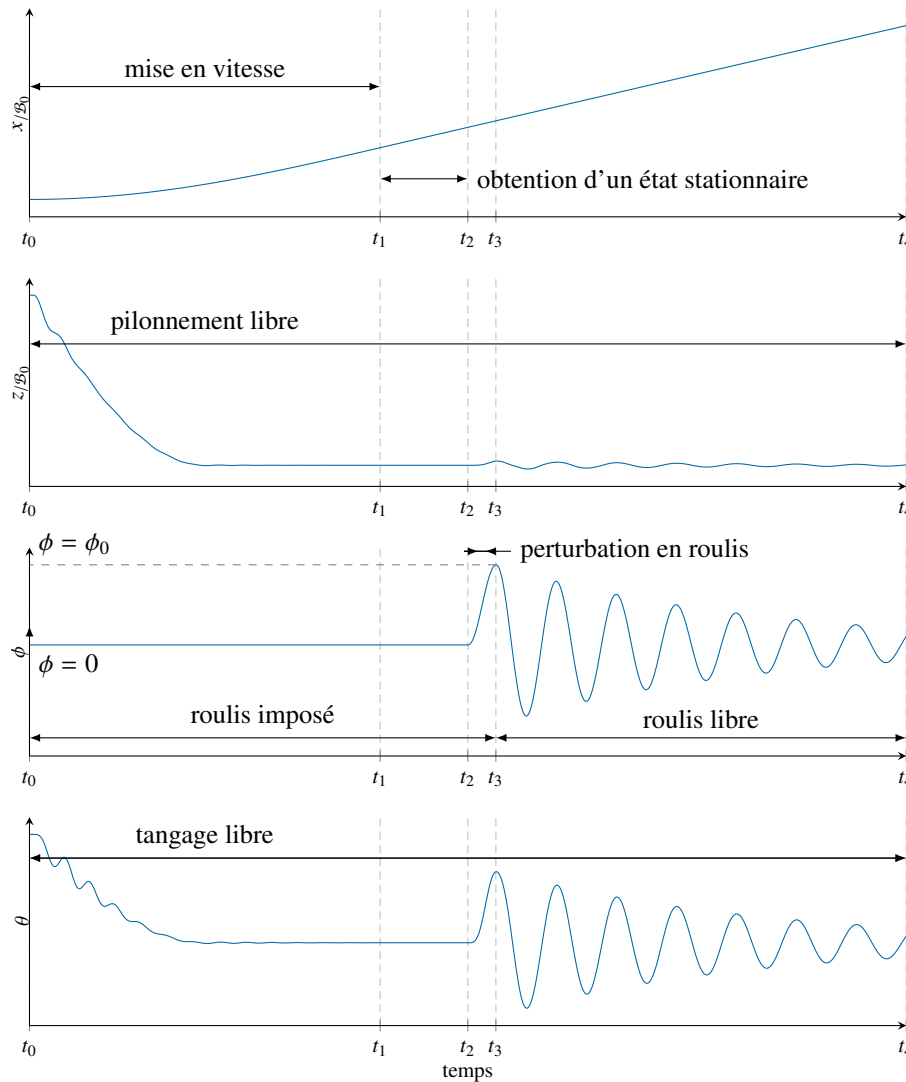


Figure E.5.12 : DTMB 5415M – Scénario des simulations

### E.5.5 Différences par rapport aux essais expérimentaux

Lors des simulations, la totalité des conditions utilisées lors des essais expérimentaux ne peut être reproduite. En conséquence, il existe des différences. Elles sont décrites ou rappelées dans les paragraphes ci-dessous. Une brève analyse est également effectuée.

Premièrement, l'effort de perturbation en roulis appliqué lors des essais expérimentaux ne peut être rigoureusement appliqué car ce dernier est inconnu (non mesuré). Typiquement, il a donc été choisi d'imposer une contrainte cinématique de sorte que l'angle de roulis mesuré lors des essais après la perturbation soit identique au sein des simulations. Cette perturbation cinématique arbitraire est une rampe de forme « quart de sinus ». L'effort de perturbation en roulis appliqué lors des essais expérimentaux modifie également l'enfoncement et l'assiette du navire. Ces modifications ne sont pas prises en compte au sein des simulations. Une présentation plus poussée de ces différences est réalisée à la section E.5.6 page suivante. D'une certaine manière, les simulations se rapprochent plus du cas idéal que les essais expérimentaux sur ce point.

Deuxièmement, la vitesse de la frégate est imposée comme étant égale à celle mesurée lors des essais expérimentaux. L'effet de la poussée des propulseurs sur le fluide est modélisé par le biais d'un modèle de disque moteur (« actuator disk »). Cet effet est également considéré comme étant constant tout le long de la simulation. La poussée des propulseurs est évaluée par des simulations préliminaires en résistance à l'avancement. Les effets tangentiels des propulseurs (mise en rotation du fluide) sont, quant à eux, simplement négligés. Les effets des propulseurs sur les mouvements de pilonnement et de tangage ne sont pas modélisés. Du fait de la



position relativement éloignée des propulseurs par rapport à la carène et des nombres de Froude considérés, ces différences ne doivent pas impacter la cinématique en roulis de la frégate. Par contre, il est tout à fait possible que les efforts fluides s'exerçant sur les propulseurs lors des mouvements de roulis produisent un moment non négligeable par rapport aux autres contributions (notamment celles des différents appendices). Pour estimer correctement ces efforts, il serait nécessaire d'utiliser la géométrie exacte des propulseurs, ce qui compliquerait de manière importante les simulations. En effet, la prise en compte précise des propulseurs pourrait avoir lieu directement au sein du solveur fluide utilisé (mais augmentation importante du nombre de cellules et diminution du pas de temps) ou par le biais d'un couplage avec un code potentiel (complexification de la chaîne de calcul).

Troisièmement, au cours des essais expérimentaux, les safrans sont pilotés afin d'éviter que la maquette dérive de son cap initial. La loi de pilotage comporte un terme constant (de l'ordre de  $3^\circ$ ) et des termes correcteurs qui dépendent de la cinématique du navire. Les angles de cabrage des safrans restent faibles lors des essais sélectionnés (en dessous de  $5^\circ$  au maximum). Cependant, du fait de la forme de la loi de pilotage, la dynamique des safrans est proche de celle du roulis. Par conséquent, le pilotage des safrans peut potentiellement modifier la réponse en roulis du navire. Pour les simulations, les safrans ne sont pas pilotés et la vitesse de translation selon l'axe  $y$  du repère  $\mathcal{B}_0$  et la vitesse de rotation selon l'axe  $z$  de ce même repère sont simplement bloquées pour éviter une modification importante du cap du navire. Ces hypothèses simplificatrices nécessiteraient d'être analysées plus précisément.

Enfin, l'utilisation d'interfaces glissantes pour prendre en compte le mouvement relatif des ailerons par rapport à la carène nécessite d'écarter ces derniers pour que le maillage des interfaces glissantes puisse s'opérer. Par conséquent, l'espace existant entre la carène et les ailerons est agrandi<sup>16</sup>. En conclusion, il est possible que l'agrandissement de cet espace puisse modifier l'efficacité des ailerons de manière importante.

Au cours de ces quelques paragraphes, les différences entre les simulations et les essais expérimentaux ont été présentées. Elles ont été réalisées avec l'hypothèse que leur impact reste faible sur les résultats, de manière à permettre une comparaison avec les essais expérimentaux. Cependant, certaines mériteraient une analyse plus poussée : modélisation précise des propulseurs, pilotage des safrans et écartement des ailerons. L'objectif de ce cas test étant principalement de démontrer les capacités de pilotage d'appendices par l'utilisation de MBDyn, les impacts de ces différences sur les résultats obtenus n'ont pas été étudiés.

### E.5.6 Résultats et analyses

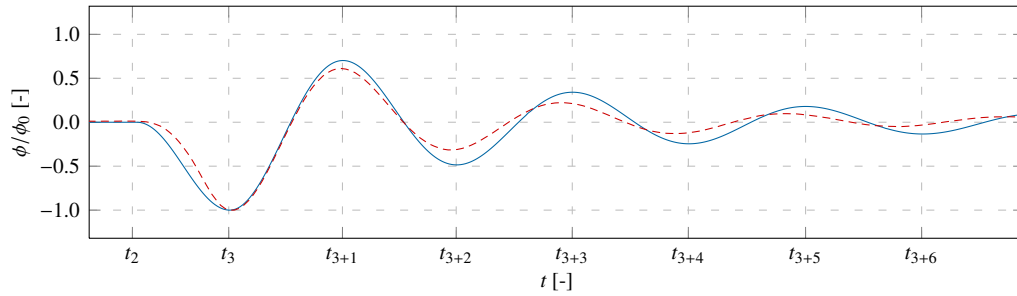
Les résultats et l'analyse des simulations sont présentés dans cette section. Dans un premier temps, les résultats obtenus sont comparés aux mesures expérimentales. Dans un second temps, une analyse additionnelle de la contribution des différents appendices est réalisée. Tout le long de cette section, il est important de noter que la perturbation en roulis a lieu entre  $t_2$  et  $t_3$ . La perturbation en roulis étant différente entre les essais et les simulations, il est normal d'observer des différences importantes avant  $t_3$ .

Dans un premier temps, le roulis adimensionnel en fonction du temps est présenté aux figures E.5.13 et E.5.14. Il est important de remarquer que lorsque les ailerons de stabilisation sont actifs, l'angle de roulis après la perturbation est 1.8 fois plus grand que lorsque ces derniers sont passifs (non visible pour des raisons de confidentialité). Malgré cette forte différence, l'amortissement en roulis est nettement plus important lorsque les ailerons de stabilisation sont actifs. La diminution de l'angle de roulis à  $t_{3+1}$ ,  $t_{3+2}$  et  $t_{3+3}$  est de l'ordre de 50%, 80% et 91% lorsqu'ils sont actifs (cf. figure E.5.13 page suivante pour les notations des différents instants) et 30%, 51% et 66% lorsqu'ils sont passifs (cf. figure E.5.14 page suivante). De plus, les oscillations en roulis perdurent après  $t_{3+3}$  lorsque les ailerons de stabilisation sont passifs et disparaissent presque complètement lorsqu'ils sont actifs. Néanmoins, lors des essais expérimentaux, les oscillations diminuent plus fortement. Les simulations sous-estiment donc l'amortissement en roulis lorsque les amplitudes sont faibles et les ailerons de stabilisation passifs. En plus des incertitudes numériques (pas d'étude en maillage ou en pas de temps), il existe des incertitudes liées aux différences entre les essais et les simulations (cf. section E.5.5 page précédente) qui peuvent expliquer cette sur-estimation.

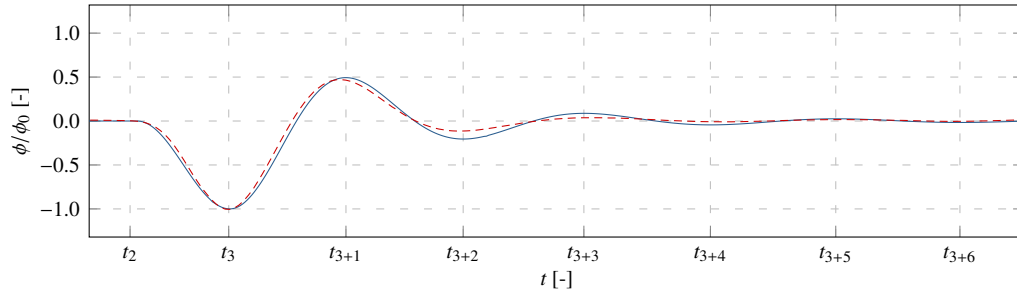
Dans un deuxième temps, les mouvements de pilonnement et de tangage du navire sont présentés aux figures E.5.15 et E.5.16. Ces figures illustrent plusieurs points intéressants. Tout d'abord, lors des essais expérimentaux,

---

16. Il représente 6% de l'envergure des ailerons lors des simulations. Il n'est pas donné dans le document de référence des résultats expérimentaux.

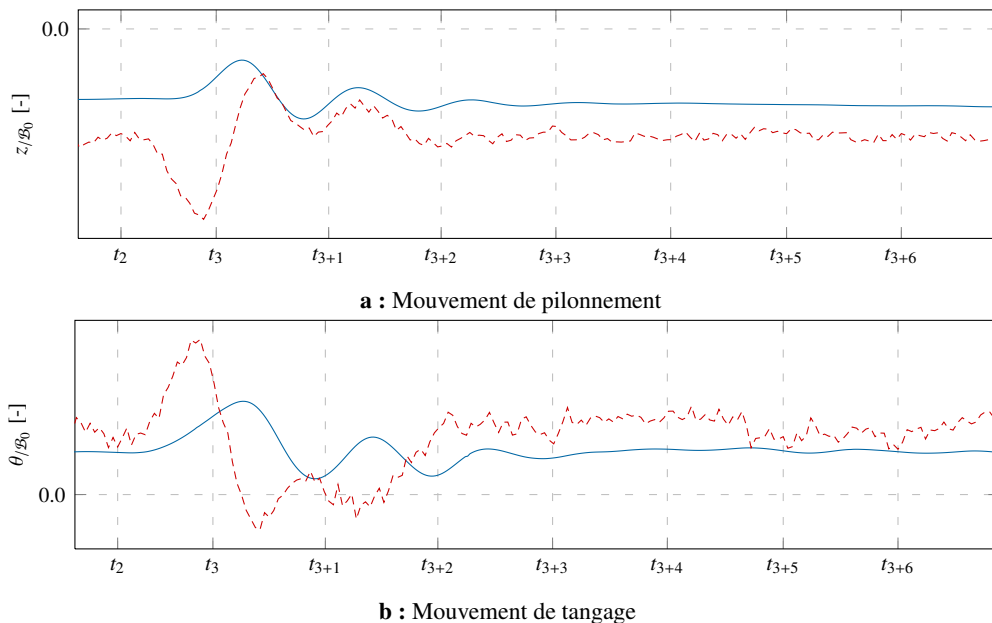


**Figure E.5.13 :** DTMB 5415M – Angle de roulis adimensionnel en fonction du temps – Ailerons de stabilisation passifs : — simulation et - - - expérience

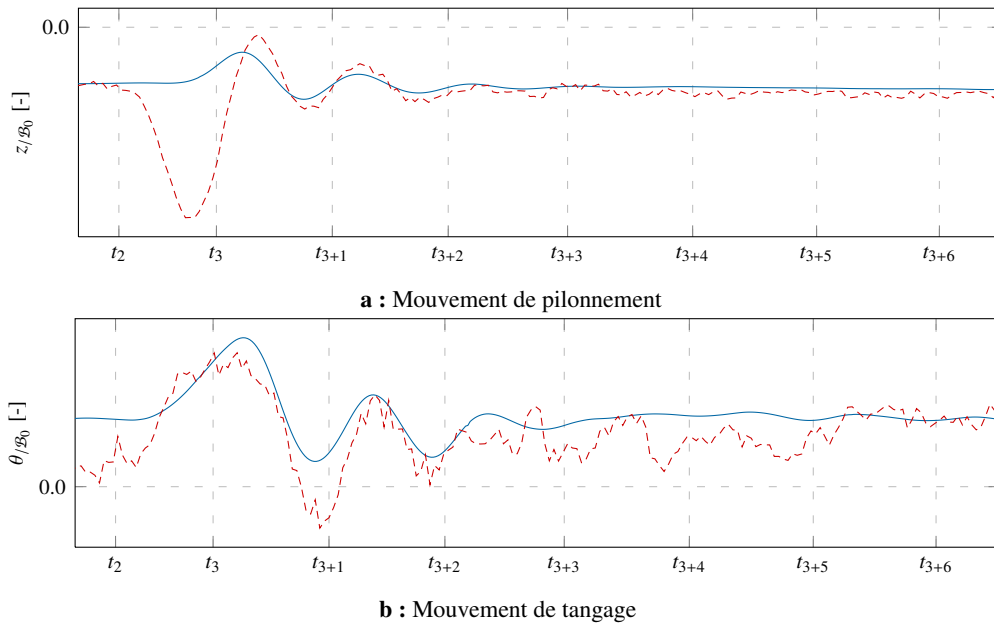


**Figure E.5.14 :** DTMB 5415M – Angle de roulis adimensionnel en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience

taux, l'enfoncement dynamique mesuré avant la perturbation en roulis n'est pas identique entre les deux essais. Les faibles différences de vitesse d'avance entre ces deux essais ne permettent pas d'expliquer cet écart. Cela illustre les incertitudes classiques liées aux essais expérimentaux (mesures, caractérisation du milieu, etc.). De manière moins anecdotique, la perturbation en roulis appliquée lors des essais expérimentaux enfonce artificiellement le navire et modifie l'assiette dynamique. Ces effets ne sont pas pris en compte lors des simulations. Malgré ces différences, la dynamique du navire est bien respectée après la perturbation, exception faite de l'angle d'assiette lorsque les ailerons de stabilisation sont passifs. Pour information, l'ordre de grandeur des angles d'assiette est proche du dixième de degré. Ces figures illustrent donc les difficultés liées à la reproduction d'essais expérimentaux par des simulations numériques avec ce niveau de précision.

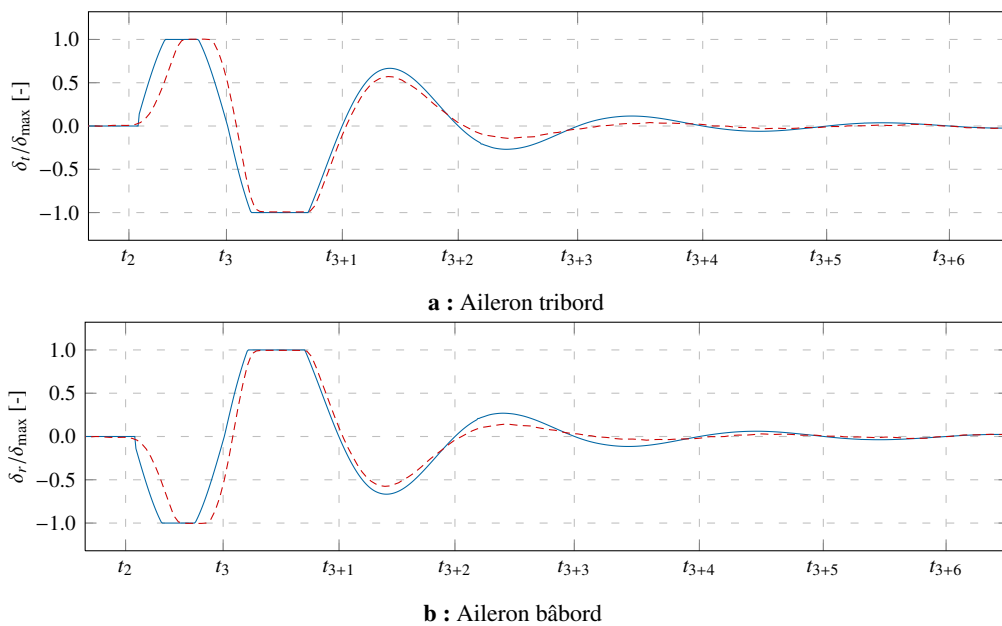


**Figure E.5.15 :** DTMB 5415M – Mouvement de pilonnement et de tangage en fonction du temps – Ailerons de stabilisation passifs : — simulation et - - - expérience



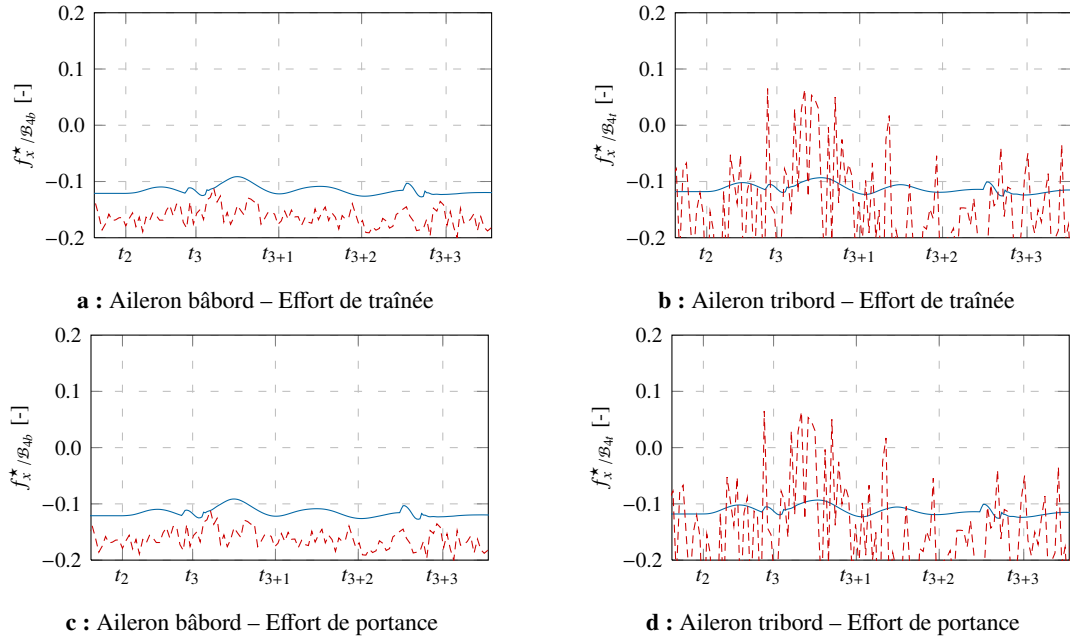
**Figure E.5.16 :** DTMB 5415M – Mouvement de pilonnement et de tangage en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience

Dans un troisième temps, l'angle de cabrage des ailerons de stabilisation adimensionnalisé par l'amplitude maximale autorisée est présenté à la figure E.5.17. L'angle de cabrage maximal est atteint lors de la première oscillation libre ( $t_{3+1} < t$ ). Il est donc important de prendre en compte cette limitation. Cette figure montre également, de nouveau, que la perturbation en roulis ( $t_2 < t < t_3$ ) n'est pas parfaitement identique entre les simulations et les essais expérimentaux. L'influence de cette perturbation initiale mériterait d'être étudiée. Néanmoins, les angles de cabrage des ailerons de stabilisation sont suffisamment proches des essais expérimentaux pour pouvoir comparer les efforts fluides qui s'y exercent. De surcroît, si en théorie la loi de pilotage est parfaitement appliquée lors des simulations, il en est autrement lors des essais expérimentaux (et en réalité) car la chaîne de contrôle n'est pas parfaite (logiciel, électronique, mécanique), ce qui est de nouveau une source d'erreur.



**Figure E.5.17 :** DTMB 5415M – Angle de cabrage des ailerons de stabilisation en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience

Dans un quatrième temps, les efforts fluides s'exerçant sur les ailerons de stabilisation sont présentés aux figures E.5.18 et E.5.19. Ces efforts sont exprimés dans les repères liés aux ailerons de stabilisation (cf. figure E.5.4.b p. 272) et sont adimensionnalisés par une valeur arbitraire unique pour chaque simulation. Pour information, cette valeur arbitraire est 8 fois plus grande lorsque les ailerons de stabilisation sont actifs. En général, les variations et les ordres de grandeurs obtenus sont cohérents avec ceux mesurés lors des essais. Notamment, lorsque l'amplitude des efforts est importante (c.-à-d. lorsque les ailerons de stabilisation sont actifs), une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux est obtenue. Au contraire, lorsque les ailerons de stabilisation sont passifs, les efforts de traînée sont faibles et les signaux expérimentaux sont fortement bruités, ce qui ne facilite pas la comparaison. Un faible offset est observé entre les résultats expérimentaux et les simulations effectuées. Les efforts de portance étant plus importants, une meilleure concordance des résultats est de nouveau obtenue.



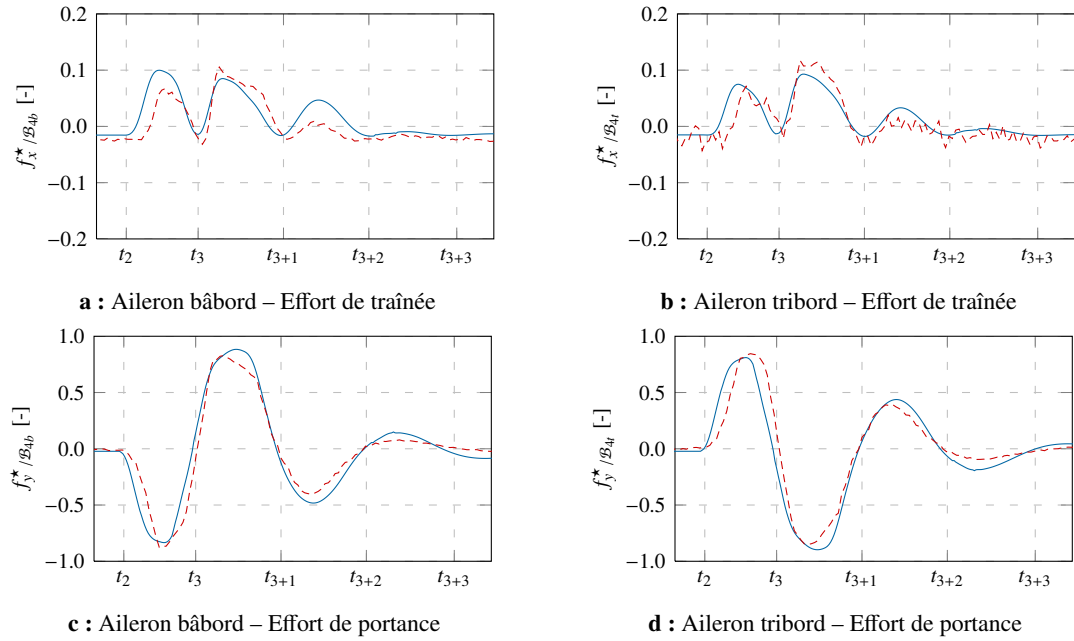
**Figure E.5.18 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation en fonction du temps – Ailerons de stabilisation passifs : — simulation et - - - expérience

Lors des essais expérimentaux, certains des efforts s'exerçant sur les safrans et les quilles anti-roulis ont également été mesurés. Ils sont comparés à ceux obtenus lors des simulations aux figures E.5.20 et E.5.21 pour les safrans et aux figures E.5.22 et E.5.23 pour les quilles anti-roulis. Les mêmes facteurs adimensionnels que ceux utilisés dans le cas des ailerons de stabilisation sont employés.

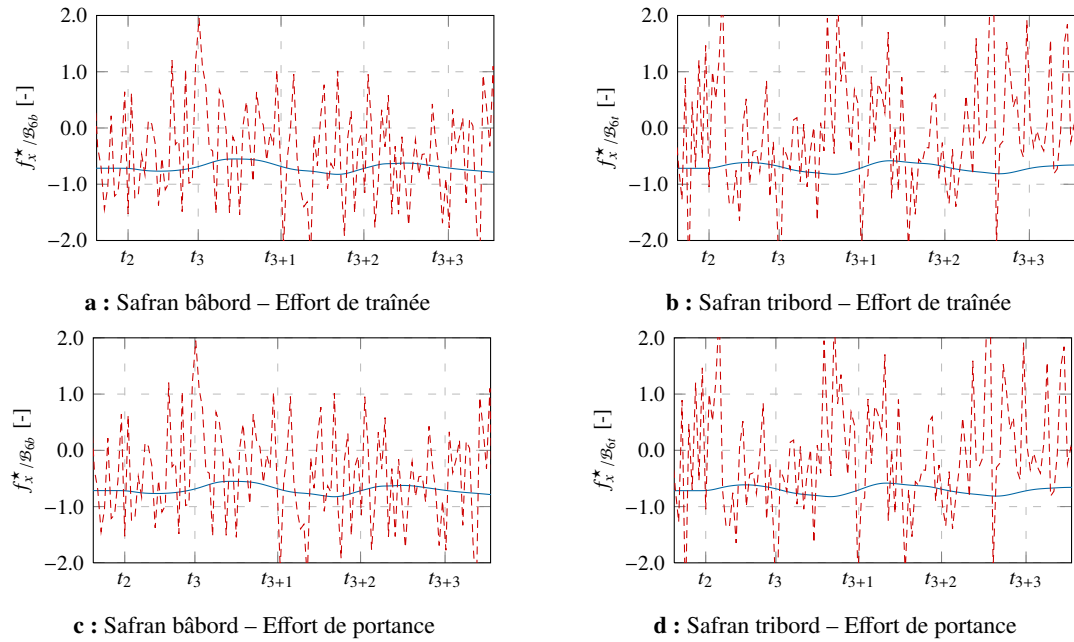
En ce qui concerne les efforts de traînée des safrans, le fort bruitage des mesures expérimentales empêche de conclure précisément même si les ordres de grandeur entre les résultats expérimentaux et ceux des simulations sont cohérents. Au contraire, la dynamique des efforts de portance est globalement bien captée même si de faibles décalages sont observés. Il est important de rappeler que, contrairement aux simulations, l'angle de cabrage des safrans est piloté lors des essais expérimentaux. Les hypothèses simplificatrices peuvent donc potentiellement expliquer les différences de résultat.

Les efforts de portance des quilles anti-roulis sont, quant à eux, cohérents et ceci malgré des valeurs relativement faibles. De façon anecdotique, il est notable que certains des capteurs expérimentaux n'arrivent pas à capter les efforts de portance positifs lorsqu'ils sont faibles (observation de plateaux proches de 0). Ces quelques paragraphes permettent de conclure positivement quant à la qualité des simulations effectuées. En effet, il est possible d'affirmer que, malgré la forte complexité de ce type de simulation, les résultats obtenus sont suffisamment proches à différentes échelles (échelle du navire ou échelles des appendices) pour pouvoir analyser quantitativement la contribution des appendices sur l'amortissement en roulis de ce navire.

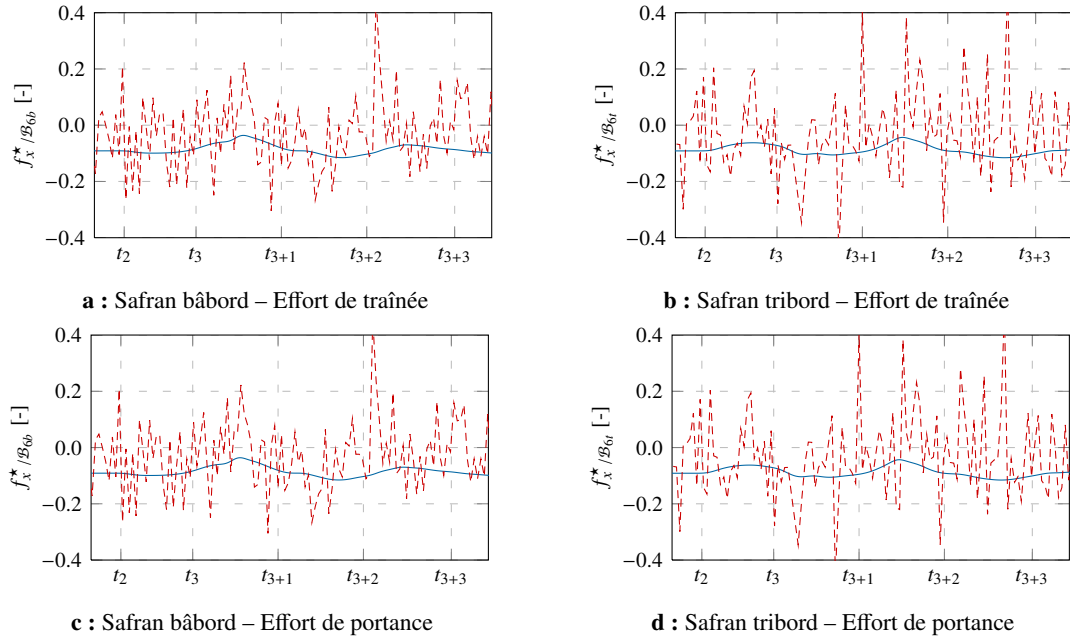
Finalement, la contribution des différents éléments du navire sur le moment de roulis est donnée aux figures E.5.25 et E.5.26. L'angle et la vitesse de roulis sont également donnés au sein de ces figures pour faciliter l'analyse. Lorsque cela n'est pas directement spécifié, les efforts de pression hydrostatique sont retranchés.



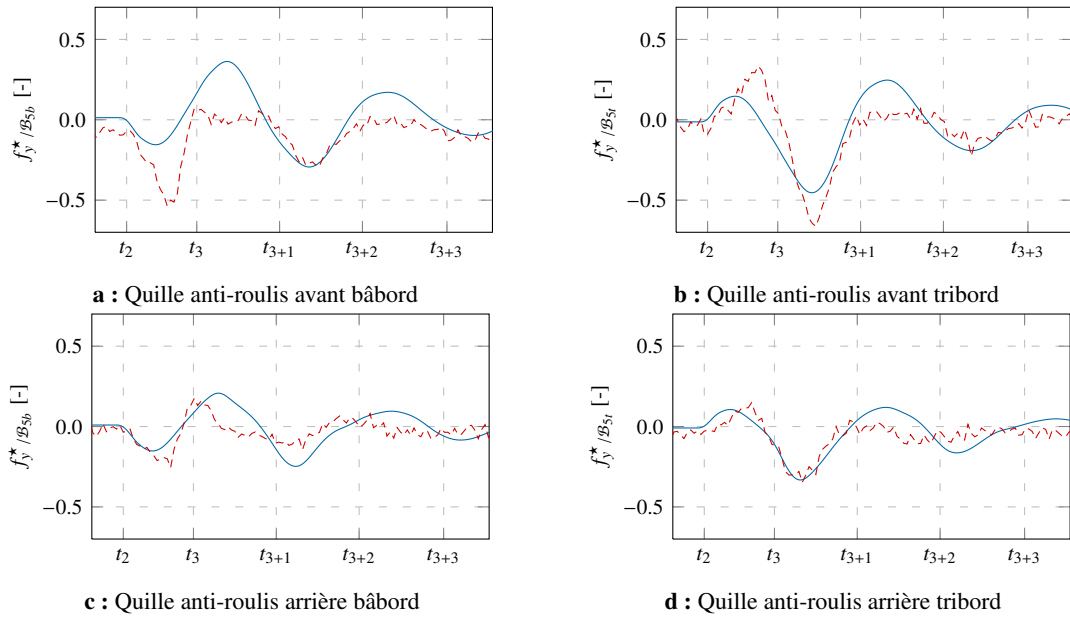
**Figure E.5.19 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience



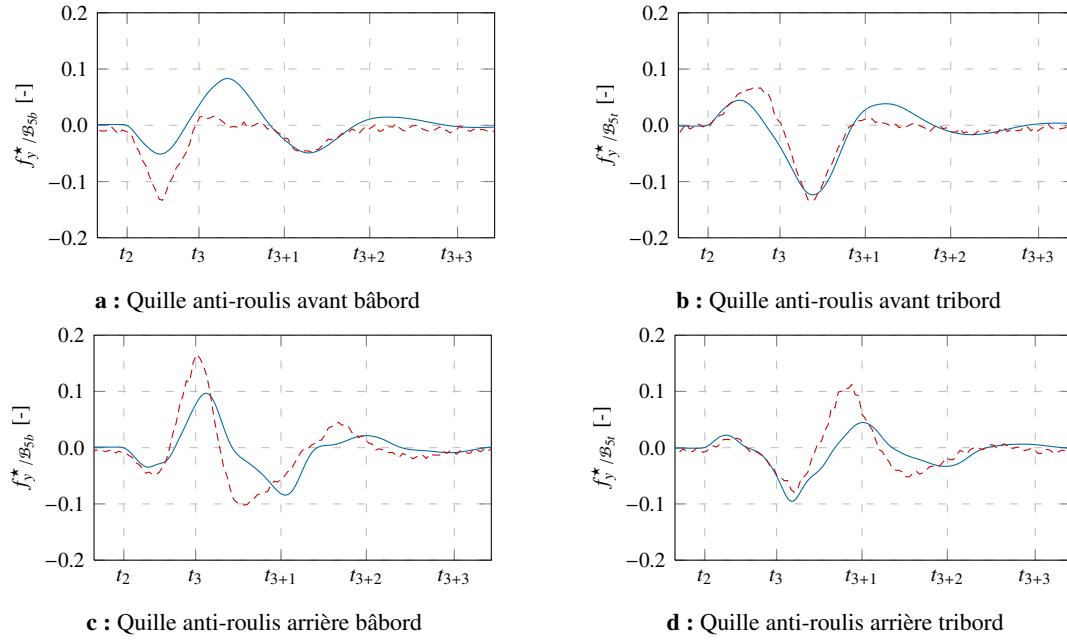
**Figure E.5.20 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les safrans en fonction du temps – Ailerons de stabilisation passifs : — simulation et - - - expérience



**Figure E.5.21 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les safrans en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience



**Figure E.5.22 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les quilles anti-roulis en fonction du temps – Ailerons de stabilisation passifs : — simulation et - - - expérience



**Figure E.5.23 :** DTMB 5415M – Efforts fluides sur les quilles anti-roulis en fonction du temps – Ailerons de stabilisation actifs : — simulation et - - - expérience

L'objectif sous-jacent est de vérifier que certains appendices qui ne sont pas couramment modélisés au sein de certains simulateurs de navire (faute de données disponibles la plupart du temps) ne contribuent pas significativement à l'amortissement en roulis. Les différentes contributions sont adimensionnalisées par le moment fluide maximal s'exerçant sur la totalité du navire lorsque les efforts de pression hydrostatique sont retranchés. De plus, lorsque les moments fluides sont dans le sens opposé de la vitesse de roulis la zone est colorée. Parallèlement, l'extraction des coefficients d'amortissement linéaire et des coefficients de masse ajoutée est réalisée. Un des modèles couramment utilisé est de la forme :

$$m_{x/B_3} = -K(\phi, \dots) \cdot \phi - B_l \cdot \dot{\phi} - B_q \cdot \dot{\phi} \cdot |\dot{\phi}| - I_a \cdot \ddot{\phi} \quad (\text{E.5.1})$$

où  $K$  est une fonction représentative de la raideur hydrostatique,  $B_l$  et  $B_q$  les coefficients d'amortissement linéaire et quadratique et  $I_a$  le coefficient de masse ajoutée (inertie ajoutée). Afin de s'affranchir de la définition de la fonction  $K$ , les efforts de pression hydrostatique sont retranchés aux efforts totaux. En outre, les coefficients de régression obtenus (cf. paragraphe suivant) sont plus élevés lorsqu'un modèle d'amortissement quadratique est utilisé. Il a donc été choisi d'utiliser uniquement un modèle d'amortissement linéaire. En conclusion, la modélisation utilisée est de la forme :

$$m_x^*/B_3 = -B_l \cdot \dot{\phi} - I_a \cdot \ddot{\phi} \quad (\text{E.5.2})$$

où  $m_x^*$  est le moment roulis comprenant uniquement les efforts de pression dynamique et de frottement. De façon classique, l'amortissement peut être présenté par le biais du rapport d'amortissement  $\xi$  défini par les différentes formules ci-dessous :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(I + I_a)}} \quad \delta = \frac{B_l}{2 \cdot (I + I_a)} \quad \omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (\text{E.5.3})$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre,  $\delta$  le facteur d'amortissement,  $\omega_A$  la pulsation amortie,  $K$  la raideur hydrostatique linéaire et  $I$  l'inertie en roulis. Pour évaluer les coefficients d'amortissement linéaire et de masse ajoutée, différentes régressions non-linéaires sont réalisées par la méthode des moindres carrés (algorithme de Levenberg-Marquardt). La visualisation des régressions obtenues est proposée aux figures E.5.27 et E.5.27. Les résultats des régressions sont, quant à eux, résumés aux tableaux E.5.1 et E.5.2. Ils présentent à la fois la contribution de chaque élément sur les coefficients totaux et des informations permettant de juger de la pertinence du modèle utilisé. Pour cela, le coefficient de régression  $R$  est donné<sup>17</sup>. De surcroît, l'estimation de l'écart type de chaque

17. Le coefficient de régression d'une régression non-linéaire est donné par  $R = \sqrt{1 - \text{SSE}/\text{SST}}$ , avec  $\text{SSE} = \sum_{i=1}^n (s_i - m_i)^2$ ,  $\text{SST} = \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2$  où  $n$  est le nombre de pas de temps considéré,  $s$  le signal original,  $m$  le signal modélisé et  $\bar{s}$  la moyenne du signal original.

variable (notée  $\sigma$ ) est évaluée en pourcentage de la valeur lorsque le coefficient de régression est correct. Cette quantité exprime la dispersion possible de chaque paramètre par rapport à la valeur présentée.

Le modèle de régression choisi peut être utilisé pour le navire, les ailerons de stabilisation et les quilles anti-roulis ( $R > 0.99$ ). Il est également satisfaisant pour la coque et l'ensemble des appendices ( $R > 0.98$ ). Par contre, il ne permet pas de modéliser correctement les safrans, les arbres accompagnés de leurs chaises et la quille. Les résultats de ces appendices sont donc donnés à titre informatif uniquement. Les coefficients de masse ajoutée négatifs des safrans sont certainement dus aux erreurs de régression et non à des phénomènes physiques. De plus, lorsque le modèle de régression modélise correctement le moment fluide, les écarts-types des coefficients d'amortissement sont faibles. L'extraction de ces coefficients est donc fiable. Les écarts-types des coefficients de masse ajoutée sont plus élevés car la masse ajoutée reste toujours difficile à évaluer pour le mouvement de roulis (faible valeur par rapport aux mouvements de pilonnement ou de tangage par exemple).

D'un point de vue global, le coefficient d'amortissement total du navire est 2.5 fois plus grand lorsque les ailerons sont actifs. Au contraire, aucune différence significative du coefficient de masse ajoutée n'est observée entre les deux situations (ratio de 0.97). Ainsi, les rapports d'amortissement évalués par les simulations sont de 8.0% lorsque les ailerons de stabilisation sont passifs et 19.9% lorsqu'ils sont actifs.

De manière générale, les figures E.5.18 et E.5.19 montrent que les différents appendices s'opposent au mouvement de roulis. Seule la carène devient motrice au début de chaque oscillation du fait des efforts hydrostatiques. En dehors des ailerons de stabilisation, les appendices qui contribuent le plus au moment de roulis sont les safrans. Les arbres et leurs chaises, ainsi que les quilles anti-roulis contribuent également de façon significative mais à un ordre de grandeur inférieur. Les contributions de la quille peuvent, quant à elles, être négligées. Lorsque les ailerons de stabilisation sont passifs, la somme des deux ailerons à l'amortissement linéaire est de l'ordre de 18.8%. Lorsqu'ils sont actifs, cette somme atteint 47.2%. Il est important de préciser que ces valeurs sont basées sur l'intégration des efforts sur les appendices concernés. Elles ne prennent donc pas en compte la modification des efforts fluides sur la carène du fait de leur présence.

Lors des simulations, la masse ajoutée du navire a été évaluée pour initialiser correctement la matrice de masse ajoutée artificielle utilisée au sein de l'algorithme de couplage. Il n'a pas été jugé nécessaire de mettre à jour cette matrice de masse ajoutée artificielle au cours des simulations. Par conséquent, seule sa valeur à fréquence infinie et en équilibre hydrostatique est connue. La décomposition du moment s'exerçant sur la totalité du navire en une partie proportionnelle à la vitesse et une partie proportionnelle à l'accélération (les efforts hydrostatiques étant retranchés au préalable) amène à une masse ajoutée en roulis supérieure de 20% à celle évaluée en début de simulation par la méthode proposée. Il est important de remarquer que la masse ajoutée évaluée par l'analyse du moment fluide prend en compte la position dynamique du navire et les phénomènes de radiation à la fréquence propre du navire. L'ordre de grandeur est donc tout à fait acceptable. Pour valider plus précisément ce résultat, il aurait été nécessaire d'évaluer dynamiquement la masse ajoutée au cours de la simulation ou la comparer à la masse ajoutée calculée par une approche fréquentielle.

Des visualisations du coefficient de pression et de l'élévation de la surface libre sont également proposées à la figure E.5.24 à titre d'illustration.

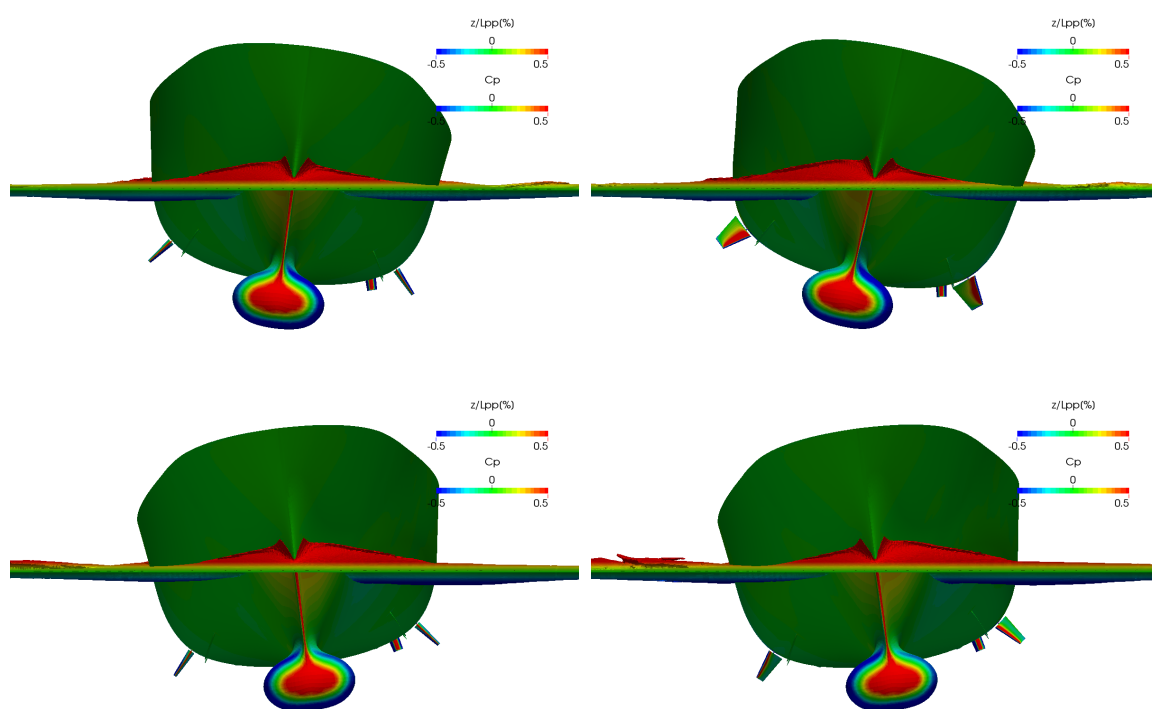
Élément	$B_l^*$		$I_a^*$		$R$
	valeur	$\sigma_{B_l}/B_l$ [%]	valeur	$\sigma_{I_a}/I_a$ [%]	
navire	1.000	0.7	1.000	0.7	0.994
coque	0.335	1.3	0.820	0.5	0.994
appendices	0.665	-	0.180	-	0.987
aileron tribord	0.094	0.2	0.017	1.2	0.999
aileron bâbord	0.094	0.2	0.018	1.1	0.999
safrans	0.282	-	-0.002	-	0.964
arbres et chaises	0.090	-	0.080	-	0.898
quilles anti-roulis	0.085	0.5	0.056	0.7	0.996
quille	0.016	-	0.011	-	0.852

**Tableau E.5.1** : DTMB 5415M – Décomposition des coefficients d'amortissement et de masse ajoutée – Ailerons de stabilisation passifs

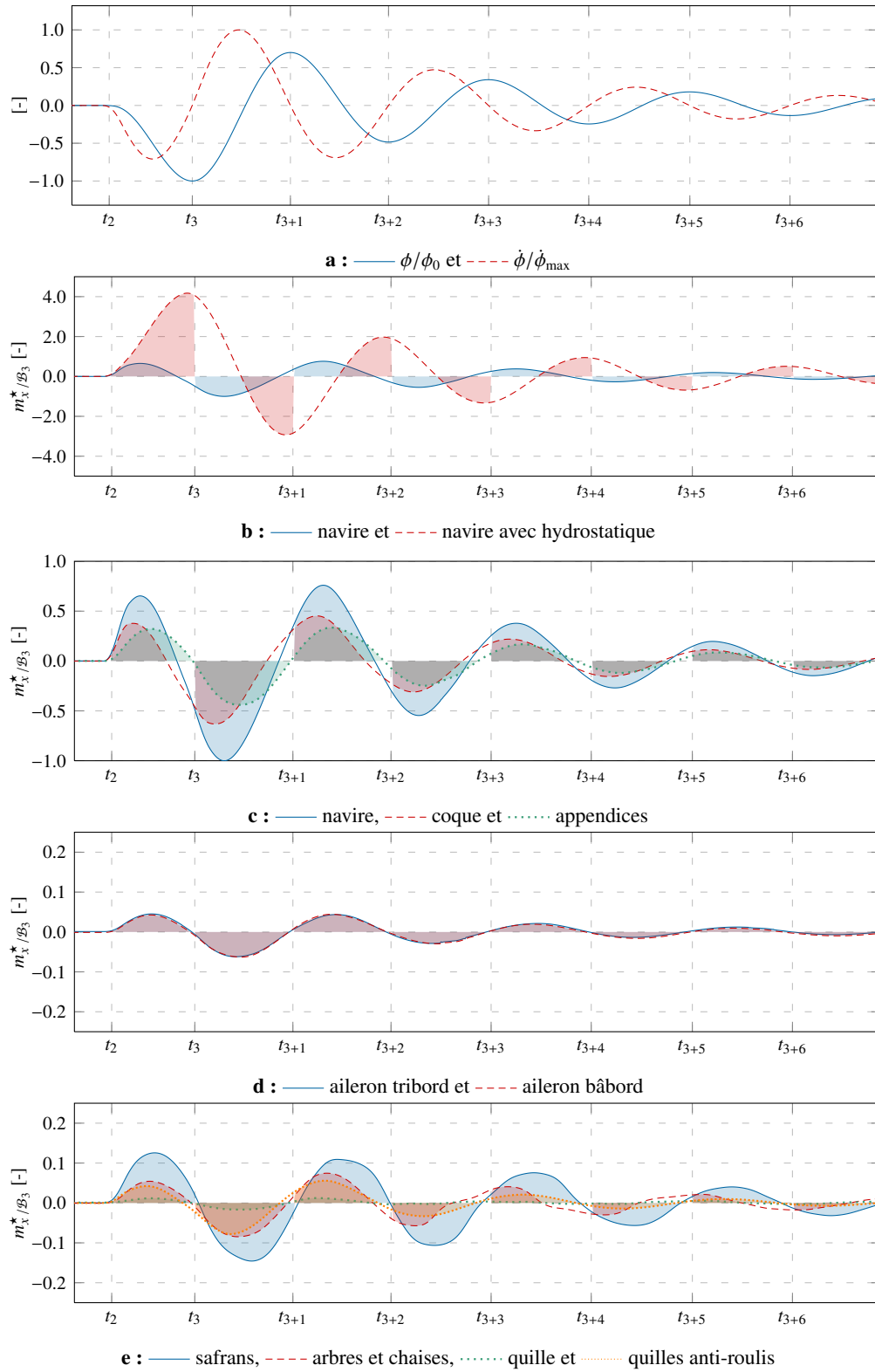


Élément	$B_l^*$		$I_a^*$		$R$
	valeur	$\sigma_{B_l}/B_l$ [%]	valeur	$\sigma_{I_a}/I_a$ [%]	
navire	1.000	0.6	1.000	1.5	0.991
coque	0.209	-	0.817	-	0.985
appendices	0.791	0.5	0.183	5.2	0.992
aileron tribord	0.234	0.4	0.057	3.7	0.996
aileron bâbord	0.238	0.4	0.070	3.1	0.995
safrans	0.185	-	-0.116	-	0.938
arbres et chaises	0.094	-	0.042	-	0.930
quilles anti-roulis	0.024	1.2	0.128	0.6	0.993
quille	0.015	-	0.000	-	0.966

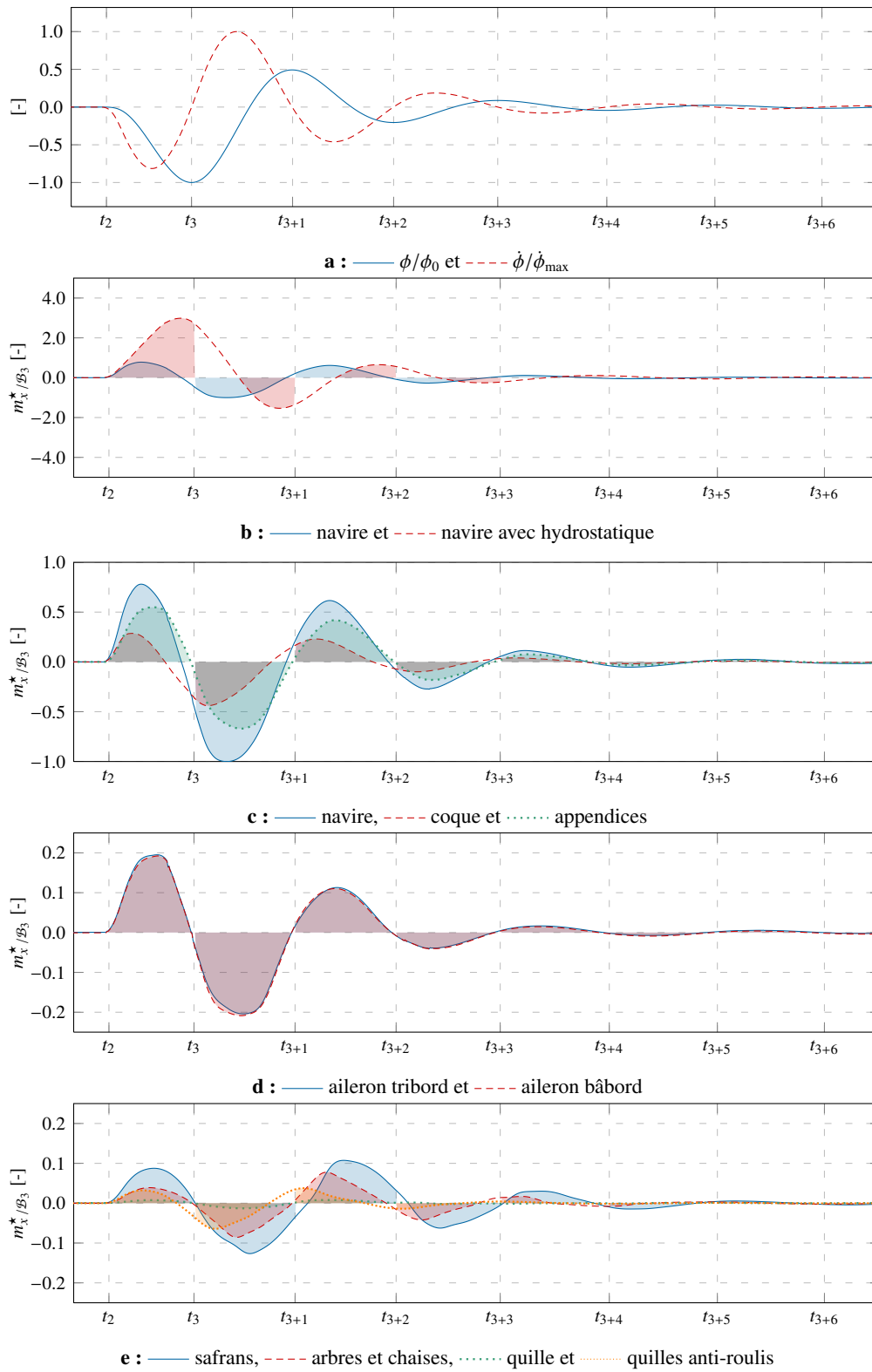
**Tableau E.5.2 :** DTMB 5415M – Décomposition des coefficients d’amortissement et de masse ajoutée – Ailerons de stabilisation actifs



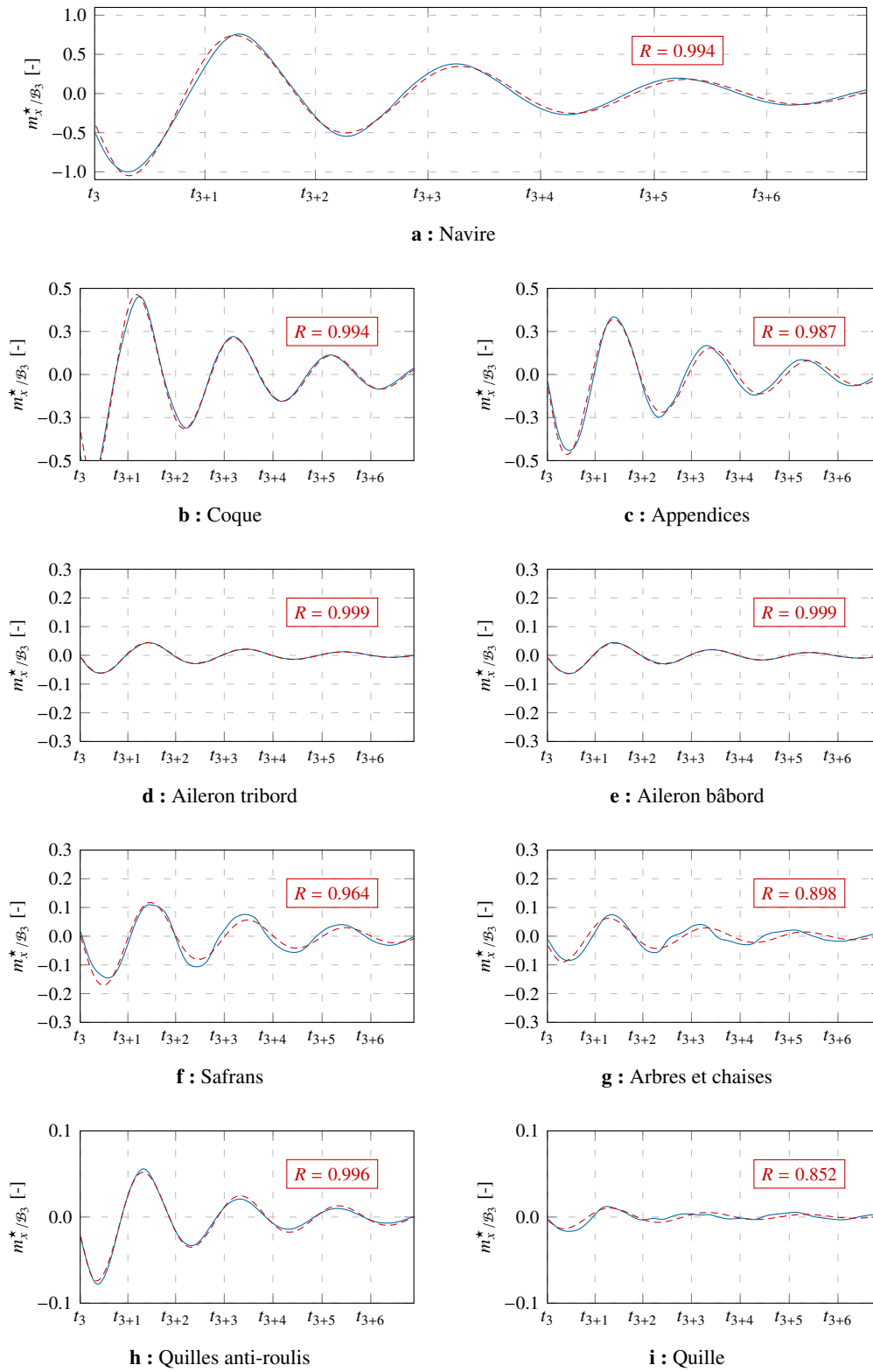
**Figure E.5.24 :** DTMB 5415M – Coefficient de pression et élévation de la surface libre à deux instants différents – Vue de face – Ailerons de stabilisation passifs (gauche) et actifs (droite)



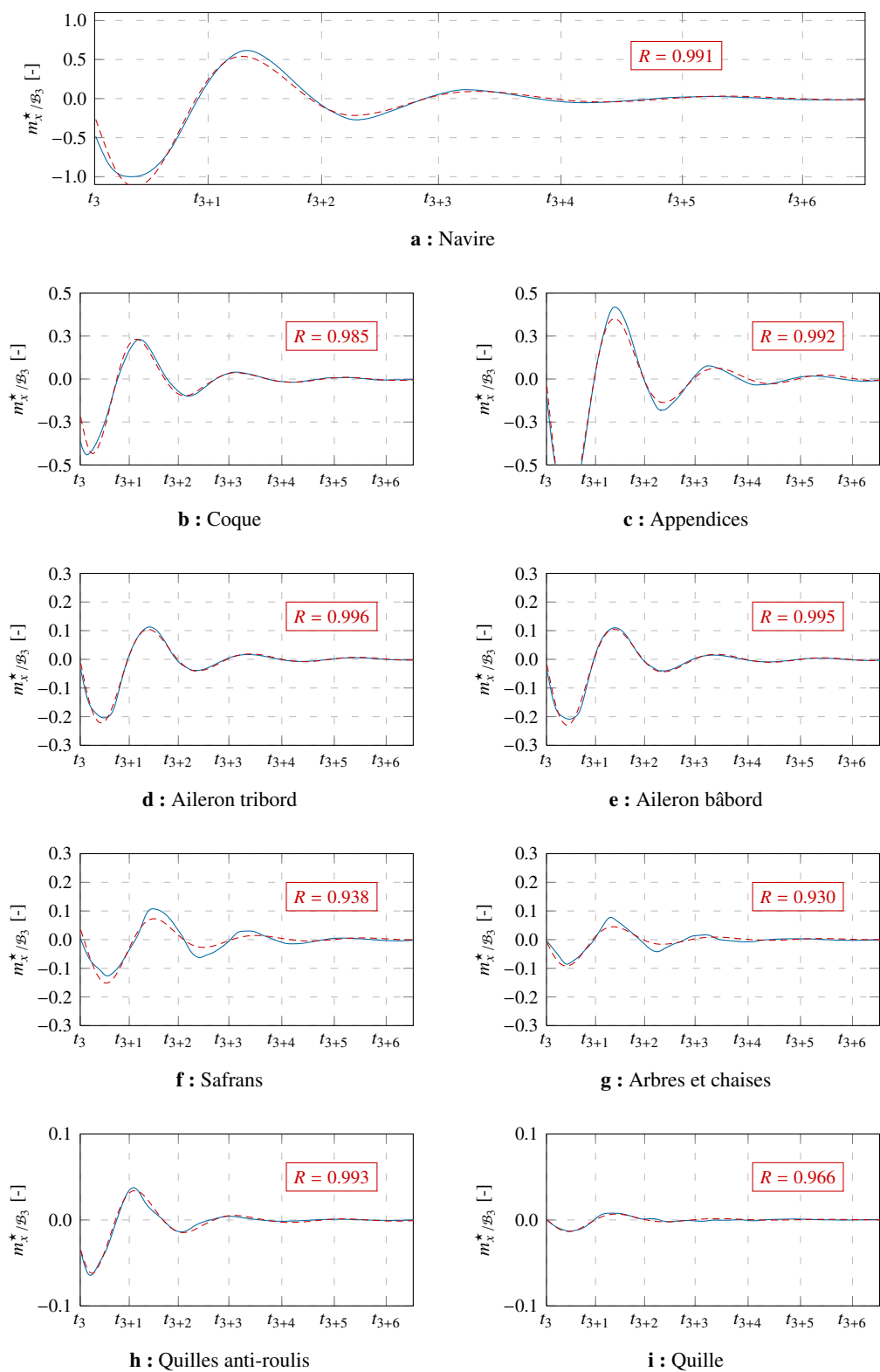
**Figure E.5.25 :** DTMB 5415M – Contribution des différents éléments sur le moment en roulis – Ailerons de stabilisation passifs – Efforts de pression dynamique et de frottement



**Figure E.5.26 :** DTMB 5415M – Contribution des différents éléments sur le moment en roulis – Ailerons de stabilisation actifs – Efforts de pression dynamique et de frottement



**Figure E.5.27 :** DTMB 5415M – Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation passifs – Efforts de pression dynamique et de frottement : — signal et - - - modèle



**Figure E.5.28 :** DTMB 5415M – Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation actifs – Efforts de pression dynamique et de frottement : — signal et - - - modèle

### E.5.7 Conclusion

Lors de cette étude, l'amortissement en roulis d'une frégate militaire dotée d'ailerons de stabilisation passifs ou actifs a été étudié. Malgré la très forte complexité de ce type de simulation et les quelques différences avec les essais expérimentaux, les résultats obtenus sont très proches des résultats expérimentaux et ceci, tant du point de vue global (comportement du navire) que local (efforts s'appliquant sur différents appendices). Le couplage entre ISIS-CFD et MBDyn permet donc de simuler un scénario complexe de contrôle d'actionneurs. Il est également important de rappeler que le contrôle d'actionneurs est particulier puisque les étapes de prise en compte des phénomènes de masse ajoutée (stabilisation de l'algorithme de couplage) doivent être modifiées par rapport à un corps libre (cf. section D.5.6.4.4 p. 173). Cela a bien été pris en compte lors de ces simulations.

En outre, tout au long de cette étude, il a été intéressant de disposer de deux solveurs différents pour résoudre ce problème complexe d'interaction fluide-structure. Effectivement, de nombreuses vérifications ont pu être effectuées avant le lancement des simulations. Plus précisément, le modèle mécanique a été validé en réalisant des simulations préliminaires avec uniquement MBDyn. Pour cela, les différents efforts fluides s'exerçant sur le navire ou les ailerons de stabilisation (raideur hydrostatique, amortissement, effort de portance, effort de perturbation) ont été modélisés par différents modèles mathématiques très simples. La cohérence du modèle mécanique, l'obtention de résultats physiques et les différents paramètres numériques (tolérance des solveurs, nombre d'itérations, etc.) ont ainsi été rapidement vérifiés. Grâce à cette nouvelle possibilité, seules trois simulations couplées ont été lancées : une simulation de résistance à l'avancement (validation du modèle fluide) et deux simulations de production (ailerons passifs et actifs). Pour information, les simulations de production ont été réalisées sur une centaine de processeurs et chaque simulation a nécessité cinq à six jours de calcul.

## E.6 Un navire amarré dans un canal

### Liste des figures de l'application

E.6.1	Carènes . . . . .	291
E.6.2	Géométries . . . . .	291
E.6.3	Domaine de calcul – Vue de face . . . . .	292
E.6.4	Domaine de calcul – Vue de haut . . . . .	292
E.6.5	Mouvements des différents sous-domaines . . . . .	293
E.6.6	Plan d'amarrage . . . . .	293
E.6.7	Principe de fonctionnement et effort de réaction d'une défense tronconique . . . . .	294
E.6.8	Position longitudinale du navire en transit en fonction de $t_p$ . . . . .	295
E.6.9	Efforts fluides s'exerçant sur le navire amarré . . . . .	295
E.6.10	Cinématique du navire amarré . . . . .	296
E.6.11	Efforts de réaction pour une défense tronconique . . . . .	296
E.6.12	Tensions dans les amarres . . . . .	297
E.6.13	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.00$ . . . . .	298
E.6.14	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.25$ . . . . .	298
E.6.15	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.50$ . . . . .	298
E.6.16	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.75$ . . . . .	299
E.6.17	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.00$ . . . . .	299
E.6.18	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.25$ . . . . .	299
E.6.19	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.50$ . . . . .	300
E.6.20	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.75$ . . . . .	300
E.6.21	Coefficient de pression – Vue de biais – $t_p = 1.00$ . . . . .	300

### Liste des tableaux de l'application

E.6.1	Caractéristiques des navires . . . . .	292
E.6.2	Caractéristiques des amarres utilisées . . . . .	294
E.6.3	Caractéristiques des amarres utilisées . . . . .	294

### Liste des figures de l'application en annexe

G.6.4.1	Maillage – Navire amarré . . . . .	411
G.6.4.2	Maillage – Navire en transit . . . . .	411
G.6.4.3	Maillage – Vue de face . . . . .	411
G.6.4.4	Maillage – Vue de dessus . . . . .	411

### E.6.1 Description

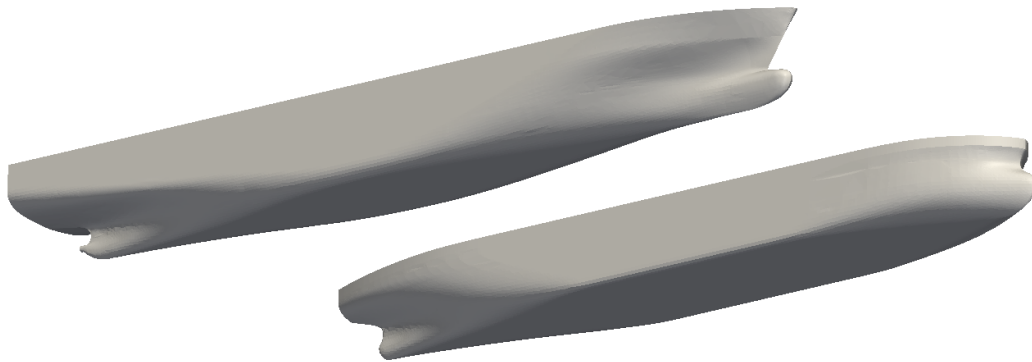
La présente étude a été réalisée pour illustrer les capacités de la chaîne de calcul à modéliser un système mécanique complexe. C'est donc une étude de faisabilité et non pas une étude de validation au sens strict du terme. Elle est basée sur un rapport effectué par la société SIREHNA [Sirehna, 2003]. La situation générale est la suivante : un navire à fort tonnage est amarré à un poste de déchargement. Au même instant, un autre navire transite au droit de ce poste de déchargement. L'excitation hydrodynamique sur le navire amarré produite par le navire en transit peut, sous certaines conditions, amener à des ruptures d'amarres.

Lors de l'étude réalisée en 2003, il avait été demandé à la société SIREHNA d'identifier les phénomènes et paramètres pouvant provoquer ces ruptures. Plusieurs configurations critiques ont été répertoriées et analysées avec une approche simplifiée (modélisation des efforts hydrodynamiques par des modèles simplifiés, évaluation des coefficients hydrodynamiques par le code de calcul potentiel AQUA+, résolution du problème mécanique par un code généraliste, etc.). L'objectif principal de cette étude est de démontrer que les travaux réalisés au cours de cette thèse permettent d'étudier ce type de situation sans que des simplifications trop importantes soient utilisées.

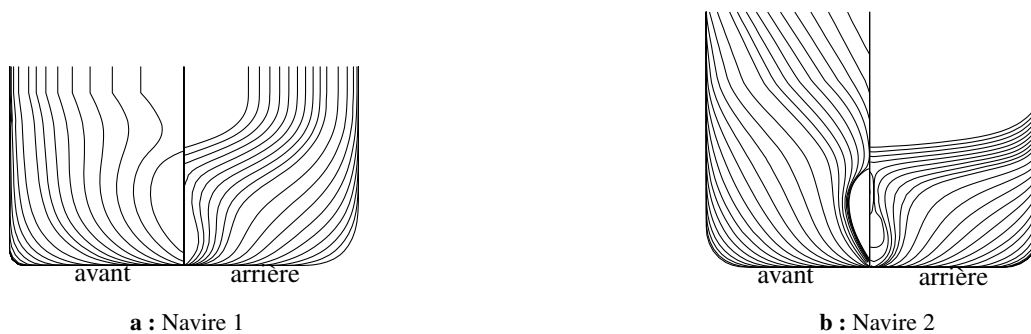
Il est important de remarquer que certains paramètres ont volontairement été modifiés afin d'augmenter les chances de voir apparaître des ruptures d'amarres : vitesse du navire transitant élevée (au-dessus de la limite réglementaire), diamètre des amarres, distance entre murailles, etc.

### E.6.2 Caractéristiques des navires

Lors de l'étude réalisée en 2003, les résultats sont présentés en fonction de valeurs statistiques des caractéristiques générales des différents navires (longueur, largeur, déplacement, etc.). Les géométries sont, quant à elles, très diverses. Par conséquent, il a été choisi d'utiliser des carènes couramment employées pour la validation des codes CFD et ressemblant au type de navire concerné (tanker et porte-conteneurs). Ces carènes ont été modifiées pour que leurs caractéristiques générales soient proches d'une des configurations critiques rapportées pendant l'étude de 2003. Ainsi, le navire amarré est représenté par le tanker KVLCC2 et le navire transitant par un porte-conteneurs de type KCS. Les caractéristiques initiales de ces navires et celles obtenues après modification sont présentées au tableau E.6.1. Certaines quantités inconnues ont été évaluées à partir des recommandations habituelles de l'ITTC (les rayons d'inertie notamment). Le navire amarré est noté 1 et le navire en transit est noté 2 dans la suite de cette étude. Des visualisations de ces derniers sont proposées aux figures E.6.1 et E.6.2.



**Figure E.6.1** : Un navire amarré dans un canal – Carènes – Navire 1 (droite) et navire 2 (gauche)



**Figure E.6.2** : Un navire amarré dans un canal – Géométries

### E.6.3 Domaine de simulation et degrés de liberté des navires

Le domaine de simulation est présenté aux figures E.6.3 et E.6.4. Les dimensions sont données en mètre. Les proportions réelles sont gardées. Le domaine de simulation est composé de quatre sous-domaines notés A, B, C et D (cf. figure E.6.4 page suivante). Les mouvements des différents sous-domaines sont présentés à la figure E.6.5 et évalués directement par MBDyn pour simplifier la mise en donnée. Cette disposition permet de prendre en compte des croisements de navires (un des navires étant ici à l'arrêt).

La vitesse finale du navire en transit est imposée à 7 nd ( $3.6 \text{ m.s}^{-1}$ ). Elle est obtenue par une rampe sinusoïdale. Cette vitesse maximale est atteinte bien avant que les domaines B et C soient en contact avec les domaines A



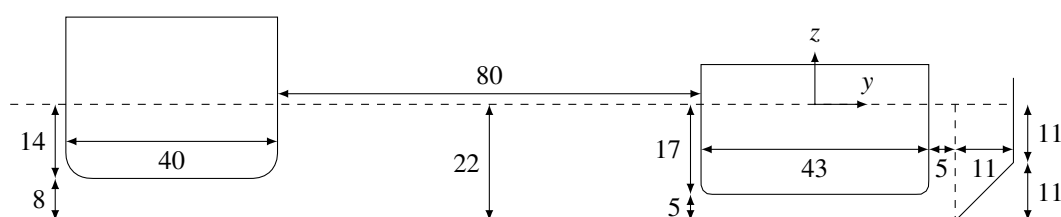
Paramètre	navire 1		navire 2		Unité
	Original	Modifié	Original	Modifié	
$L_{PP}$	320	280	230	300	m
B	58.0	43.0	32.2	40.0	m
T	20.8	17.0	10.8	14.0	m
échelle $x$	1.0	0.875	1.0	1.304	-
échelle $y$	1.0	0.741	1.0	1.242	-
échelle $z$	1.0	0.817	1.0	1.296	-
$\nabla$	$3.13 \cdot 10^5$	$1.66 \cdot 10^5$	$5.20 \cdot 10^4$	$1.09 \cdot 10^5$	$m^3$
$CB$	0.81	0.81	0.65	0.65	-
$S_W$	$1.68 \cdot 10^4$	$1.09 \cdot 10^4$	$6.16 \cdot 10^3$	$9.97 \cdot 10^3$	$m^2$
GM	5.71	5.71	0.60	0.60	m
$I_\Delta$	$4.22 \cdot 10^6$	$1.50 \cdot 10^6$	$4.70 \cdot 10^5$	$1.18 \cdot 10^6$	$m^4$
$r_x/B$	0.4	0.4	0.4	0.4	-
$r_y/L_{PP}$	0.25	0.25	0.25	0.25	-
$r_z/L_{PP}$	0.25	0.25	0.25	0.25	-
m	$3.13 \cdot 10^8$	$1.66 \cdot 10^8$	$5.20 \cdot 10^7$	$1.09 \cdot 10^8$	kg
$I_x$	$1.68 \cdot 10^{11}$	$4.91 \cdot 10^{10}$	$8.63 \cdot 10^9$	$2.79 \cdot 10^{10}$	$kg \cdot m^2$
$I_y$	$2.00 \cdot 10^{12}$	$8.13 \cdot 10^{11}$	$1.72 \cdot 10^{11}$	$6.14 \cdot 10^{11}$	$kg \cdot m^2$
$I_z$	$2.00 \cdot 10^{12}$	$8.13 \cdot 10^{11}$	$1.72 \cdot 10^{11}$	$6.14 \cdot 10^{11}$	$kg \cdot m^2$
KG	-	8.90	-	7.69	m

**Tableau E.6.1 :** Un navire amarré dans un canal – Caractéristiques des navires

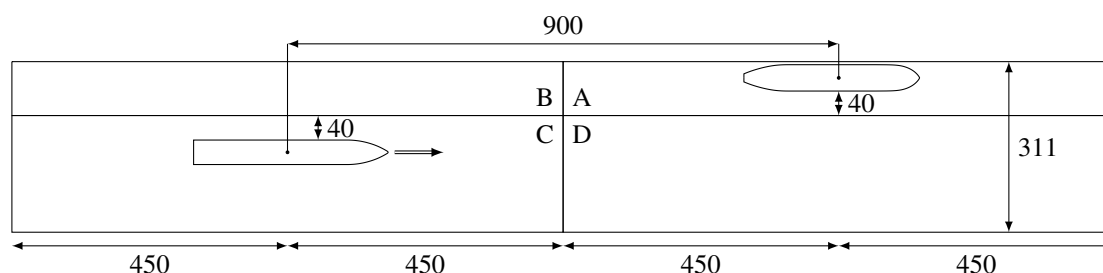
et D. Les autres degrés de liberté du navire en transit sont bloqués (enfouissement et assiette dynamique nulles en particulier). Le nombre de Froude est de l'ordre de 0.07 lorsque la longueur de référence est la longueur de ce navire et de 0.25 lorsque c'est la profondeur d'eau qui est considérée.

Les six degrés de liberté du navire amarré sont, quant à eux, totalement libres. Seules les amarres et des défenses permettent de le maintenir proche de sa position initiale (cf. section E.6.4 page suivante). Le domaine contenant ce navire étant globalement fixe, les mouvements du navire amarrés sont pris en compte par une déformation du maillage fluide.

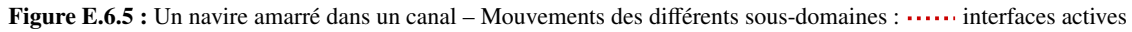
Au total, le maillage est composé de 5.4 millions de cellules. Des visualisations de ce dernier sont proposées en annexe (cf. annexe G.6.4.1 p. 411).



**Figure E.6.3 :** Un navire amarré dans un canal – Domaine de calcul – Vue de face – Navire 1 (droite) et navire 2 (gauche)



**Figure E.6.4 :** Un navire amarré dans un canal – Domaine de calcul – Vue de haut – Navire 1 (haut) et navire 2 (bas)



Le plan d'amarrage utilisé comporte 16 amarres (cf. figure E.6.6). C'est un plan d'amarrage classique [OCIMF, 1997]. Le choix des amarres s'est basé sur deux points. En effet, il est intéressant de vérifier que la chaîne de calcul puisse prendre en compte des mouvements importants ainsi que des ruptures d'amarre. Pour cela, des amarres en Dyneema®<sup>18</sup> (amarres moins raides que celles en acier) dont le diamètre  $\varnothing$  vaut 40 mm sont utilisées. Les caractéristiques de ces amarres sont données au tableau E.6.2 où MBL est la limite à la rupture (« Minimal Breaking Load »),  $\rho_l$  la masse linéique et  $k$  la raideur. Il est important de remarquer que les diamètres disponibles à ce poste de déchargement sont de l'ordre de 70 – 80 mm pour les amarres en Dyneema®. L'effort de prétension des traversiers (amarres 3 à 6 et 11 à 14) est de l'ordre de 10 tonnes alors que celle des amarres restantes est de l'ordre de 5 tonnes (valeurs utilisées lors de la précédente étude). Ces valeurs sont légèrement modifiées afin que la somme des efforts soit nulle selon l'axe longitudinal à l'état initial. Ces différentes valeurs sont résumées au tableau E.6.3 où  $d$  est la distance entre les deux points d'amarrage,  $L$  la longueur réelle de l'amarre,  $T_0$  l'effort de prétension et les points d'amarrage 1 et 2 sont respectivement les points d'amarrage sur le quai et sur le navire. Le repère d'expression des positions est le repère positionné au niveau de la surface libre et à la verticale du centre de volume du navire 1 (cf. figures E.6.3 page suivante et E.6.6). Une amarre est modélisée par un ensemble de huit corps rigides possédant des liaisons de type « barre » (raideur uniquement en traction-compression). Le fait de modéliser une amarre par plus que 2 corps permet de prendre en compte la perte de raideur lorsque la distance entre les deux points d'amarrage est inférieure à la longueur de l'amarre. Les ruptures d'amarres sont modélisées par une rupture de la liaison qui existe entre deux corps rigides si la tension dans cette dernière est supérieure à la MBL.

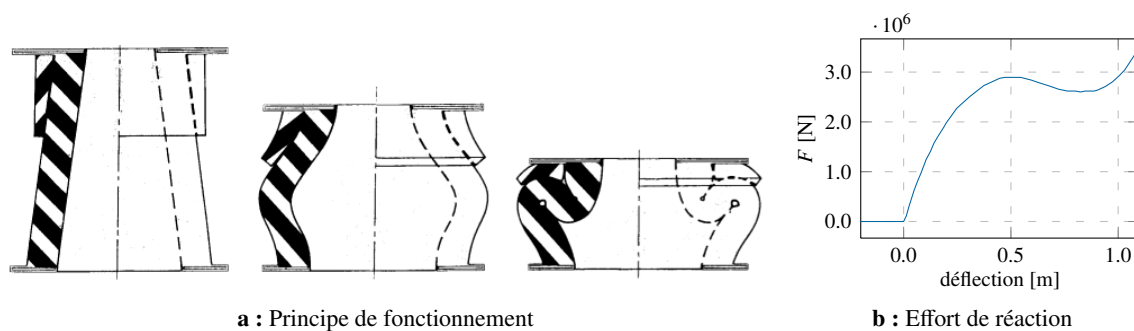
18. Amarres Ultraline HMPE USD12 construída por BEXCO [BEXCO].

Paramètre	Valeur	Unité
$\varnothing$	40	mm
MBL	1 103	kN
$\rho_l$	0.88	kg.m <sup>-1</sup>
$k$	441.2	kN.m <sup>-1</sup>

**Tableau E.6.2 :** Un navire amarré dans un canal – Caractéristiques des amarres utilisées

Amarre	point d'amarrage 1			point d'amarrage 2			d [m]	L [m]	T <sub>e</sub> <sup>0</sup> /MBL [%]
	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]			
1	-180.0	36.5	2.50	-154.82	0.00	7.51	44.6	44.5	4.0
2	-180.0	36.5	2.50	-154.82	3.00	7.51	42.2	42.1	4.0
3	-160.0	76.5	2.50	-142.24	11.37	7.51	67.7	67.5	8.4
4	-160.0	76.5	2.50	-139.09	12.42	7.51	67.6	67.4	8.4
5	-130.0	76.5	2.50	-132.49	14.43	7.51	62.3	62.1	9.4
6	-130.0	76.5	2.50	-129.31	15.31	7.51	61.4	61.2	9.4
7	0.0	25.5	2.50	-33.00	21.51	7.51	33.6	33.5	4.9
8	0.0	25.5	2.50	-30.00	21.51	7.51	30.7	30.6	4.9
9	50.0	25.5	2.50	96.79	20.39	7.51	47.3	47.2	4.0
10	50.0	25.5	2.50	99.39	20.03	7.51	49.9	49.8	4.0
11	100.0	76.5	2.50	118.13	13.68	7.51	65.6	65.4	8.4
12	100.0	76.5	2.50	120.50	12.23	7.51	67.6	67.4	8.4
13	145.0	76.5	2.50	126.07	7.85	7.51	71.4	71.2	9.4
14	145.0	76.5	2.50	128.21	5.66	7.51	73.0	72.7	9.4
15	160.0	26.5	2.50	129.83	3.70	7.51	38.1	38.0	4.9
16	160.0	26.5	2.50	131.49	1.18	7.51	38.5	38.3	4.9

**Tableau E.6.3 :** Un navire amarré dans un canal – Caractéristiques des amarres utilisées



**Figure E.6.7 :** Un navire amarré dans un canal – Principe de fonctionnement et effort de réaction d'une défense tronconique

### E.6.5 Résultats

Les différents résultats sont présentés en fonction d'un temps adimensionnel  $t_p$ . Ce temps vaut 0 lorsque le navire en transit arrive à la hauteur du navire amarré et vaut 1 lorsque sa proue arrive à l'autre extrémité du navire amarré (cf. figure E.6.8). Dans un premier temps, les différents résultats sont simplement énumérés. Dans un second temps, une rapide analyse est réalisée.

Les résultats proposés sont composés de la cinématique du navire amarré (cf. figure E.6.10 page suivante), une partie des efforts fluides s'exerçant dessus (cf. figure E.6.9), des tensions au sein des amarres (cf. figure E.6.12 p. 297) et des efforts de réaction des défenses (cf. figure E.6.11 page suivante).

Le mouvement le plus important du navire amarré est son mouvement de translation selon l'axe longitudinal dans le sens des  $x$  négatifs (cf. figure E.6.10 page suivante). S'en suit un mouvement d'écartement du quai (sens des  $y$  négatifs) et un mouvement de lacet. Ces deux mouvements apparaissent bien après que le mouvement de translation longitudinal ait commencé. L'enfoncement, ainsi que les mouvements de roulis et de tangage, sont négligeables. Les efforts fluides viennent partiellement confirmer ces observations. En effet, le navire est attiré vers le navire en transit selon la direction longitudinale lorsque le temps adimensionnel est compris entre 0 et 1. Au même instant, il est repoussé vers le quai dans la direction transversale mais les défenses jouent parfaitement leur rôle (cf. figure E.6.11 page suivante) et le repoussent dans un second temps d'où l'éloignement du quai observé). Durant cette même période, certaines amarres se détendent (amarres 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 et 12) alors que les autres se tendent (amarres 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16) conformément à leur direction de travail. La totalité de ces amarres se rompent successivement (les différents plateaux au sein de la figure E.6.12 représentent une rupture). Lorsque le temps adimensionnel est supérieur à 1, il est plus difficile d'analyser les résultats car de nombreuses amarres sont rompues et les effets d'histoire importants.

La cause principale des mouvements du navire amarré est le champ de pression créé par le navire transitant (cf. figures E.6.13 à E.6.21 p. 300) et plus précisément la dépression importante créée sur ses côtés (dépression d'autant plus importante que le clair sous quille du navire en transit est faible). Lorsque le temps adimensionnel est compris entre -0.2 et 0.7 environ, ce champ de pression a tendance à attirer le navire amarré dans le sens des  $x$  négatifs. Au contraire, lorsque le temps adimensionnel est supérieur à 0.7, l'inverse se produit mais l'inertie du navire amarré étant particulièrement importante, il faut attendre un certain temps pour que cet effet se traduise en une inversion de la vitesse de translation longitudinale du navire amarré puisque de nombreuses amarres se sont déjà rompues. La dissymétrie bâbord-tribord du champ de pression permet également d'expliquer l'apparition du moment de lacet.

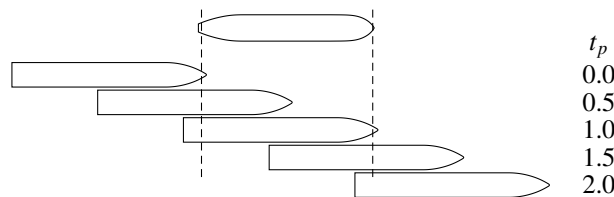


Figure E.6.8 : Un navire amarré dans un canal – Position longitudinale du navire en transit en fonction de  $t_p$

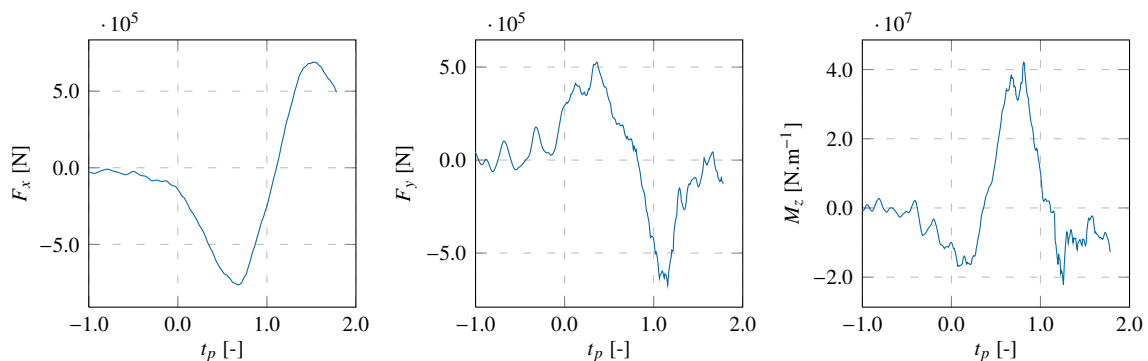
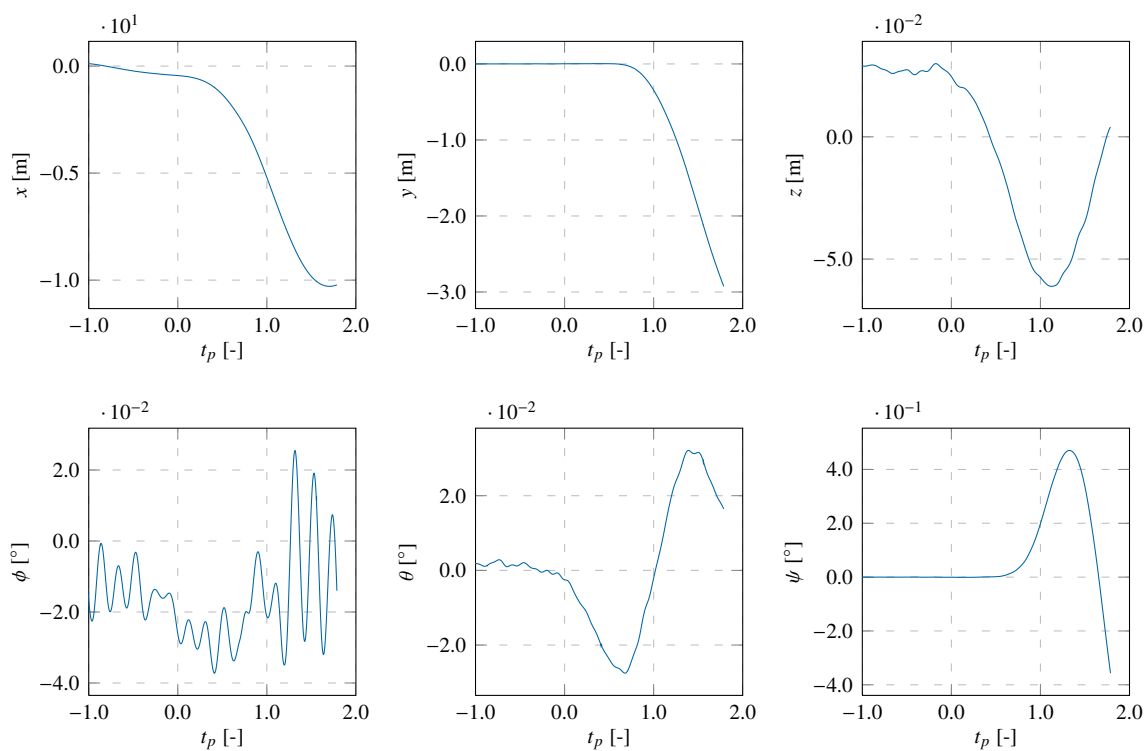
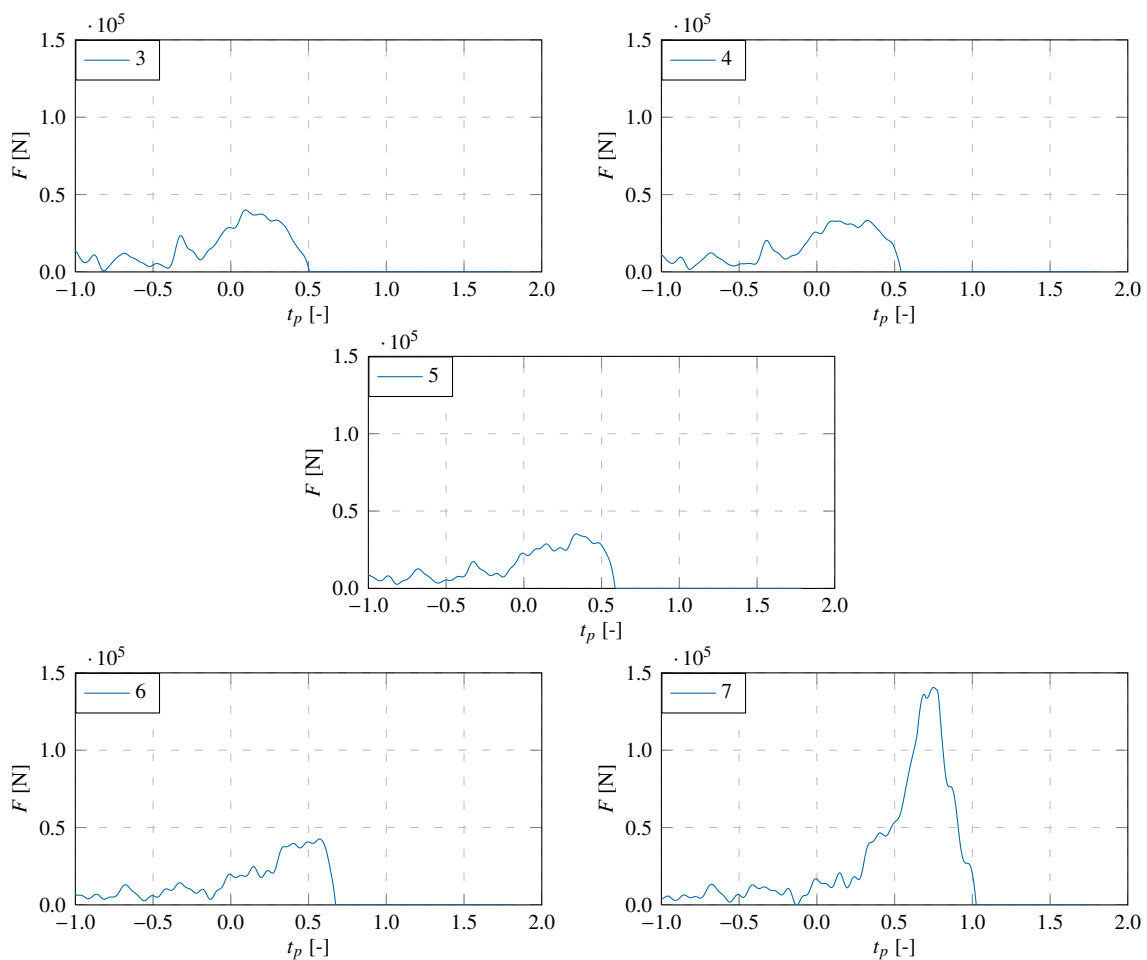


Figure E.6.9 : Un navire amarré dans un canal – Efforts fluides s'exerçant sur le navire amarré



**Figure E.6.10 :** Un navire amarré dans un canal – Cinématique du navire amarré



**Figure E.6.11 :** Un navire amarré dans un canal – Efforts de réaction pour une défense tronconique

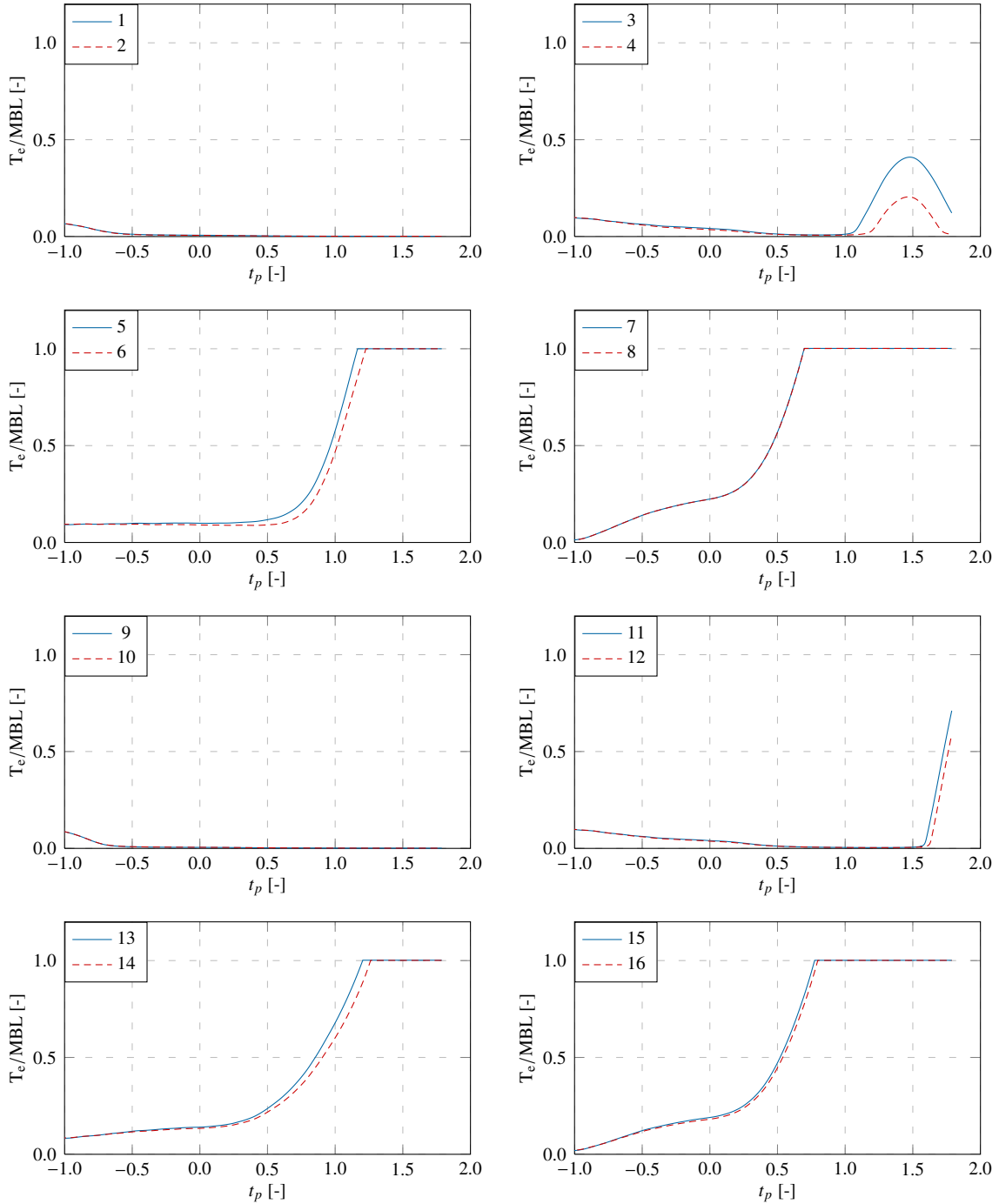
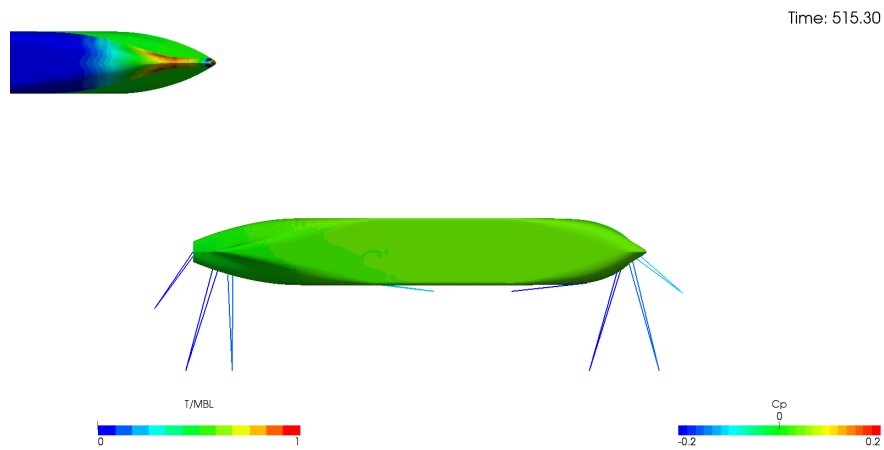
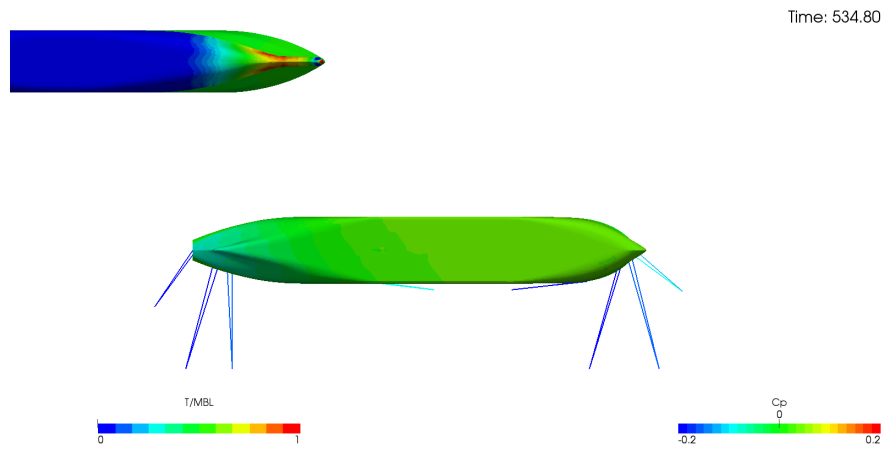


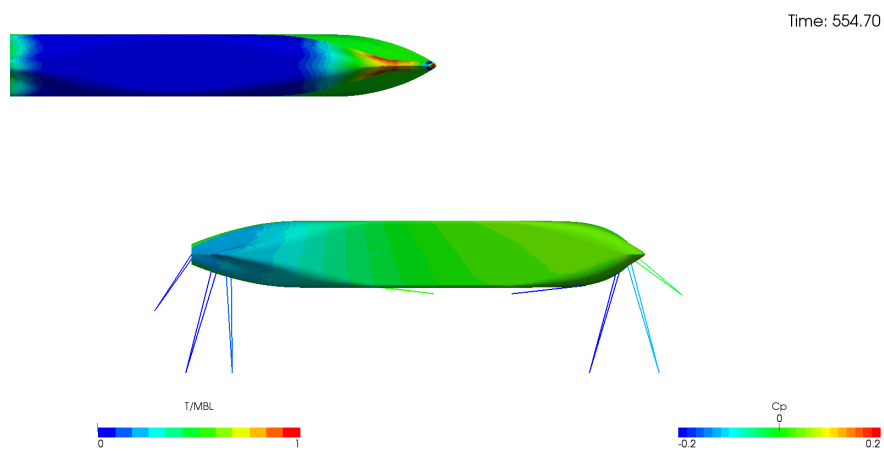
Figure E.6.12 : Un navire amarré dans un canal – Tensions dans les amarres



**Figure E.6.13 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 0.00$



**Figure E.6.14 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 0.25$



**Figure E.6.15 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 0.50$

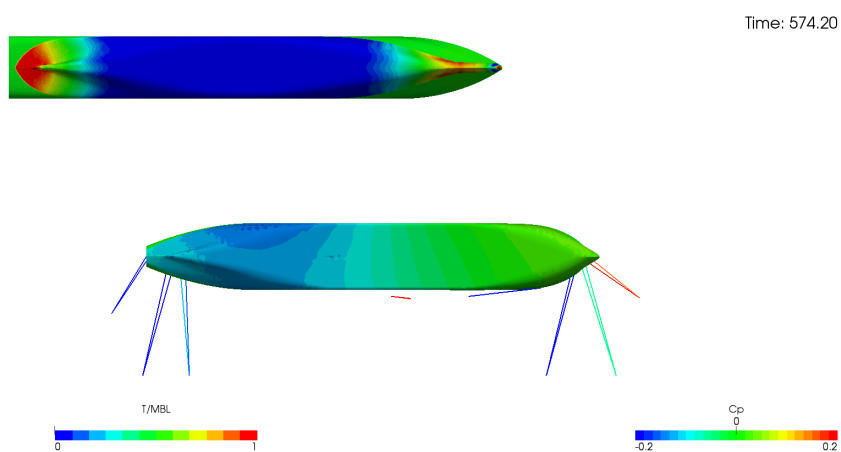


Figure E.6.16 : Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 0.75$

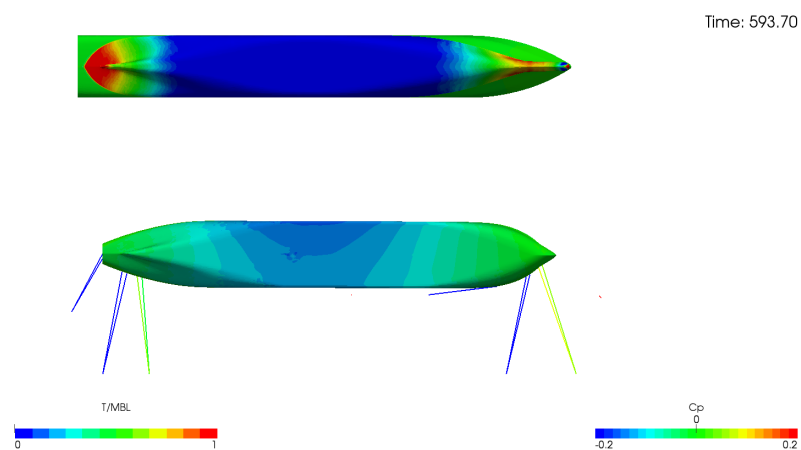


Figure E.6.17 : Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 1.00$

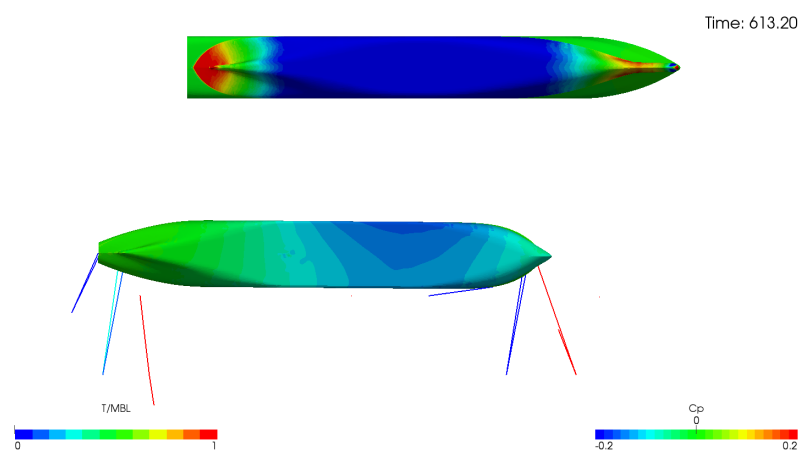
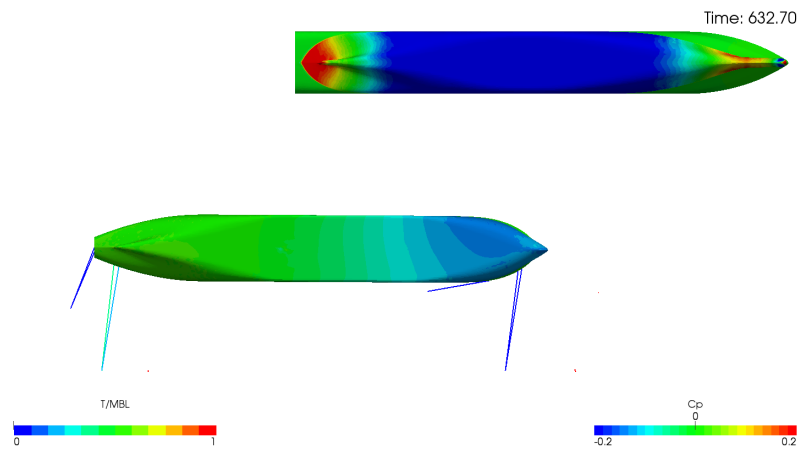
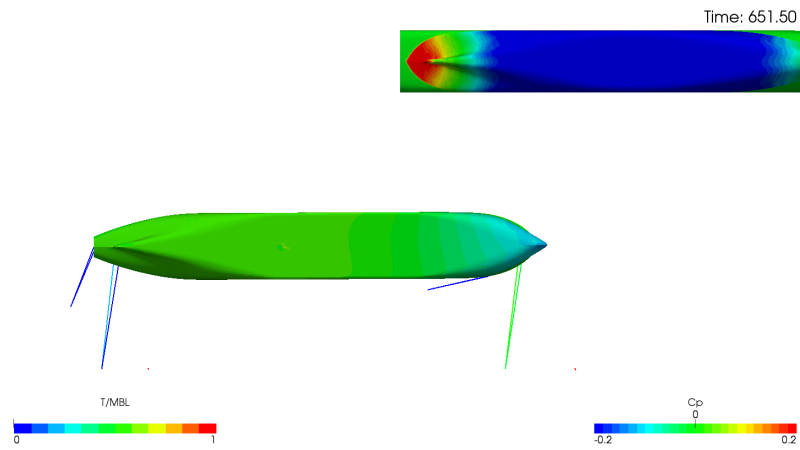


Figure E.6.18 : Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 1.25$

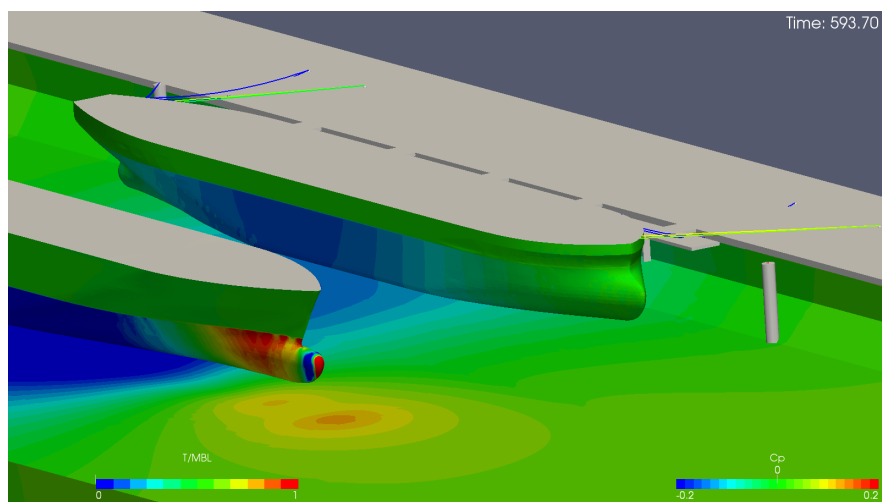




**Figure E.6.19 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 1.50$



**Figure E.6.20 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de dessous –  $t_p = 1.75$



**Figure E.6.21 :** Un navire amarré dans un canal – Coefficient de pression – Vue de biais –  $t_p = 1.00$

### E.6.6 Conclusion

Ce cas d'application est une étude de faisabilité d'une modélisation complexe d'un système mécanique (amarage avec modélisation de rupture, défenses non-linéaires, etc.). Malgré une apparente forte complexité de mise en œuvre, il a été possible, tout au long de la mise en place de cette étude, de valider chaque élément mécanique très rapidement du fait de la séparation entre le solveur fluide et le solveur structure. Cet indéniable avantage a déjà été souligné précédemment (cf. section E.5 p. 270).

Au cours de la simulation, de nombreuses ruptures d'amarres ont été observées. Cependant, quelques paramètres ont été modifiés pour augmenter artificiellement les chances de voir apparaître ces ruptures. Il serait intéressant de corriger ces paramètres pour modéliser une situation plus réaliste. Pour cela, il faudrait diminuer la vitesse du navire en transit et la distance entre navire par exemple.

Il est vrai que l'utilisation d'un solveur Navier-Stokes pour ce type d'application n'est pas réellement nécessaire vu que les efforts hydrodynamiques sont principalement de nature potentielle. Par conséquent, l'utilisation d'un solveur potentiel en lieu et place du solveur Navier-Stokes peut être envisagée pour cet exemple d'application. Néanmoins, la résolution de ce type de problématique avec un solveur potentiel devient nettement plus difficile lorsque la géométrie des berges et du fond (bathymétrie variable) est plus réaliste, lorsque le courant est fort (écoulement fortement instationnaire) ou lorsque des ouvrages maritimes proches sont modélisés (présence de détachement tourbillonnaires par exemple). De manière différente, lorsqu'un navire est amarré au sein d'une écluse, le milieu fluide est le siège de phénomènes complexes lors des phases de remplissage ou de vidange et il y a un très fort couplage entre l'écoulement et la cinématique du navire. De manière générale, les solveurs potentiels ne permettent pas de modéliser fidèlement les phénomènes instationnaires présents.

En conclusion, la chaîne de calcul mise en place peut aider à l'expertise en cas d'incident d'amarrage lié à des phénomènes complexes, servir à la conception ou la vérification de plans et de procédures d'amarrage dans des conditions non standards ou vérifier l'agencement des systèmes de vidange et de remplissage des écluses.

## E.7 Deux simulations avec des poutres flexibles

### Liste des figures de l'application

E.7.1	Poutre 1 – Configuration spatiale et conditions aux limites . . . . .	302
E.7.2	Poutre 1 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	303
E.7.3	Poutre 1 – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante . . . . .	304
E.7.4	Poutre 1 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	304
E.7.5	Poutre 1 – Maillage – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.6	Poutre 1 – Lignes de courant – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.7	Poutre 1 – Coefficient de pression – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.8	Poutre 2 – Configuration spatiale et conditions aux limites . . . . .	305
E.7.9	Poutre 2 – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante . . . . .	306
E.7.10	Poutre 2 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	306
E.7.11	Poutre 2 – Champ de pression et lignes de courant . . . . .	307
E.7.12	Poutre 2 – Champ de vitesse adimensionnelle et iso-lignes de vorticité . . . . .	308

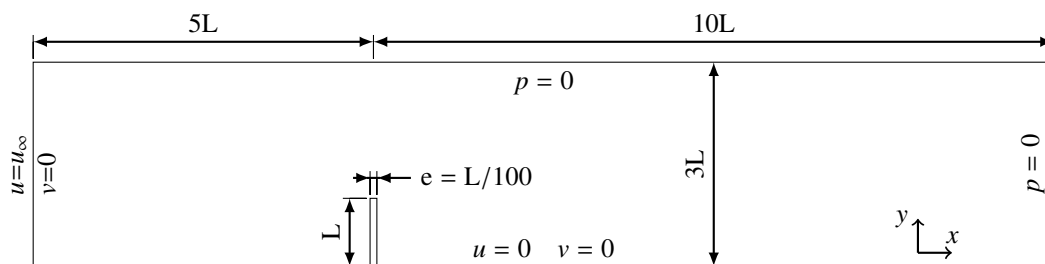
### Liste des tableaux de l'application

E.7.1	Poutre 1 – Paramètres . . . . .	302
E.7.2	Poutre 2 – Paramètres . . . . .	305

### E.7.1 Une poutre encastrée au sein d'un écoulement

#### E.7.1.1 Description

Afin de valider la chaîne de couplage pour une problématique de type poutre rapidement, l'étude d'une poutre encastrée au sein d'un écoulement est réalisée. Ce cas test bidimensionnel a déjà été réalisé avec des chaînes de couplage différentes [De Nayer, 2008] et [Delaitre, 2012]. La configuration est identique à celle utilisée durant ces travaux. La configuration spatiale, les conditions aux limites et les paramètres de la simulation sont donnés à la figure E.7.1 et au tableau E.7.1. La longueur de la poutre est  $L = 1$  m. L'écoulement n'est pas mise en place progressivement. Au début de la simulation, la vitesse au sein du domaine fluide est fixée à la vitesse d'entrée soit  $10 \text{ m.s}^{-1}$ .    l'origine, la première version de ce cas test a été publiée dans [Glück *et al.*, 2001]. Les résultats de la configuration choisie n'étant pas présenté explicitement dans ce document, ce dernier n'est pas utilisé comme référence.



**Figure E.7.1 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Configuration spatiale et conditions aux limites

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
$E_s$	3 500	MPa	$\rho_f$	1	$\text{kg.m}^{-3}$	Cellules	12 100	-
$\rho_s$	1 200	$\text{kg.m}^{-3}$	$\mu_f$	0.2	Pa.s	$\Delta t$	0.01	s
$\nu_s$	0.3	-	$u_\infty$	10	$\text{m.s}^{-1}$	$t_{\max}$	10.0	s
<b>a : Structure</b>			<b>b : Fluide et écoulement</b>			<b>c : Simulation</b>		

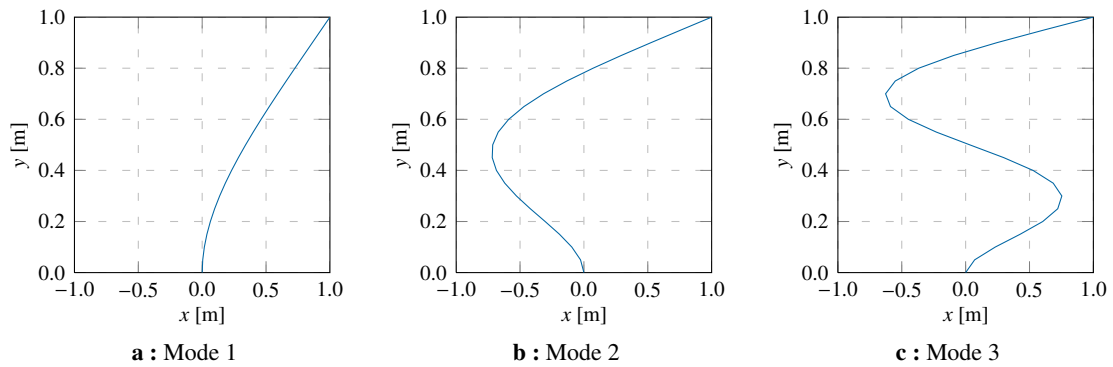
**Tableau E.7.1 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Paramètres

Ce cas de validation est relativement simple puisqu'un état pseudo-stationnaire est obtenu et les déformations de la poutre sont relativement faibles une fois que l'état stationnaire est atteint. De plus, les phénomènes de masse ajoutée étant négligeables, il est possible de ne pas les prendre en compte. C'est ce qui a été réalisé ici car la prise en compte des effets de masse ajoutée n'était pas implémentée lors de la réalisation de cette étude.

La poutre est discrétisée par 21 nœuds soit 10 poutres élémentaires de Timoshenko. Un matériau Hookéen et le coefficient de correction en cisaillement d'une section prismatique sont utilisés (cf. section C.1.5.3 p. 84). Pour la reconstruction de la géométrie, les méthodes d'interpolation de Lagrange et d'Hermite ont été testées (cf. section D.4.3 p. 131). Dans ce cas ci, les résultats sont identiques. Par conséquent, seuls les résultats de la méthode d'interpolation de Lagrange sont présentés. Avant de lancer la simulation, la fréquence et la forme des modes propres (cf. figure E.7.2) en flexion ont été vérifiées (fréquences et modes propres dans le vide). La fréquence de ces modes propres est donnée par :

$$f_i = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho_s AL^4}} \quad (\text{E.7.1})$$

où  $E$  est le module de Young du matériau,  $A$  et  $I_z$  l'aire et le moment d'inertie d'ordre 2 de la section de la poutre,  $L$  la longueur de la poutre et  $k_i$  un coefficient qui dépend du mode concerné (mode  $i$ )<sup>19</sup> [Blevins, 2001]. Analytiquement, les deux premières fréquences propres sont égales à  $2.76 \text{ s}^{-1}$  et  $17.29 \text{ s}^{-1}$ . Une évaluation des fréquences et modes propres par MBDyn donne respectivement  $2.76 \text{ s}^{-1}$  et  $17.21 \text{ s}^{-1}$ . De surcroît, un effort ponctuel<sup>20</sup> a été appliqué à l'extrémité de la poutre et la flèche a été comparée à la solution analytique (cf. section D.4.3.3 p. 134). L'écart observé est de l'ordre de la précision machine car le modèle numérique a été construit de telle sorte que la solution analytique soit obtenue avec un seul élément poutre élémentaire (cf. section C.2.8.3 p. 103).



**Figure E.7.2 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Forme de la poutre à différents instants

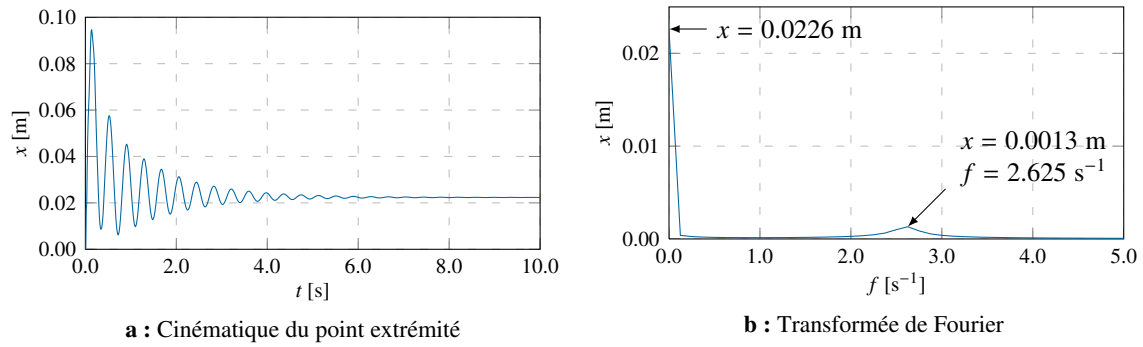
### E.7.1.2 Résultats

La cinématique du point extrémité et la transformée de Fourier correspondante sont proposées à la figure E.7.3. La transformée de Fourier est réalisée à partir de  $t = 2.5 \text{ s}$ . La forme de la poutre déformée est présentée à la figure E.7.4 à différents instants. Des visualisations du maillage, des lignes de courant et du coefficient de pression sont respectivement données aux figures E.7.5, E.7.6 et E.7.7 page suivante.

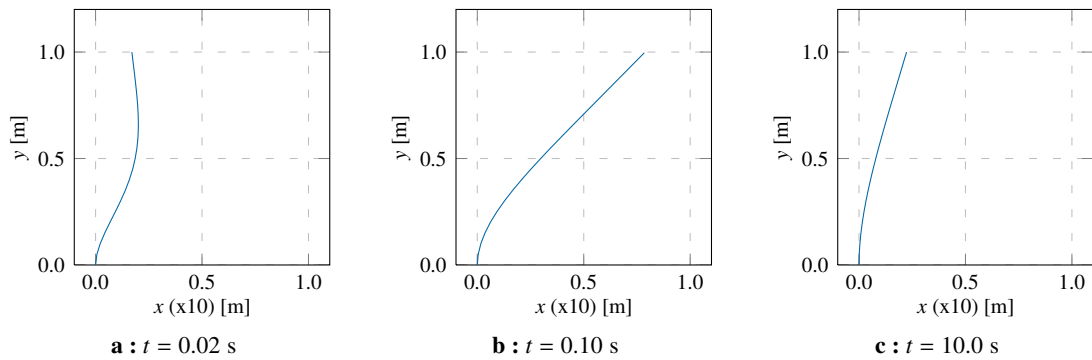
La flèche, c.-à-d. le déplacement horizontal du point extrémité, est de l'ordre de  $2.26 \text{ cm}$ . Ceci est en accord avec les résultats bibliographiques [De Nayer, 2008] et [Delaitre, 2012] qui sont respectivement de l'ordre de  $2.40 \text{ cm}$  et  $2.28 \text{ cm}$ . La fréquence des oscillations est légèrement inférieure à la fréquence du premier mode propre dans l'air du fait de la présence du fluide. En effet, les effets de masse ajoutée ont, d'un point de vue fréquentiel, tendance à diminuer les fréquences propres du fait de l'augmentation fictive de l'inertie de la poutre.

19. Pour information :  $k_1 \approx 1.87510$ ,  $k_2 \approx 4.69409$  et  $k_3 \approx 7.85473$ .

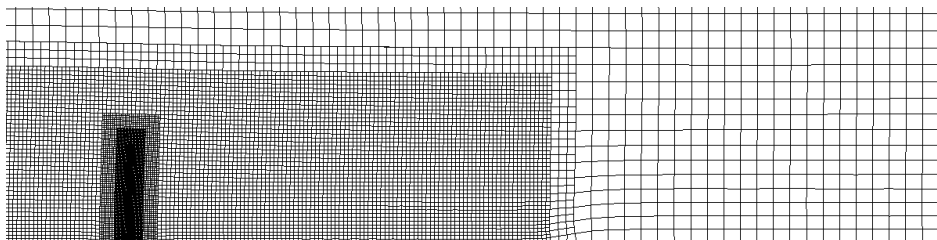
20. Cet effort est suffisamment petit pour que les conditions de la solution analytique soient respectées.



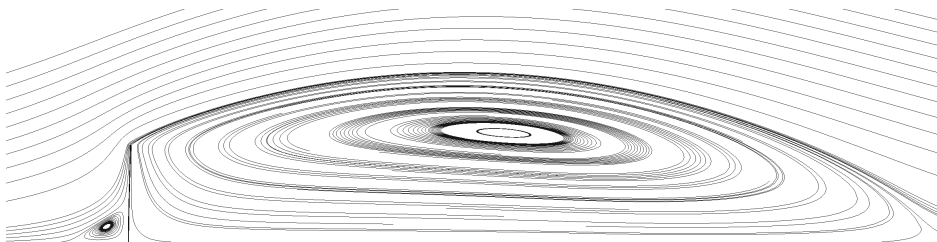
**Figure E.7.3 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante



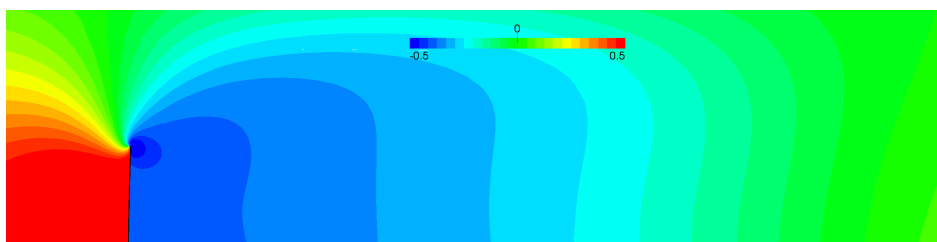
**Figure E.7.4 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Forme de la poutre à différents instants (les proportions sont respectées)



**Figure E.7.5 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Maillage –  $t = 10$  s



**Figure E.7.6 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Lignes de courant –  $t = 10$  s



**Figure E.7.7 :** Une poutre encastrée au sein d'un écoulement – Coefficient de pression –  $t = 10$  s

### E.7.1.3 Conclusion

Cette première étude a été réalisée pour valider les premiers développements réalisés dans le cadre des corps flexibles de type poutre. La flèche de la poutre est en accord avec les résultats obtenus dans d'autres travaux. Pour obtenir des valeurs de référence réellement pertinentes, il serait nécessaire de bien déterminer la totalité des paramètres utilisés (conditions aux limites, modèle de poutre utilisé, utilisation du coefficient de correction en cisaillement, etc.) car cela n'est pas toujours précisé.

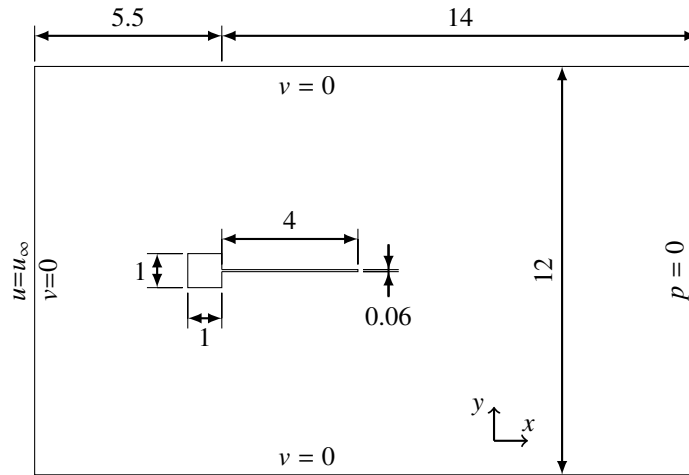
## E.7.2 Un appendice flexible au sein d'un écoulement

### E.7.2.1 Description

Ce cas test bidimensionnel peut être considéré comme un cas de validation classique pour les problématiques de couplage fluide-structure dans le domaine des corps flexibles élancés du fait de sa très grande popularité [Wall et Ramm, 1998], [Steindorf, 2002], [Hermann et Jan, 2003], [Dettmer et Perić, 2007], [Dettmer et Perić, 2008], [Kassiotis, 2009], [Yvin, 2010] et [Delaitre, 2012].

Un appendice flexible de forme rectangulaire est placé derrière un carré indéformable. Des lâchers tourbillonnaires au niveau des sommets du carré vont créer successivement des dépressions et surpressions au niveau de l'appendice ce qui va exciter la partie flexible (cf. figure E.7.8). Les caractéristiques du fluide et de l'appendice ont été choisies de telle sorte que la fréquence des lâchers tourbillonnaires soit proche des deux premières fréquences propres de l'appendice (dans le vide toujours).

La configuration spatiale, les conditions aux limites et les paramètres de la simulation sont donnés à la figure E.7.8 et au tableau E.7.2.



**Figure E.7.8 :** Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Configuration spatiale et conditions aux limites

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
$E_s$	2.5	MPa	$\rho_f$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	kg.m <sup>-3</sup>	Cellules	47 500	-
$\rho_s$	0.1	kg.m <sup>-3</sup>	$\mu_f$	$1.82 \cdot 10^{-4}$	Pa.s	$\Delta t$	0.002	s
$\nu_s$	0.35	-	$u_\infty$	51.3	m.s <sup>-1</sup>	$t_{\max}$	12.5	s
<b>a : Structure</b>			<b>b : Fluide et écoulement</b>			<b>c : Simulation</b>		

**Tableau E.7.2 :** Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Paramètres

Afin de garantir la convergence de la simulation, la matrice de masse ajoutée artificielle de chaque nœud a été fixée arbitrairement à sa matrice de masse ce qui consiste à utiliser un coefficient de relaxation de 0.5.

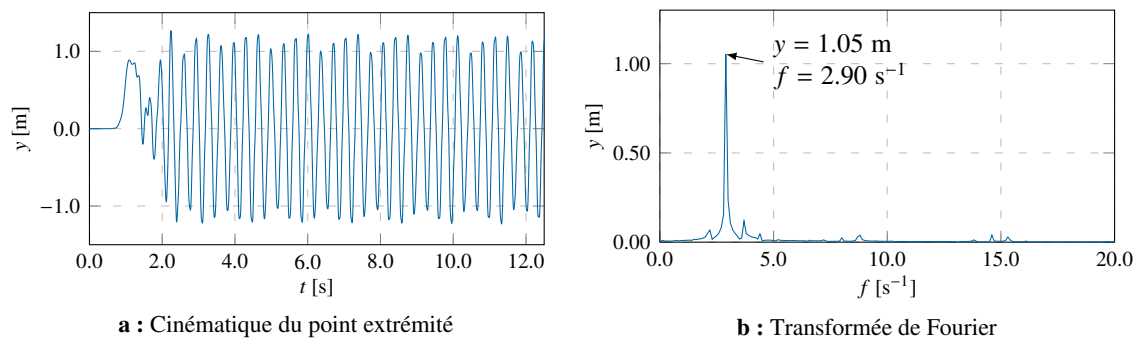
La poutre est discrétisée par 21 nœuds soit 10 poutres élémentaires de Timoshenko. Un matériau Hookéen et le coefficient de correction en cisaillement d'une section prismatique sont utilisés. Pour la reconstruction de la géométrie, seule la méthode d'interpolation de Lagrange a été testée. De manière identique au cas précédent, la fréquence et la forme des modes propres en flexion ont été vérifiées. Analytiquement, les deux premières fréquences propres sont égales à  $3.03 \text{ s}^{-1}$  et  $18.99 \text{ s}^{-1}$ . Une évaluation des fréquences et modes propres par MBDyn donne respectivement  $3.03 \text{ s}^{-1}$  et  $18.95 \text{ s}^{-1}$ . la forme des modes propres est identique au cas précédent.

Pour information, le nombre de Reynolds basé sur la longueur du carré vaut 330. Le nombre de Strouhal d'un écoulement bidimensionnel derrière un carré est de l'ordre de 0.13 pour cette valeur du nombre de Reynolds [Breuer *et al.*, 2000] (cf. annexe G.5.2 p. 357). Par conséquent, la fréquence des lâchers tourbillonnaires sans la présence de l'appendice est proche de  $6.7 \text{ s}^{-1}$ .

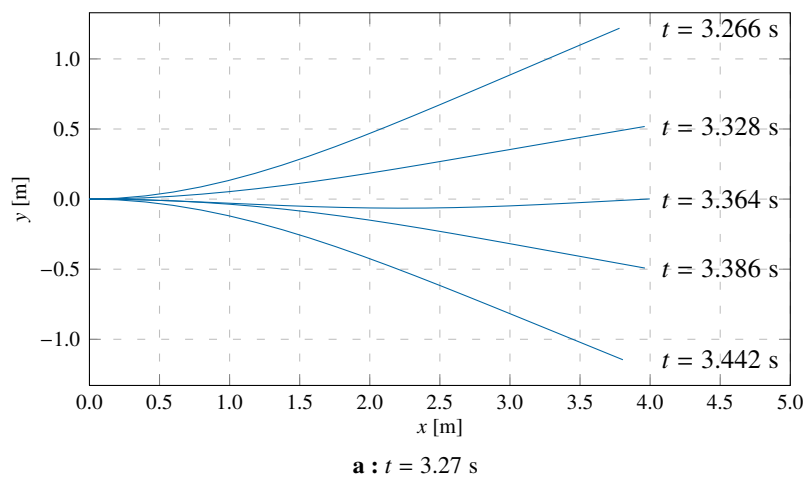
### E.7.2.2 Résultats

La cinématique du point extrémité et la transformée de Fourier correspondante sont proposées à la figure E.7.9. La transformée de Fourier est réalisée à partir de  $t = 2.5 \text{ s}$ . La forme de la poutre déformée au cours d'une demi oscillation est présentée à la figure E.7.10. Des visualisations des lignes de courant, du coefficient de pression, de la vitesse adimensionnelle et du champ de vorticité sont données aux figures E.7.11 et E.7.12.

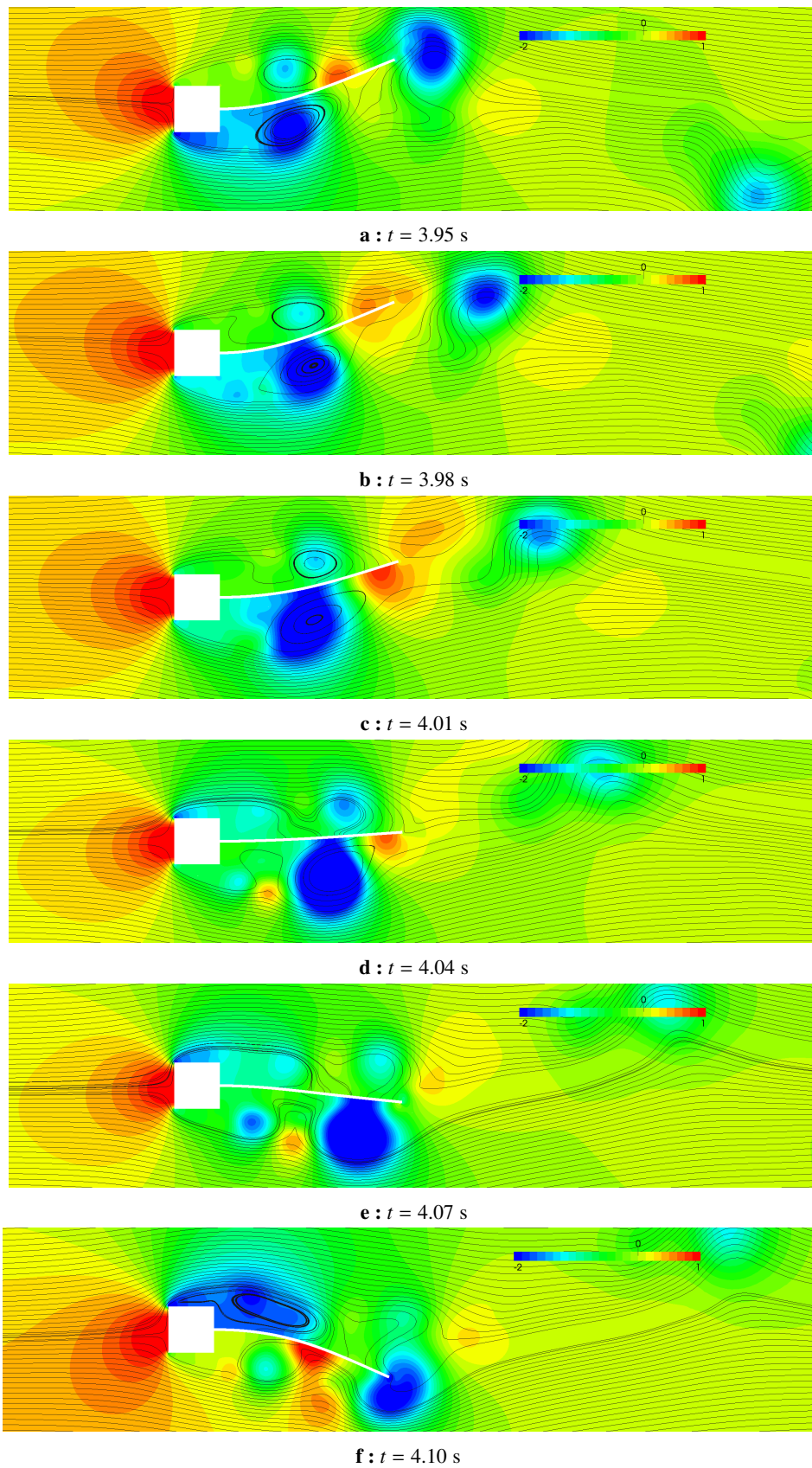
La demi amplitude des oscillations du point extrémité selon l'axe vertical est de l'ordre de 1.05 m. Ceci est en accord avec les résultats bibliographiques qui sont compris entre 1.0 et 1.2 m. La fréquence des oscillations est de l'ordre de  $2.90 \text{ s}^{-1}$  ce qui est très proche de la première fréquence propre de l'appendice. Par conséquent, la cinématique de l'appendice est dominée par ce premier mode propre.



**Figure E.7.9 :** Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante

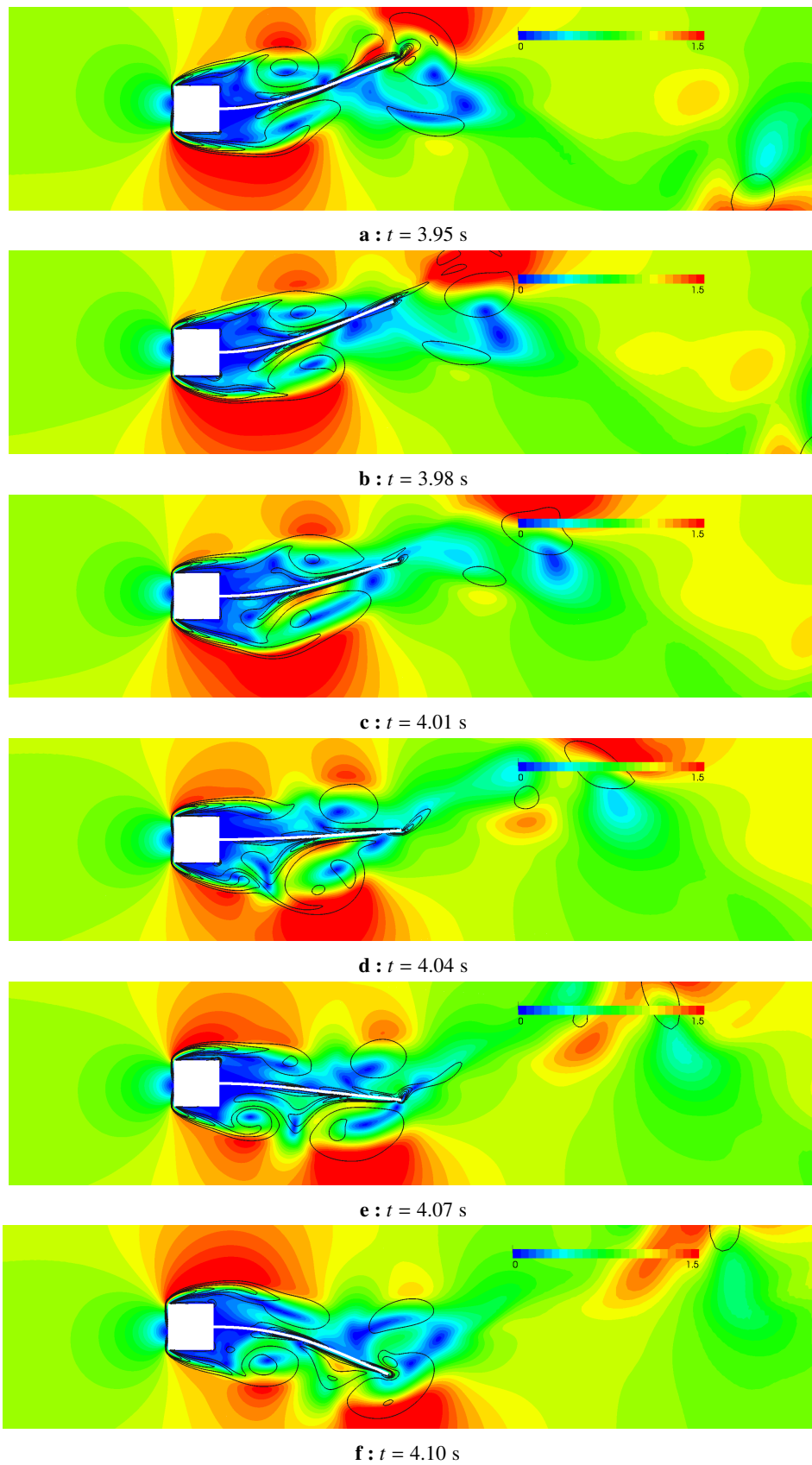


**Figure E.7.10 :** Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Forme de la poutre au cours d'une demi-oscillation (les proportions sont respectées)



**Figure E.7.11** : Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Champ de pression et lignes de courant au court d'une demi-oscillation





**Figure E.7.12** : Un appendice flexible au sein d'un écoulement – Champ de vitesse adimensionnelle et iso-lignes de vorticité (noir)

### E.7.2.3 Conclusion

Cette deuxième étude a été réalisée pour vérifier les développements réalisés dans le cadre des corps flexibles de type poutre sur un cas de validation instationnaire. L'amplitude et la fréquence des oscillations du point extrémité sont en accord avec les références bibliographiques.



# Conclusion générale et perspectives

Au cours de ce travail de thèse, un couplage entre deux solveurs généralistes a été développé afin d'étudier des systèmes mécaniques complexes en interaction forte avec un milieu fluide dans le domaine de l'hydrodynamique navale. L'approche adoptée offre la possibilité de modéliser finement et sans approximation notable le comportement du milieu fluide, la dynamique des systèmes mécaniques considérés et les couplages entre ces deux milieux. Ce résultat est obtenu grâce à l'application d'une méthode de simulation collaborative, méthode permettant d'adapter numériquement chaque solveur au problème qu'il est en charge de résoudre et, par conséquent, rendant possible l'emploi de modèles comportementaux complexes pour les deux milieux.

Après une description générale du contexte et de la problématique de ce travail, les problèmes élémentaires fluide et mécanique ainsi que les méthodes numériques de résolution correspondantes ont été présentés.

En ce qui concerne le problème fluide, les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds sont résolues par la méthode des volumes finis. Divers schémas de discrétisation centrés et décentrés ont été exposés. Lorsqu'une surface libre est modélisée, des schémas de discrétisation prenant en compte les potentielles discontinuités sont utilisés. La résolution d'une équation de transport classique et le cas particulier du couplage vitesse-pression ont été introduits. La méthode de résolution de l'équation de pression est également employée pour évaluer les effets de masse ajoutée et ceci, de manière dynamique si nécessaire. Effectivement, c'est une information qu'il est appréciable, voire nécessaire, de connaître lors de la mise en place d'un algorithme de couplage fluide-structure efficace et stable vis-à-vis des effets de masse ajoutée.

Quant au problème mécanique, l'ajout des équations de contrainte représentatives des liaisons complexes modifie le système d'équations différentielles ordinaires classique en un système d'équations différentielles algébriques. Ce type de système est difficile à résoudre numériquement du fait de sa partie algébrique ; des méthodes adaptées doivent être employées. Une attention particulière a été portée sur ces méthodes de résolution, sur la paramétrisation des orientations et sur les méthodes d'initialisation des quantités paramétrées. La compréhension de ces dernières méthodes permet notamment de corriger la majorité des divergences pouvant apparaître au début d'une simulation mécanique. Si les capacités du solveur ISIS-CFD étaient déjà connues au sein de DCNS Research/SIREHNA, il n'en était rien du solveur MBDyn. Celui-ci fut initialement utilisé pour son caractère « open source » mais il s'est avéré qu'il disposait de capacités remarquables en termes de modélisation de systèmes mécaniques complexes. En outre, sa méthode de résolution pourrait servir à d'autres applications de DCNS Research/SIREHNA (simulateur de navire par exemple).

L'objectif des deux parties ci-dessus était d'exposer les domaines d'application et le fonctionnement de chacun des solveurs. La compréhension de ce dernier point est notamment primordiale pour pouvoir mettre en place un algorithme de couplage efficace.

Une formulation générale et formelle du problème couplé par le biais de la formulation de Steklov-Poincaré est réalisée. Par la suite, les algorithmes de couplage couramment employés ont été introduits. Dans le domaine de

l'hydrodynamique navale, les effets de masse ajoutée peuvent être importants. Or, il est connu que ces effets sont la source de fortes instabilités numériques. Une attention particulière a donc été portée à ce phénomène et plusieurs méthodes de stabilisation ont été proposées. Ces dernières se basent toutes sur la connaissance de ces effets de masse ajoutée. C'est la raison pour laquelle une méthode d'évaluation de ces effets a été implémentée et validée au sein du solveur ISIS-CFD. Du fait du caractère original de cette approche, il est également possible d'évaluer les effets de masse ajoutée dans des situations où les méthodes potentielles classiques sont plus difficiles à mettre en œuvre (géométrie complexe, fort confinement, etc.). Par conséquent, c'est un outil également performant pour la détermination des masses ajoutées utilisées au sein de simulateurs développés par DCNS Research/SIREHNA (navires, sous-marins, éjection de corps, etc.).

Le choix de l'algorithme de couplage s'est basé sur des critères de précision (algorithme implicite), de stabilité (prise en compte des effets de masse ajoutée), de temps de simulation (couplage fluide-structure réalisé au sein de la boucle de résolution non-linéaire du solveur fluide) mais également sur le caractère intrusif vis-à-vis des codes de calcul. De fait, lorsqu'une méthode de simulation collaborative est choisie, il est préférable de ne pas modifier significativement les solveurs élémentaires, pour des raisons de maintenance et de développement. Par ailleurs, des modifications, en apparence simples, peuvent avoir des conséquences notables si le solveur modifié n'est pas parfaitement maîtrisé.

De manière générale, il a été montré que la prise en compte des effets de masse ajoutée au sein de l'algorithme de couplage permet de stabiliser efficacement ce dernier, et ceci, même dans des cas extrêmes tels que les corps de densité faible possédant six degrés de liberté. De plus, le nombre d'itérations du solveur fluide pour atteindre un état convergé à chaque pas de temps est sensiblement identique, lorsque le mouvement est calculé ou imposé. C'est une propriété tout à fait remarquable : le surcoût en matière de temps de simulation lié à l'évaluation de la dynamique des corps résulte uniquement des étapes de modification de maillage ayant lieu après la première itération, c'est-à-dire l'étape de prédiction. Comme la cinématique du corps à l'état convergé diffère peu de celle estimée lors de l'étape de prédiction en matière de position, des méthodes adaptées peuvent être utilisées. Ainsi, ce surcoût n'est pas réellement conséquent en comparaison des autres opérations réalisées au sein du solveur fluide.

Le dernier chapitre présente les cas de validation et/ou de démonstration réalisés. Dans un premier temps, des applications élémentaires ont été étudiées : étude de structures excitées par des lâchers tourbillonnaires et analyse des effets de masse ajoutée sur l'algorithme de couplage par l'étude du mouvement de pilonnement d'une barge en déséquilibre hydrostatique. Ces applications ont permis de valider les premiers développements concernant les mouvements de translation, de rotation et les mouvements plans.

Dans un second temps, la chaîne de calcul mise en place a été validée sur des applications industrielles complexes : étude d'une frégate soumise à une houle de face, étude de l'amortissement en roulis d'une frégate par des ailerons actifs et simulation d'un navire amarré en faible profondeur. De surcroît, l'étude de parallélépipèdes de faible densité a servi à l'analyse et à la validation des caractéristiques de l'algorithme de couplage sur un cas possédant six degrés de liberté avec des effets de masse ajoutée extrêmement importants. De manière générale, chaque cas d'application a été la source d'enseignements intéressants. Lorsque cela était possible, les résultats obtenus ont été comparés à des résultats bibliographiques ou expérimentaux. En particulier, les résultats obtenus avec les frégates sont très proches des résultats expérimentaux. Le cas d'un navire amarré en faible profondeur a pu démontrer une partie des capacités de la chaîne de calcul sur une application originale.

Deux cas classiques de validation pour des problématiques comportant des poutres flexibles ont été effectués à la fin de ce travail de thèse. Les résultats obtenus sont cohérents avec les résultats bibliographiques. Cependant, des applications industrielles doivent être mises en œuvre avant de conclure définitivement sur cette partie. Par exemple, l'étude des déformations de « risers », d'un navire (théorie de la poutre navire) ou des pales et du mât d'une d'éolienne est envisagée à plus ou moins long terme dans le cadre des activités de recherche de DCNS Research/SIREHNA.

En ce qui concerne les travaux à court terme, il reste à implémenter et valider l'évaluation de la masse ajoutée pour des corps déformables de type poutre au sein du solveur ISIS-CFD, et à intégrer une partie des multiples développements au sein de la version officielle de ce solveur.

La limitation principale de ces travaux résulte de la méthode de prise en compte des mouvements des corps au sein du maillage fluide. En effet, les mouvements en bloc, la déformation de maillage et les interfaces glissantes ne permettent pas de traiter efficacement certaines configurations, et ceci, même lorsqu'elles sont combinées comme lors de ces travaux. Il serait donc avantageux de s'orienter vers des approches différentes telles que

---

les méthodes de remaillage, de recouvrement de maillage ou les méthodes de type « frontières immergées », afin que le domaine d'application de ces travaux, domaine déjà relativement vaste, s'étende encore davantage. Chacune des méthodes citées précédemment possède des avantages et des inconvénients dépassant le cadre de cet exposé. Néanmoins, l'équipe de développement du solveur ISIS-CFD projette de développer une méthode de recouvrement de maillage rapidement.

Un prolongement logique de ce travail serait d'étudier en détails la formulation de Steklov-Poincaré, formulation qui permet une parallélisation naturelle des solveurs fluide et structure. Cette approche devrait présenter des propriétés de convergence intéressantes si les temps de simulation du solveur structure augmentent de manière conséquente. Par exemple, des modèles éléments finis complexes sont quelques fois utilisés pour vérifier que les contraintes au sein d'un navire sont bien inférieures aux limites maximales autorisées en situation d'arc (« hogging ») et de contre-arc (« sagging »). Au sein de ces modèles, l'ensemble des éléments structurels importants sont représentés (coques, plaques, raidisseurs, etc.). Le nombre de degrés de liberté est particulièrement important et, par conséquent, les temps de simulation du solveur structure ne sont plus négligeables par rapport à ceux du solveur fluide. L'utilisation de ces modèles peut notamment être envisagée pour étudier et analyser la réponse du navire entier aux phénomènes de « slamming ».

D'un point de vue industriel, les domaines d'application envisagés sont nombreux : systèmes de stabilisation, systèmes de positionnement dynamique, manœuvres de navires ou de sous-marins, plans d'amarrage, remorquage de navire, de sous-marins ou de corps mal profilés (leurres sous-marins), houlomoteurs avec modélisation du système de récupération de l'énergie (PTO « Power Take-Off »), poutre navire, etc.. La chaîne de calcul mise en place peut également être utilisée à différents niveaux : dimensionnement des actionneurs, vérification ou amélioration des performances des systèmes hydromécaniques, mise au point, évaluation ou validation de modèles hydrodynamiques par exemple. De plus, la possibilité d'étudier les problèmes à l'échelle réelle et la disponibilité d'informations locales (champ de vitesse, champ de pression, etc.) devraient permettre une analyse fine et une meilleure compréhension des phénomènes hydrodynamiques en vue de l'amélioration des systèmes en conception ou existants.



# Annexes

## Contenu

<b>G.1 Problème solide</b>	<b>318</b>
G.1.1 Équations pour un corps rigide	318
G.1.1.1 Introduction et notations	318
G.1.1.2 Inerties et centre de gravité	319
G.1.1.3 Torseurs et relations diverses	319
G.1.1.4 Réécriture du moment dynamique angulaire	320
G.1.1.5 Résumé du principe fondamental de la dynamique	322
G.1.2 Orientation d'un corps	323
G.1.2.1 Introduction	323
G.1.2.2 Matrices de rotation et changement de base	323
G.1.2.2.1 Généralités	323
G.1.2.2.2 Le blocage de Cardan	324
G.1.2.2.3 Algorithmes de conversion	325
G.1.2.3 Rotation autour d'un axe	326
G.1.2.4 Différentiation et vitesse angulaire	327
G.1.2.5 Paramétrisation des rotations	328
G.1.2.5.1 Introduction	328
G.1.2.5.2 Paramétrisation en tant que vecteur de rotation	328
G.1.2.5.3 Paramétrisation en tant que paramètre de Gibbs-Rodrigues	330
G.1.2.6 Quaternions	330
G.1.2.6.1 Généralités	331
G.1.2.6.2 Lien entre quaternion et rotation	331
G.1.2.6.3 Algorithmes de conversion	332
<b>G.2 Méthodes d'intégration temporelle</b>	<b>334</b>
G.2.1 Introduction	334
G.2.2 Équation différentielle du premier ordre	334
G.2.3 Problème de Cauchy	334
G.2.4 Approche par intégration	334
G.2.5 Quelques formules d'intégration	335
G.2.6 Quelques schémas d'intégration mono-pas	335
G.2.6.1 Méthode d'Euler explicite (1768)	335
G.2.6.2 Méthode de Runge (1895)	335
G.2.6.3 Méthode de Heun (1900)	336
G.2.6.4 Méthode d'Euler implicite	336



G.2.6.5	Méthode de Crank-Nicolson (1947) . . . . .	336
G.2.6.6	Méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 (1901) . . . . .	336
G.2.7	Quelques schémas d'intégration multi-pas . . . . .	337
G.2.7.1	Méthodes d'Adams (1855) . . . . .	337
G.2.7.1.1	Méthode d'Adams-Bashforth (1883) . . . . .	337
G.2.7.1.2	Méthode d'Adams-Moulton (1926) . . . . .	338
G.2.7.2	Méthodes BDF . . . . .	338
G.2.7.3	Multi-Step . . . . .	339
G.2.7.3.1	Formulation . . . . .	339
G.2.7.3.2	Cas critique $\rho_\infty = 0$ . . . . .	339
G.2.7.3.3	Cas critique $\rho_\infty = 1$ . . . . .	340
G.2.8	Caractérisation des schémas de résolution . . . . .	340
G.2.8.1	Stabilité des méthodes mono-pas . . . . .	340
G.2.8.2	Stabilité des méthodes multi-pas . . . . .	341
G.2.8.3	Comparaison des domaines de stabilité . . . . .	342
<b>G.3</b>	<b>Quelques algorithmes . . . . .</b>	<b>345</b>
G.3.1	Algorithme CSS . . . . .	345
G.3.2	Algorithme GSS . . . . .	345
G.3.3	Algorithmes DFMT-BGS . . . . .	346
G.3.4	Algorithmes DFMT-BGS-IFC . . . . .	347
<b>G.4</b>	<b>Compléments sur le problème fluide-structure . . . . .</b>	<b>348</b>
G.4.1	Méthode de Gauss-Seidel par blocs . . . . .	348
G.4.2	Compléments primal et dual de Schur . . . . .	348
<b>G.5</b>	<b>Premières applications . . . . .</b>	<b>350</b>
G.5.1	Un cylindre excité par des lâchers tourbillonnaires . . . . .	350
G.5.1.1	Description . . . . .	350
G.5.1.2	Cylindre fixe . . . . .	351
G.5.1.3	Cylindre oscillant librement . . . . .	351
G.5.1.4	Conclusion . . . . .	356
G.5.2	Un carré excité par des lâchers tourbillonnaires . . . . .	357
G.5.2.1	Description . . . . .	357
G.5.2.2	Carré fixe . . . . .	358
G.5.2.3	Carré oscillant librement . . . . .	358
G.5.2.4	Conclusion . . . . .	358
G.5.3	Un rectangle excité par des lâchers tourbillonnaires . . . . .	364
G.5.3.1	Description . . . . .	364
G.5.3.2	Rectangle fixe . . . . .	364
G.5.3.3	Rectangle oscillant librement . . . . .	365
G.5.3.4	Conclusion . . . . .	366
G.5.4	Un profil de poutre oscillant . . . . .	368
G.5.4.1	Description . . . . .	368
G.5.4.2	Profil de poutre fixe . . . . .	368
G.5.4.3	Profil de poutre oscillant librement . . . . .	372
G.5.4.4	Conclusion . . . . .	375
<b>G.6</b>	<b>Annexes des applications . . . . .</b>	<b>376</b>
G.6.1	Une barge parallélépipédique . . . . .	376
G.6.1.1	Pression dynamique et élévation de la surface libre . . . . .	376
G.6.1.2	Pression d'évaluation de la masse ajoutée . . . . .	378
G.6.1.3	Maillage . . . . .	380
G.6.2	DTMB 5512 . . . . .	381
G.6.2.1	Maillage . . . . .	381
G.6.2.2	Résistance ajoutée sur houle de face . . . . .	383

---

G.6.2.3	Résultats par simulation . . . . .	384
G.6.3	Des parallélépipèdes de faible densité . . . . .	409
G.6.3.1	Géométrie . . . . .	409
G.6.3.2	Répartition longitudinale de la masse volumique . . . . .	409
G.6.3.3	Maillage . . . . .	410
G.6.4	Un navire amarré dans un canal . . . . .	411
G.6.4.1	Maillage . . . . .	411

## G.1 Problème solide

### G.1.1 Équations pour un corps rigide

#### G.1.1.1 Introduction et notations

La cinématique d'un corps rigide indéformable est régie par le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD). Ce principe énonce l'égalité entre le torseur dynamique du corps considéré et le torseur des actions extérieures. Les principales notations utilisées sont :

- $R_0$  : le repère galiléen de référence ;
- $O$  : l'origine de  $R_0$  ;
- $S$  : le solide considéré ;
- $G$  : le centre de gravité de  $S$  ;
- $R_g$  : un repère lié à  $S$  ;
- $m$  : la masse de  $S$  ;
- $\mathbf{j}$  : le moment d'inertie du premier ordre de  $S$  ;
- $\mathbf{I}$  : le moment d'inertie du second ordre de  $S$  ;
- $\bar{\Omega}$  : le domaine spatial occupé par  $S$  ;
- $A$  : le point matériel appartenant à  $S$  servant à l'expression des différents torseurs ;
- $P$  : un point matériel quelconque appartenant à  $S$  ;
- $\mathbf{v}$  : la vitesse linéaire ;
- $\boldsymbol{\omega}$  : la vitesse angulaire ;
- $\dot{\mathbf{v}}$  : l'accélération linéaire ;
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  : l'accélération angulaire ;
- $\mathbf{f}$  : la résultante en effort des actions extérieures à  $S$  ;
- $\mathbf{m}$  : la résultante en moment des actions extérieures à  $S$  ;
- $\mathcal{T}$  : le torseur des actions extérieures à  $S$  ;
- $\boldsymbol{\beta}$  : la quantité de mouvement linéaire de  $S$  (ou moment cinématique linéaire) ;
- $\boldsymbol{\sigma}$  : la quantité de mouvement angulaire de  $S$  (ou moment cinématique angulaire) ;
- $\mathcal{C}$  : le torseur cinématique de  $S$  ;
- $\boldsymbol{\gamma}$  : le moment dynamique linéaire de  $S$  ;
- $\boldsymbol{\delta}$  : le moment dynamique angulaire de  $S$  ;
- $\mathcal{D}$  : le torseur dynamique de  $S$ .

Le repère galiléen de référence est supposé fixe pour ne pas alourdir les notations avec les vitesses d'entraînement. Les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{AP}$  et  $\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}$  sont exprimées dans  $R_0$  et notées de la façon suivante :

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{/R_0} \qquad \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{/R_0} \qquad (\text{G.1.1})$$

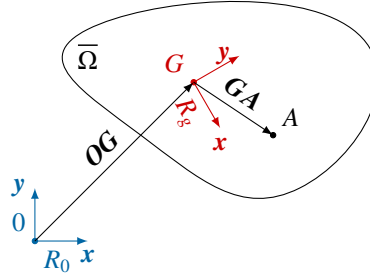


Figure G.1.1 : Équations pour un corps rigide – Notations

### G.1.1.2 Inerties et centre de gravité

La position du centre de gravité de  $S$  est définie par :

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{OP} \cdot dm \quad \text{ou} \quad \mathbf{0} = \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{GP} \cdot dm \quad (\text{G.1.2})$$

La masse de  $S$ , le moment d'inertie du premier ordre et du second ordre sont définis par :

$$m = \iiint_{\bar{\Omega}} dm \quad \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} = \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \cdot dm = m \cdot \mathbf{AG} \quad \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.3})$$

avec :

$$A = \iiint_{\bar{\Omega}} (y^2 + z^2) \cdot dm \quad B = \iiint_{\bar{\Omega}} (x^2 + z^2) \cdot dm \quad C = \iiint_{\bar{\Omega}} (x^2 + y^2) \cdot dm \quad (\text{G.1.4})$$

$$D = \iiint_{\bar{\Omega}} yz \cdot dm \quad E = \iiint_{\bar{\Omega}} xz \cdot dm \quad F = \iiint_{\bar{\Omega}} xy \cdot dm \quad (\text{G.1.5})$$

Le moment d'inertie du second ordre est notamment utilisé dans la relation suivante :

$$\iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) dm = \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \quad (\text{G.1.6})$$

### G.1.1.3 Torseurs et relations diverses

Les toseurs cinématique et dynamique de  $S$  sont respectivement :

$$\{C_{(S/R_0)}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\beta}_{(G,S/R_0)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{(A,S/R_0)} \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{D}_{(S/R_0)}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\gamma}_{(G,S/R_0)} \\ \boldsymbol{\delta}_{(A,S/R_0)} \end{array} \right\} \quad (\text{G.1.7})$$

avec :

$$\boldsymbol{\beta}_{(G,S/R_0)} = \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot dm \quad \boldsymbol{\sigma}_{(A,S/R_0)} = \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot dm \quad (\text{G.1.8})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{(G,S/R_0)} = \iiint_{\bar{\Omega}} \dot{\mathbf{v}}_{(P,S/R_0)} \cdot dm \quad \boldsymbol{\delta}_{(A,S/R_0)} = \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(P,S/R_0)} \cdot dm \quad (\text{G.1.9})$$

Les relations suivantes peuvent être utilisées pour présenter le principe fondamental de la dynamique :

$$\boldsymbol{\beta}_{(G,S/R_0)} = m \cdot \mathbf{v}_{(G,S/R_0)} = m \cdot \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \quad (\text{G.1.10})$$

$$\gamma_{(G,S/R_0)} = \dot{\beta}_{(G,S/R_0)} = m \cdot \dot{\mathbf{v}}_{(A,S/R_0)} + \dot{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge (\omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{j}_{(A,S/R_0)}) \quad (\text{G.1.11})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(A,S/R_0)} &= \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} \\ &= \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot d\mathbf{m} \\ &= \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot d\mathbf{m} \\ &= \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)} \end{aligned} \quad (\text{G.1.12})$$

Le tenseur des actions extérieures à  $S$  est défini comme étant :

$$\{\mathcal{T}_{(\bar{S} \rightarrow S/R_0)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{(G,S/R_0)} \\ \mathbf{m}_{(A,S/R_0)} \end{array} \right\} \quad (\text{G.1.13})$$

#### G.1.1.4 Réécriture du moment dynamique angulaire

Le moment dynamique angulaire peut être exprimé sous une forme équivalente plus simple faisant intervenir la vitesse de rotation et l'opérateur d'inertie. La première étape consiste à chercher l'équation reliant la dérivée du moment cinétique angulaire au moment dynamique angulaire. Les différents calculs sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{(A,S/R_0)}}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{R_0} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} \\ &= \iiint_{\bar{\Omega}} \left. \frac{d\mathbf{AP}}{dt} \right|_{R_0} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \left. \dot{\mathbf{v}}_{(P,S/R_0)} \right|_{R_0} \cdot d\mathbf{m} \\ &= \iiint_{\bar{\Omega}} \left. \frac{d[\mathbf{OP} - \mathbf{OA}]}{dt} \right|_{R_0} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} \\ &= \iiint_{\bar{\Omega}} [\mathbf{v}_{(P,S/R_0)} - \mathbf{v}_{(A,S/R_0)}] \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \delta_{(A,S/R_0)} \\ &= - \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \delta_{(A,S/R_0)} \\ &= -\mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} + \delta_{(A,S/R_0)} \\ &= -m \cdot \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(G,S/R_0)} + \delta_{(A,S/R_0)} \end{aligned} \quad (\text{G.1.14})$$

Le moment dynamique de  $S$  peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta_{(A,S/R_0)} = \left. \frac{d\sigma_{(A,S/R_0)}}{dt} \right|_{R_0} + m \cdot \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(G,S/R_0)} = \dot{\sigma}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \beta_{(G,S/R_0)} \quad (\text{G.1.15})$$

La seconde étape consiste à évaluer la dérivée temporelle du moment cinétique angulaire.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma_{(A,S/R_0)}}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{R_0} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(P,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{R_0} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot d\mathbf{m} \\ &= \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{R_0} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \cdot d\mathbf{m}}_{\sigma_1} + \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{R_0} \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot d\mathbf{m}}_{\sigma_2} \end{aligned} \quad (\text{G.1.16})$$

Le terme  $\sigma_1$  devient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= m \cdot \frac{d[\mathbf{AG} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)}]}{dt} \Big|_{R_0} \\
 &= m \cdot \frac{d\mathbf{AG}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + m \cdot \mathbf{AG} \wedge \frac{d\mathbf{v}_{(A,S/R_0)}}{dt} \Big|_{R_0} \\
 &= m \cdot (-\mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{v}_{(G,S/R_0)}) \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + m \cdot \mathbf{AG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(A,S/R_0)} \\
 &= m \cdot \mathbf{v}_{(G,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + m \cdot \mathbf{AG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(A,S/R_0)}
 \end{aligned} \tag{G.1.17}$$

Le terme  $\sigma_2$  est séparé en trois parties après avoir inversé le signe intégral et la dérivation temporelle :

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \underbrace{\iiint_{\bar{\Omega}} \frac{d\mathbf{AP}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot dm}_{\sigma_{2a}} \\
 &\quad + \underbrace{\iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \mathbf{AP} \right) \cdot dm}_{\sigma_{2b}} \\
 &\quad + \underbrace{\iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \left( \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \frac{d\mathbf{AP}}{dt} \Big|_{R_0} \right) \cdot dm}_{\sigma_{2c}}
 \end{aligned} \tag{G.1.18}$$

Le premier terme de  $\sigma_2$  est nul :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2a} &= \iiint_{\bar{\Omega}} (\mathbf{v}_{(P,S/R_0)} - \mathbf{v}_{(A,S/R_0)}) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot dm \\
 &= \iiint_{\bar{\Omega}} (\mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP} - \mathbf{v}_{(A,S/R_0)}) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot dm \\
 &= \iiint_{\bar{\Omega}} (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP}) \cdot dm = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{G.1.19}$$

Le deuxième terme de  $\sigma_2$  s'exprime à l'aide de l'opérateur d'inertie :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2b} &= \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}}{dt} \Big|_{R_0} \wedge \mathbf{AP} \right) \cdot dm \\
 &= \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}}{dt} \Big|_{R_0} = \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{(S/R_0)}
 \end{aligned} \tag{G.1.20}$$

Le troisième et dernier terme de  $\sigma_2$  peut s'exprimer en fonction de l'opérateur  $\mathbf{I}$  :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2c} &= \iiint_{\bar{\Omega}} \mathbf{AP} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP})) \cdot dm \\
 &= \iiint_{\bar{\Omega}} \underbrace{[\mathbf{AP} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP})]}_{\mathbf{0}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \cdot dm - \iiint_{\bar{\Omega}} (\mathbf{AP} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP} \cdot dm \\
 &= - \iiint_{\bar{\Omega}} (\mathbf{AP} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP} \cdot dm
 \end{aligned} \tag{G.1.21}$$

avec :

$$-(\mathbf{AP} \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{AP} = \begin{bmatrix} prxy - pqxz + (r^2 - q^2)yz + qr(y^2 - z^2) \\ pqyz - qrxz + (p^2 - r^2)xz + pr(z^2 - x^2) \\ qrxz - pryz + (q^2 - p^2)xy + pq(x^2 - y^2) \end{bmatrix} \tag{G.1.22}$$

soit au final :

$$\sigma_{2c} = \begin{bmatrix} prF - pqE + (r^2 - q^2)D + qr(C - B) \\ pqD - qrF + (p^2 - r^2)E + pr(A - C) \\ qrE - prD + (q^2 - p^2)F + pq(B - A) \end{bmatrix} \quad (G.1.23)$$

Ce terme peut également s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\sigma_{2c} = \omega_{(S/R_0)} \wedge (\mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)}) \quad (G.1.24)$$

En conclusion, à partir des différentes équations présentées ci-dessus, le moment dynamique peut s'écrire :

$$\delta_{(A,S/R_0)} = \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \dot{\omega}_{(S/R_0)} + m \cdot \mathbf{AG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge (\mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)}) \quad (G.1.25)$$

### G.1.1.5 Résumé du principe fondamental de la dynamique

Dans ce paragraphe, les différents développements réalisés précédemment sont résumés. La présentation couramment utilisée des différentes équations est réalisée dans un premier temps. Elle consiste à exprimer les deux équations vectorielles au centre de gravité du corps considéré et de les exprimer principalement en fonction des accélérations linéaires et angulaires. Une deuxième présentation est également réalisée. Cette fois-ci, le point d'expression est un point arbitraire du corps rigide considéré (point A) et les inconnues principales sont les quantités de mouvement linéaire et angulaire ( $\beta$  et  $\gamma$ ). Cette deuxième approche permet de modéliser naturellement des corps à inertie variable au cours du temps (par exemple une fusée).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un corps rigide énonce l'égalité entre son torseur dynamique et le torseur des actions extérieures, soit :

$$\{\mathcal{D}_{(S/R_0)}\} = \{\mathcal{T}_{(\bar{S} \rightarrow S/R_0)}\} \quad (G.1.26)$$

Le système d'équations à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \gamma_{(G,S/R_0)} = \mathbf{f}_{(G,S/R_0)} \\ \delta_{(A,S/R_0)} = \mathbf{m}_{(A,S/R_0)} \end{cases} \quad (G.1.27)$$

avec :

$$\gamma_{(G,S/R_0)} = m \cdot \dot{\mathbf{v}}_{(G,S/R_0)} \quad (G.1.28)$$

$$\delta_{(A,S/R_0)} = \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \dot{\omega}_{(S/R_0)} + m \cdot \mathbf{AG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge (\mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)}) \quad (G.1.29)$$

Si le point d'expression des torseurs est le centre de gravité, alors le système précédent se simplifie de la façon suivante :

$$\begin{cases} m \cdot \dot{\mathbf{v}}_{(G,S/R_0)} = \mathbf{f}_{(G,S/R_0)} \\ \mathbf{I}_{(G,S/R_0)} \cdot \dot{\omega}_{(S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge (\mathbf{I}_{(G,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)}) = \mathbf{m}_{(G,S/R_0)} \end{cases} \quad (G.1.30)$$

Si les quantités de mouvement linéaire et angulaire sont les inconnues principales du problème, alors le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire de façon équivalente sous la forme des deux systèmes couplés suivants (cf. équations G.1.10, G.1.12, G.1.15 et G.1.11) :

$$\begin{cases} \beta_{(G,S/R_0)} = m \cdot \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \omega_{(S/R_0)} \wedge \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \\ \sigma_{(A,S/R_0)} = \mathbf{j}_{(A,S/R_0)} \wedge \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{I}_{(A,S/R_0)} \cdot \omega_{(S/R_0)} \end{cases} \quad (G.1.31)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{(G,S/R_0)} = \mathbf{f}_{(G,S/R_0)} \\ \dot{\sigma}_{(A,S/R_0)} + \mathbf{v}_{(A,S/R_0)} \wedge \beta_{(G,S/R_0)} = \mathbf{m}_{(A,S/R_0)} \end{cases} \quad (G.1.32)$$

## G.1.2 Orientation d'un corps

### G.1.2.1 Introduction

L'objectif de cette section est de rassembler et présenter les différents outils utilisés pour décrire l'orientation d'un corps lors de son mouvement sans aller trop loin dans la démonstration/justification. Chaque code utilise ses propres méthodes et conventions ce qui amène à réaliser certaines traductions. Les matrices de rotation et le lien qu'elles possèdent avec les matrices de changement de base orthonormée directe sont présentés dans un premier temps. Les angles de Cardan<sup>1</sup> sont également introduits car ce sont eux qui sont principalement utilisés dans l'ingénierie navale [Fossen, 2002]. Néanmoins, ils possèdent des singularités difficiles à traiter de manière robuste en simulation numérique. C'est pour cette raison que certains codes (dont ISIS-CFD) utilisent les quaternions pour représenter l'orientation d'un corps. Les quaternions ainsi que certaines de leurs propriétés utiles pour ces travaux sont donc également présentés. Une description plus détaillée pourra être trouvée dans [Fossen, 2002], [Leroyer, 2004] ou [Gravelle, 2006]. Le lien entre les quaternions et le groupe des rotations peut être introduit simplement par le théorème d'Euler. Une présentation de ce théorème est donc réalisée avant l'introduction des quaternions.

### G.1.2.2 Matrices de rotation et changement de base

#### G.1.2.2.1 Généralités

Soit  $\mathbb{R}^3$  l'espace euclidien muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_0 = (i_0, j_0, k_0)$ . Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ , trois bases orthonormées directes. Soient  $x_{/\mathcal{B}_0}, x_{/\mathcal{B}_1}, x_{/\mathcal{B}_2}$  et  $x_{/\mathcal{B}_3}$ , un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  exprimé respectivement dans  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ . La matrice de rotation d'axe  $k_0$  et d'angle  $\psi$  est notée  $R(\psi, k_0)$ . La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0$  à la base  $\mathcal{B}_1$  est, quant à elle, notée  $P_{(1/0)}$ . Les bases  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$  sont définies par :

$$\mathcal{B}_0 = (i_0, j_0, k_0) \xrightarrow{R(\psi, k_0)} \mathcal{B}_1 = (i_1, j_1, k_1) \xrightarrow{R(\theta, j_1)} \mathcal{B}_2 = (i_2, j_2, k_2) \xrightarrow{R(\phi, i_2)} \mathcal{B}_3 = (i_3, j_3, k_3) \quad (\text{G.1.33})$$

Cette définition représente ce que l'on appelle couramment les angles de Cardan. Les angles de lacet, de tangage et de roulis sont respectivement  $\psi, \theta$  et  $\phi$ .

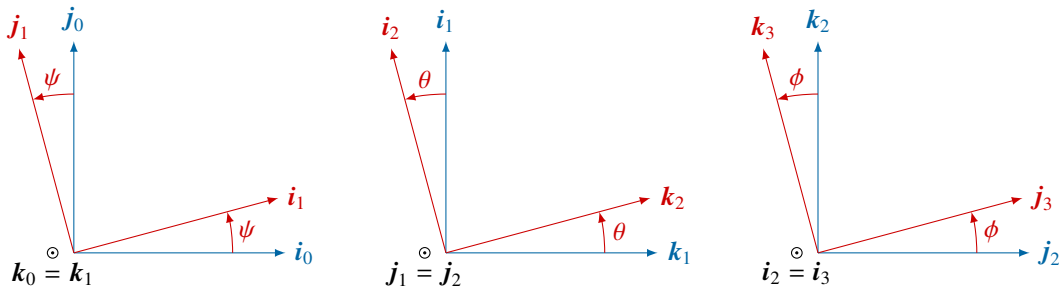


Figure G.1.2 : Rotation – Angles de Cardan

Par définition des matrices de rotation :

$$i_{1/\mathcal{B}_0} = R_{(0 \rightarrow 1)} i_{0/\mathcal{B}_0} \quad j_{1/\mathcal{B}_0} = R_{(0 \rightarrow 1)} j_{0/\mathcal{B}_0} \quad k_{1/\mathcal{B}_0} = R_{(0 \rightarrow 1)} k_{0/\mathcal{B}_0} \quad (\text{G.1.34})$$

$$i_{2/\mathcal{B}_1} = R_{(1 \rightarrow 2)} i_{1/\mathcal{B}_1} \quad j_{2/\mathcal{B}_1} = R_{(1 \rightarrow 2)} j_{1/\mathcal{B}_1} \quad k_{2/\mathcal{B}_1} = R_{(1 \rightarrow 2)} k_{1/\mathcal{B}_1} \quad (\text{G.1.35})$$

$$i_{3/\mathcal{B}_2} = R_{(2 \rightarrow 3)} i_{2/\mathcal{B}_2} \quad j_{3/\mathcal{B}_2} = R_{(2 \rightarrow 3)} j_{2/\mathcal{B}_2} \quad k_{3/\mathcal{B}_2} = R_{(2 \rightarrow 3)} k_{2/\mathcal{B}_2} \quad (\text{G.1.36})$$

1. Ces angles sont également appelés angles de Bryant-Cardan.



Par définition des matrices de passage :

$$\mathbf{x}_{/B_1} = \mathbf{P}_{(1/0)} \mathbf{x}_{/B_0} \quad \mathbf{x}_{/B_2} = \mathbf{P}_{(2/1)} \mathbf{x}_{/B_1} \quad \mathbf{x}_{/B_3} = \mathbf{P}_{(3/2)} \mathbf{x}_{/B_2} \quad (\text{G.1.37})$$

$$\mathbf{x}_{/B_3} = \mathbf{P}_{(3/2)} \mathbf{P}_{(2/1)} \mathbf{P}_{(1/0)} \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_{(3/0)} \mathbf{x}_{/B_0} \quad (\text{G.1.38})$$

Les matrices  $\mathbf{P}_{(1/0)}$ ,  $\mathbf{P}_{(2/1)}$  et  $\mathbf{P}_{(3/2)}$  appartiennent au groupe orthogonal spécial<sup>2</sup>  $SO(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent :

$$\mathbf{P}_{(1/0)}^{-1} = \mathbf{P}_{(1/0)}^t = \mathbf{P}_{(0/1)} \quad (\text{G.1.39})$$

Deux propriétés importantes des matrices de rotation (et de passage) sont :

$$\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)} \cdot \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)}^t = \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)} \cdot \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)}^t = \mathbf{I}_d \quad \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)}^{-1} = \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)}^t \quad (\text{G.1.40})$$

Les matrices de rotation et de passage élémentaires précédentes sont sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}(\psi, \mathbf{k}_0) = \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{(1/0)} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.41})$$

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{j}_1) = \mathbf{R}_{(1 \rightarrow 2)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{(2/1)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.42})$$

$$\mathbf{R}(\phi, \mathbf{i}_2) = \mathbf{R}_{(2 \rightarrow 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{(3/2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.43})$$

Le lien entre matrice de rotation et matrice de passage est le suivant :

$$\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)} = \mathbf{P}_{(1/0)}^{-1} = \mathbf{P}_{(1/0)}^t = \mathbf{P}_{(0/1)} \quad (\text{G.1.44})$$

La matrice de rotation représentative du changement de base  $\mathbf{P}_{(3/0)}$ , matrice notée  $\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 3)}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 3)} &= \mathbf{P}_{(0/3)} \\ &= \mathbf{P}_{(0/1)} \mathbf{P}_{(1/2)} \mathbf{P}_{(2/3)} \\ &= \mathbf{R}_{(0 \rightarrow 1)} \mathbf{R}_{(1 \rightarrow 2)} \mathbf{R}_{(2 \rightarrow 3)} \end{aligned} \quad (\text{G.1.45})$$

Ainsi, après multiplication des matrices :

$$\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 3)} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \cos \phi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.46})$$

#### G.1.2.2.2 Le blocage de Cardan

Le principal problème des angles de Cardan intervient lorsque un degré de liberté en rotation est perdu. Il est appelé blocage de Cardan ou « gimbal lock » en anglais. Physiquement, il est observé lorsque  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Par

2. Le groupe orthogonal est le groupe des matrices orthogonales qui en dimension 3 s'écrit couramment  $O(\mathbb{R}^3)$ . Le groupe orthogonal spécial en est un sous-groupe contenant les matrices dont le déterminant vaut 1, ce qui correspond aux rotations dites directes.

exemple, lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , la matrice de rotation (cf. équation G.1.46 page précédente) devient alors :

$$\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 3)} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ 0 & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.47})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.48})$$

D'un point de vue mathématique, un cas dégénéré est obtenu. Par exemple, cette matrice est de forme identique lorsque  $(\psi, \theta, \phi) = (\psi, \frac{\pi}{2}, 0)$  et  $(\psi, \theta, \phi) = (0, \frac{\pi}{2}, -\phi)$ . De plus, seule la différence  $\phi - \psi$  peut être identifiée. De manière identique, lorsque  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , seule la somme  $\phi + \psi$  peut être identifiée. Il est donc nécessaire de faire un choix arbitraire. L'algorithme (G.1.1) en est un exemple. Il pose arbitrairement  $\psi = 0$  lorsque le blocage de Cardan apparaît.

### G.1.2.2.3 Algorithmes de conversion

La matrice des angles de Cardan (cf. équation G.1.46 page précédente) permet de retrouver les angles de Cardan par l'algorithme suivant :

---

**Données :** Matrice de rotation :  $\mathbf{R}_{(0 \rightarrow 3)}$   
**Résultat :** Angles de Cardan :  $(\psi, \theta, \phi)$

// Fixation de la tolérance numérique  
1  $\epsilon \leftarrow 10^{-6}$   
// Évaluation de  $\theta$   
2  $s2t \leftarrow -\mathbf{R}_{3,1}$   
3  $c2t \leftarrow \max(0, 1 - \sqrt{s2t^2})$   
4  $\theta = \text{atan2}(s2t, c2t)$

// Traitement de l'indétermination et prise en compte des erreurs numériques  
5 **si**  $c2t < \epsilon$  **alors** // Cas général :  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$   
6      $\psi = \text{atan2}(\mathbf{R}_{2,1}, \mathbf{R}_{1,1})$   
7      $\phi = \text{atan2}(\mathbf{R}_{3,2}, \mathbf{R}_{3,3})$   
8 **sinon si**  $s2t > 0$  **alors** // Cas :  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
9      $\psi = 0$   
10     $\phi = \text{atan2}(\mathbf{R}_{1,2} - \mathbf{R}_{2,3}, \mathbf{R}_{2,2} + \mathbf{R}_{1,3})$  // Calcul de  $\phi - \psi$   
11 **sinon** // Cas :  $\theta = -\frac{\pi}{2}$   
12     $\psi = 0$   
13     $\phi = \text{atan2}(-\mathbf{R}_{1,2} - \mathbf{R}_{2,3}, \mathbf{R}_{2,2} - \mathbf{R}_{1,3})$  // Calcul de  $\phi + \psi$   
14 **finsi**

---

**Algorithme G.1.1 :** Passage de matrice de rotation à angles de Cardan

Pour faciliter l'analyse des résultats, il est également intéressant de connaître les relations liant les vitesses et accélérations des angles de Cardan avec le vecteur rotation instantanée  $\boldsymbol{\omega}$  et sa dérivée temporelle. La relation liant le vecteur rotation instantanée aux vitesses angulaires des angles de Cardan est la suivante :

$$\boldsymbol{\omega}_{/\mathcal{B}_3} = \dot{\phi} \cdot \mathbf{i}_{3/\mathcal{B}_3} + \dot{\theta} \cdot \mathbf{j}_{2/\mathcal{B}_3} + \dot{\psi} \cdot \mathbf{k}_{1/\mathcal{B}_3} \quad (\text{G.1.49})$$

$$= \dot{\phi} \cdot \mathbf{i}_{3/\mathcal{B}_3} + \dot{\theta} \cdot \mathbf{P}_{(2/3)} \cdot \mathbf{j}_{2/\mathcal{B}_2} + \dot{\psi} \cdot \mathbf{P}_{(1/3)} \cdot \mathbf{k}_{1/\mathcal{B}_1} \quad (\text{G.1.50})$$

Cette équation sous forme développée donne :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{/\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.51})$$

La relation inverse permet d'obtenir les vitesses angulaires des angles de Cardan en fonction du vecteur rotation instantanée :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{/\mathcal{B}_3} \quad (\text{G.1.52})$$

La dérivation temporelle de cette équation permet d'obtenir les accélérations angulaires des angles de Cardan en fonction du vecteur rotation instantanée et de sa dérivée temporelle :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}_{/\mathcal{B}_3} \quad (\text{G.1.53})$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + \dot{\phi} \tan \theta \cos \phi & \dot{\theta} \frac{\cos \phi}{\cos \theta} + \dot{\phi} \tan \theta \sin \phi \\ 0 & -\dot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi \\ 0 & \dot{\phi} \frac{\cos \phi}{\cos \theta} - \dot{\theta} \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \theta^2} & -\dot{\phi} \frac{\sin \phi}{\cos \theta} - \dot{\theta} \frac{\cos \phi \sin \theta}{\cos \theta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{/\mathcal{B}_3} \quad (\text{G.1.54})$$

### G.1.2.3 Rotation autour d'un axe

Afin d'introduire le lien entre les quaternions et le groupe de rotation, le théorème d'Euler est brièvement présenté. Une traduction libre de ce théorème pourrait être que : toute rotation finie peut être exprimée comme une rotation unique autour d'un axe de direction appropriée et d'angle  $\beta$ . La preuve matricielle consiste à montrer qu'il existe un vecteur non-nul de  $\mathbb{R}^3$  dont la rotation conduirait à ce même vecteur. Si  $\mathbf{u}$  est ce vecteur et  $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u})$  une matrice appartenant au groupe des rotations directes  $SO(\mathbb{R}^3)$ , alors :

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{G.1.55})$$

La matrice de rotation associée à la rotation d'axe  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u}$  étant de norme unitaire) et d'angle  $\theta$  est égale à <sup>3</sup> [Fossen, 2002] :

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} (1 - \cos \theta)u_1^2 + \cos \theta & (1 - \cos \theta)u_1u_2 - u_3 \sin \theta & (1 - \cos \theta)u_1u_3 + u_2 \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)u_2u_1 + u_3 \sin \theta & (1 - \cos \theta)u_2^2 + \cos \theta & (1 - \cos \theta)u_2u_3 - u_1 \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)u_3u_1 - u_2 \sin \theta & (1 - \cos \theta)u_3u_2 + u_1 \sin \theta & (1 - \cos \theta)u_3^2 + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.56})$$

Cette approche permet de montrer que, pour décrire parfaitement une rotation finie quelconque, il suffit de 4 paramètres : un angle et les trois composantes d'un vecteur. De manière identique aux nombres complexes qui permettent de décrire des rotations dans  $\mathbb{R}^2$ , les quaternions, qui sont composés de 4 composantes assimilées à un vecteur et à un scalaire, permettent de décrire des rotations dans  $\mathbb{R}^3$ . Cette matrice peut également s'exprimer en fonction de l'opérateur matriciel <sup>4</sup>  $(\cdot) \times$  défini par :

$$(\cdot) \times : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.57})$$

Deux autres formes de l'équation (G.1.56) sont <sup>5</sup> :

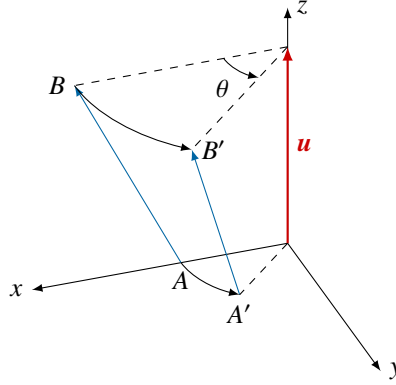
$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) = \cos \theta \cdot \mathbf{I}_d + \sin \theta \cdot \mathbf{u} \times + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^t \quad (\text{G.1.58})$$

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{I}_d + \sin \theta \cdot \mathbf{u} \times + (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{u} \times \quad (\text{G.1.59})$$

3.  $\mathbf{R}(\psi, \mathbf{k}_0)$ ,  $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathbf{R}(\phi, \mathbf{i}_2)$  en sont des cas particuliers.

4. Cet opérateur permet d'exprimer un produit vectoriel sous forme matricielle. Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs :  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

5. L'équation (G.1.58) est la formule d'Euler-Rodrigues (Olinde Rodrigues (1795-1851) fut un mathématicien français).

Figure G.1.3 : Exemple d'une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe  $u$ 

#### G.1.2.4 Différentiation et vitesse angulaire

Soient  $v$  et  $\tilde{v}$  deux vecteurs et  $R$  une matrice de rotation tels que :

$$v = R \cdot \tilde{v} \quad (G.1.60)$$

$$\tilde{v} = R^t \cdot v \quad (G.1.61)$$

Le vecteur  $\tilde{v}$  est supposé constant dans le repère  $R$ . Sa différentiation est donc nulle :  $d\tilde{v} = 0$ . La différentiation de  $v$  est ainsi égale à :

$$dv = dR \cdot \tilde{v} = dR \cdot R^t \cdot v \quad (G.1.62)$$

La différentiation de l'équation (G.1.40) donne :

$$dR \cdot R^t = -R \cdot dR^t = -(R^t)^t \cdot dR^t = -dR \cdot R^t \quad (G.1.63)$$

La matrice formée par le produit des matrices  $dR$  et  $R^t$  est donc antisymétrique. Il existe donc un vecteur  $\theta_d$  tel que :

$$\theta_d \times = dR \cdot R^t \quad (G.1.64)$$

Si la différentiation s'effectue par rapport au temps, une des définitions de la vitesse angulaire  $\omega$  est retrouvée par identification des équations (G.1.62) et (G.1.64) [Bauchau et Choi, 2003] :

$$\omega \times = \dot{R} \cdot R^t \quad \dot{R} = \omega \times R \quad (G.1.65)$$

Ces deux relations, quoique rigoureuses, ne permettent pas d'obtenir facilement une expression du vecteur  $\theta_d$  (et donc de  $\omega$ ) car l'opérateur inverse de  $(\cdot) \times$  ne possède pas d'expression analytique simple. Par contre,  $(\cdot) \times$  est l'opérateur inverse partiel de l'opérateur **ax**, opérateur qui extrait « l'axe » d'une matrice. Soit  $M$  une matrice, l'opérateur **ax** est défini de la façon suivante :

$$\mathbf{ax}(M) \times = \frac{1}{2} (M - M^t) \quad (G.1.66)$$

Le membre de droite de l'équation précédente représente la partie antisymétrique de la matrice  $M$ . Le produit  $dR \cdot R^t$  étant antisymétrique, le vecteur  $\theta_d$  peut donc être défini par :

$$\theta_d = \mathbf{ax}(\theta_d \times) = \mathbf{ax}(dR \cdot R^t) \quad (G.1.67)$$

Malgré cette nouvelle définition, l'obtention de la vitesse angulaire reste difficile. Par contre, lorsque la paramétrisation de la rotation est définie par un paramètre noté  $r$  (cf. section G.1.2.5 page suivante), c.-à-d. que le produit  $dR \cdot R^t$  peut se mettre sous la forme  $W(r, dr)$ , il est possible d'en trouver une expression sous la forme :

$$\theta_d = \mathbf{ax}(W(r, dr)) = G(r) \cdot dr \quad (G.1.68)$$

Par conséquent, la vitesse angulaire  $\omega$  est obtenue par :

$$\omega = G(r) \cdot \dot{r} \quad (G.1.69)$$

### G.1.2.5 Paramétrisation des rotations

#### G.1.2.5.1 Introduction

Lorsque se pose le problème de la résolution numérique, le choix de la paramétrisation des rotations est un point important car il a des conséquences fortes sur les méthodes de résolution numérique. De nombreuses paramétrisations existent [Bauchau, 2011]. Il est possible de les classer selon deux catégories principales : celles minimales et, par opposition, celles non-minimales. Les paramétrisations minimales se basent sur le théorème d'Euler et consistent à exprimer la matrice de rotation en fonction de trois scalaires (angles de Cardan, angles d'Euler, un axe unitaire et un angle de rotation, etc.). Dans la seconde catégorie, ce sont principalement les quaternions (cf. section G.1.2.6 p. 330) ou les paramètres d'Euler qui sont utilisés.

Les paramétrisations minimales sont caractérisées par un faible coût de calcul. Cependant, elles peuvent présenter des comportements singuliers (cf. section G.1.2.2.2 p. 324) lorsque les angles de rotation deviennent importants. Pour palier ce problème, il est possible d'utiliser une approche dite « d'actualisation ». L'idée principale de cette méthode est d'actualiser certaines informations pour que l'amplitude des rotations traitées soit toujours inférieure aux limites de la paramétrisation choisie. Au contraire, les quaternions permettent de prendre en compte ces singularités. Par conséquent, ils sont plus adaptés lorsque c'est la rotation totale qui est paramétrée.

Cette section a pour objectif d'introduire la paramétrisation vectorielle des rotations sur deux exemples particuliers. La présentation des quaternions est, quant à elle, réalisée à la section G.1.2.6 p. 330. Par la suite, le paramètre vectoriel utilisé est noté  $r$ .

#### G.1.2.5.2 Paramétrisation en tant que vecteur de rotation

Il existe une première paramétrisation qui découle naturellement de la formule d'Euler-Rodrigues : la paramétrisation en tant que vecteur de rotation. Cette paramétrisation est d'autant plus intéressante que de nombreuses paramétrisations découlent de cette dernière [Bauchau, 2011] et représentent une rotation géométrique dans le cas de mouvement plan. Dans ce cas, le paramètre  $r$  est défini de la façon suivante :

$$r = \theta \cdot u \quad (G.1.70)$$

où  $u$  est l'axe unitaire de rotation et  $\theta$  l'angle de rotation. Ainsi, selon une formulation équivalente à la formule d'Euler-Rodrigues (cf. équation G.1.59 p. 326) :

$$R = I_d + \sin \theta \cdot u \times + (1 - \cos \theta) \cdot u \times \cdot u \times = I_d + \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot r \times + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot r \times \cdot r \times \quad (G.1.71)$$

Cette paramétrisation est bien définie car les formules classiques des développements limités permettent de montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (G.1.72)$$

Afin d'évaluer la matrice  $G$  (cf. équation G.1.71), il est nécessaire d'évaluer dans un premier temps le produit  $dR \cdot R^t$ . La différentiation de l'équation (G.1.71) donne :

$$dR = d\theta \cdot \cos(\theta) \cdot u \times + d\theta \cdot \sin(\theta) \cdot u \times \cdot u \times + \sin(\theta) du \times + (1 - \cos(\theta)) (du \times \cdot u \times + u \times \cdot du \times) \quad (G.1.73)$$

De plus :

$$R^t = I_d - \sin(\theta) \cdot u \times + (1 - \cos(\theta)) \cdot u \times \cdot u \times \quad (G.1.74)$$

Le produit des matrices  $\mathbf{dR}$  et  $\mathbf{R}^t$  est complexe mais se simplifie lorsque certaines propriétés découlant<sup>6</sup> de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$  sont appliquées. Ces propriétés sont les suivantes<sup>7</sup> :

$$\mathbf{du} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{du} = 0 \quad \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{u} \times = -\mathbf{u} \times \quad \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{du} \times \cdot \mathbf{u} \times = 0 \quad (\text{G.1.75})$$

Ainsi, après de nombreuses simplifications :

$$\mathbf{dR} \cdot \mathbf{R}^t = d\theta \mathbf{u} \times + \sin(\theta) \cdot \mathbf{du} \times + (1 - \cos(\theta)) \cdot (\mathbf{u} \times \cdot \mathbf{du} \times - \mathbf{du} \times \cdot \mathbf{u} \times) \quad (\text{G.1.76})$$

Il reste à utiliser la propriété suivante, soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs :

$$\mathbf{a} \times \cdot \mathbf{b} \times - \mathbf{b} \times \cdot \mathbf{a} \times = (\mathbf{a} \times \cdot \mathbf{b}) \times \quad (\text{G.1.77})$$

En utilisant cette dernière propriété, l'équation (G.1.76) est de nouveau simplifiée :

$$\mathbf{dR} \cdot \mathbf{R}^t = d\theta \mathbf{u} \times + \sin(\theta) \cdot \mathbf{du} \times + (1 - \cos(\theta)) \cdot (\mathbf{u} \times \cdot \mathbf{du}) \times \quad (\text{G.1.78})$$

Ainsi, par définition, le vecteur  $\theta_d$  peut être évalué par :

$$\theta_d = d\theta \mathbf{u} + (\sin(\theta) \cdot \mathbf{I}_d + (1 - \cos(\theta)) \cdot \mathbf{u} \times) \cdot \mathbf{du} \quad (\text{G.1.79})$$

Si la différentiation s'effectue par rapport au temps, une expression de la vitesse angulaire  $\omega$  est obtenue [Trainelli et Croce, 2004] :

$$\omega = \dot{\theta} \mathbf{u} + (\sin(\theta) \cdot \mathbf{I}_d + (1 - \cos(\theta)) \cdot \mathbf{u} \times) \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{G.1.80})$$

Afin de mettre l'équation (G.1.79) sous la forme de l'équation (G.1.68), il est nécessaire de travailler par identification. Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois scalaires. La matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  est recherchée sous la forme<sup>8</sup> :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = a \cdot \mathbf{I}_d + b \cdot \mathbf{u} \times + c \cdot \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{u} \times \quad (\text{G.1.81})$$

Ainsi, en développant et simplifiant le produit  $\mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot (d\theta \cdot \mathbf{u} + \theta \cdot \mathbf{du})$  :

$$\theta_d = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = a \cdot d\theta \cdot \mathbf{u} + ((a - c) \cdot \theta \cdot \mathbf{I}_d + b \cdot \theta \cdot \mathbf{u} \times) \cdot \mathbf{du} \quad (\text{G.1.82})$$

Par identification entre les équations (G.1.79) et (G.1.82) :

$$a = 1 \quad b = \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} \quad c = 1 - \frac{\sin(\theta)}{\theta} \quad (\text{G.1.83})$$

Au final, la matrice  $\mathbf{G}$  est égale à :

$$\mathbf{G} = \mathbf{I}_d + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta} \cdot \mathbf{u} \times + \left(1 - \frac{\sin(\theta)}{\theta}\right) \cdot \mathbf{u} \times \cdot \mathbf{u} \times \quad (\text{G.1.84})$$

$$= \mathbf{I}_d + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \cdot \mathbf{r} \times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{\sin(\theta)}{\theta^3}\right) \cdot \mathbf{r} \times \cdot \mathbf{r} \times \quad (\text{G.1.85})$$

Le déterminant de cette matrice vaut :

$$\det(\mathbf{G}) = 2 \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \quad (\text{G.1.86})$$

Soit  $k \in \mathbb{Z}^*$ , la matrice  $\mathbf{G}$  est donc singulière (non-inversible) pour  $\theta = k \cdot 2\pi$ . Cependant, comme il a été précisé précédemment, ce problème peut être évité par une approche dite « d'actualisation ». En réalité, le principal problème de cette méthode réside dans l'évaluation des matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{G}$ . En effet, ces dernières nécessitent de calculer des fonctions trigonométriques ce qui peut être imprécis et coûteux. D'autres paramétrisation permettent de s'affranchir de ce problème et notamment la paramétrisation de Gibbs-Rodrigues qui est présentée à la section suivante.

6. Le signe « . » représente ici le produit scalaire et non pas le produit matriciel noté « · ».

7. Ces différentes propriétés peuvent rapidement être vérifiées par un logiciel de calcul formel comme Maxima [Maxima].

8. Cette forme n'est pas arbitraire. Elle peut être vue comme un développement limité de la paramétrisation exponentielle de la matrice de rotation [Trainelli et Croce, 2004]. Les termes supérieurs à la puissance 2 sont simplifiés par l'équation (G.1.75).

### G.1.2.5.3 Paramétrisation en tant que paramètre de Gibbs-Rodrigues

La paramétrisation de Gibbs-Rodrigues définit le paramètre  $\mathbf{r}$  comme étant [Shabana, 2010] :

$$\mathbf{r} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{G.1.87})$$

L'expression de la matrice de rotation peut être directement obtenue par des transformations des fonctions trigonométriques de l'équation (G.1.71). Pour évaluer la matrice  $\mathbf{G}$ , il est nécessaire de réaliser les mêmes opérations et simplifications que dans la section précédente. Ces différents calculs ne sont pas présentés. L'expression des différentes matrices est :

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_d + \frac{4}{4 + \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{r}} \left( \mathbf{r} \times + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \times \cdot \mathbf{r} \times \right) \quad (\text{G.1.88})$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{4}{4 + \mathbf{r}^t \cdot \mathbf{r}} \left( \mathbf{I}_d + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{r} \times \right) \quad (\text{G.1.89})$$

Ces deux expressions montrent que cette paramétrisation ne nécessite pas d'évaluer des fonctions trigonométriques pour évaluer la matrice de rotation ou la vitesse angulaire. Seules des opérations matricielles sont nécessaires. Par contre, elle est plus restrictive sur l'amplitude des angles admissibles puisque, du fait de la fonction tangente, le paramètre  $\mathbf{r}$  devient singulier pour  $\theta = k \cdot \pi/2$ . Une approche dite « d'actualisation » est donc d'autant plus nécessaire. Le développement de l'équation (G.1.88) permet de trouver l'algorithme d'évaluation du paramètre de Gibbs-Rodrigues (cf. algorithme G.1.2) à partir de la matrice de rotation du corps (cf. équation G.1.90).

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2} \begin{bmatrix} 4 + \mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_3^2 & 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - 4\mathbf{r}_3 & 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 + 4\mathbf{r}_2 \\ 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3 & 4 - \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_3^2 & 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 - 4\mathbf{r}_1 \\ 2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 - 4\mathbf{r}_2 & 2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 + 4\mathbf{r}_1 & 4 - \mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.90})$$

---

**Données :** Matrice de rotation :  $\mathbf{R}$

**Résultat :** Paramètre de Gibbs-Rodrigues :  $\mathbf{r}$

// Calcul de la trace

1  $tr \leftarrow \mathbf{R}_{1,1} + \mathbf{R}_{2,2} + \mathbf{R}_{3,3}$

// Évaluation de  $\mathbf{r}$

2  $\mathbf{r}_1 \leftarrow \frac{2}{1+tr} (\mathbf{R}_{3,2} - \mathbf{R}_{2,3})$

3  $\mathbf{r}_2 \leftarrow \frac{2}{1+tr} (\mathbf{R}_{1,3} - \mathbf{R}_{3,1})$

4  $\mathbf{r}_3 \leftarrow \frac{2}{1+tr} (\mathbf{R}_{2,1} - \mathbf{R}_{1,2})$

---

**Algorithme G.1.2 :** Passage de matrice de rotation au paramètre de Gibbs-Rodrigues

### G.1.2.6 Quaternions

De nombreux travaux décrivent les propriétés et l'utilisation des quaternions pour des applications numériques. L'objectif ici est uniquement de présenter les points importants afin de faire le lien entre les rotations et les quaternions.

## G.1.2.6.1 Généralités

L'ensemble  $\mathbb{H}$  des quaternions (qui est un corps non-commutatif pour la multiplication) est une extension des nombres complexes en dimension 3 (malgré 4 composantes). Il est défini par :

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = x_0\mathbf{e} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4\} \quad (\text{G.1.91})$$

où  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  sont les vecteurs de base dont la table de multiplication est la suivante :

	$\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{e}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{e}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{e}$

Tableau G.1.1 : Table de multiplication des vecteurs de base des quaternions

Cette table de multiplication est une traduction du produit vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{H}$ . Soit  $\mathbf{x} = x_0\mathbf{e} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$  un quaternion de  $\mathbb{H}$ . Par extension au nombre complexe,  $x_0\mathbf{e}$  est dite partie réelle et  $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$  la partie pure. La partie réelle d'un quaternion s'identifie aux nombres réels<sup>9</sup>  $\mathbb{R}$  et la partie pure à  $\mathbb{R}^3$ . Un quaternion est dit pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des quaternions purs est noté  $\mathbb{P}$  et est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Il peut être défini de la façon suivante :

$$\mathbb{P} = \{\mathbf{q} = q_0\mathbf{e} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \mid \mathbf{q} \in \mathbb{H}, q_0 = 0\} \quad (\text{G.1.92})$$

Pour évaluer le conjugué de  $\mathbf{x}$  qui est noté  $\bar{\mathbf{x}}$ , la partie imaginaire est inversée. La norme d'un quaternion est notée  $\|\cdot\|$  et est définie par :  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}}$ . La modélisation des rotations par les quaternions utilise un sous-groupe des quaternions. Ce sous-groupe, noté  $\mathbb{S}$ , est constitué des quaternions de norme égale à 1. Il est défini par :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \in \mathbb{H}, \|\mathbf{q}\| = 1\} \quad (\text{G.1.93})$$

Il est possible de montrer que  $\mathbb{S}$  est isomorphe au groupe des rotations et que chaque élément de  $\mathbb{S}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{r} = \cos \frac{\theta}{2}\mathbf{e} + \sin \frac{\theta}{2}\mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}$  est un quaternion pur de norme 1. Ce dernier représente l'axe de la rotation et  $\theta$  son angle. Soient  $\mathbf{r} \in \mathbb{S}$  et  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{P}$ . Soit  $\mathbf{R}$  l'opérateur de rotation (et non pas celui de changement de base) associé à  $\mathbf{r}$  dans  $\mathbb{P}$ . Ce dernier est défini par :

$$\mathbf{R} : \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ \mathbf{q}_0 & \longrightarrow & \mathbf{r}\mathbf{q}_0\bar{\mathbf{r}} \end{array} \quad (\text{G.1.94})$$

## G.1.2.6.2 Lien entre quaternion et rotation

Il est important de remarquer qu'à une rotation (une matrice de rotation plus précisément), est associé un quaternion appartenant au sous-groupe  $\mathbb{S}$ . L'opérateur de rotation (cf. équation G.1.94) n'est appliqué qu'à des quaternions purs uniquement, c.-à-d. ceux appartenant à  $\mathbb{P}$ . Le schéma ci-dessous résume le lien entre quaternion et rotation.  $\mathbb{P}$  étant un espace vectoriel de dimension 3, il est bien isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} \in \mathbb{P} & \mathbf{r} = \cos \frac{\theta}{2}\mathbf{e} + \sin \frac{\theta}{2}\mathbf{u} \in \mathbb{S} & \mathbf{q} \in \mathbb{P} \\ \mathbf{p} & \longrightarrow & \mathbf{q} = \mathbf{r}\mathbf{p}\bar{\mathbf{r}} \end{array} \quad (\text{G.1.95})$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 & \mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) \in SO(\mathbb{R}^3) & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y} = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{u})\mathbf{x} \end{array}$$

9. C'est la raison pour laquelle  $\mathbf{e}$  est souvent écrit souvent comme le scalaire unité 1.



La matrice de rotation  $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u})$  peut facilement être identifiée au quaternion  $\mathbf{r}$  représentant la rotation d'axe  $\mathbf{u}$  et d'angle  $\theta$  comme le montrent les équations (G.1.96), (G.1.97) et (G.1.98). Pour cela la table de multiplication (cf. tableau G.1.1 page précédente) et l'équation (G.1.96) sont utilisées.

$$\mathbf{r} \in \mathcal{S} \Rightarrow r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \quad (\text{G.1.96})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{p}\bar{\mathbf{r}} &= (r_0\mathbf{e} + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k})(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(r_0\mathbf{e} - r_1\mathbf{i} - r_2\mathbf{j} - r_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{cases} \left[ \begin{array}{ccc} (2(r_0^2 + r_1^2) - 1) & p_1 & + \\ 2(r_1r_2 + r_0r_3) & p_1 & + \\ 2(r_1r_3 - r_0r_2) & p_1 & + \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} 2(r_1r_2 - r_0r_3) & p_2 & + \\ (2(r_0^2 + r_2^2) - 1) & p_2 & + \\ 2(r_2r_3 + r_0r_1) & p_2 & + \end{array} & \left. \begin{array}{ccc} 2(r_1r_3 + r_0r_2) & p_3 & \\ 2(r_2r_3 - r_0r_1) & p_3 & \\ (2(r_0^2 + r_3^2) - 1) & p_3 & \end{array} \right] \mathbf{i} + \\ & \quad \left[ \begin{array}{ccc} 2(r_1r_2 - r_0r_3) & p_2 & + \\ (2(r_0^2 + r_2^2) - 1) & p_2 & + \\ 2(r_2r_3 + r_0r_1) & p_2 & + \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} 2(r_1r_3 + r_0r_2) & p_3 & \\ 2(r_2r_3 - r_0r_1) & p_3 & \\ (2(r_0^2 + r_3^2) - 1) & p_3 & \end{array} & \left. \begin{array}{ccc} 2(r_1r_3 + r_0r_2) & p_3 & \\ 2(r_2r_3 - r_0r_1) & p_3 & \\ (2(r_0^2 + r_3^2) - 1) & p_3 & \end{array} \right] \mathbf{j} + \\ & \quad \left[ \begin{array}{ccc} 2(r_1r_3 + r_0r_2) & p_3 & \\ 2(r_2r_3 - r_0r_1) & p_3 & \\ (2(r_0^2 + r_3^2) - 1) & p_3 & \end{array} \right] \mathbf{k} \end{cases} \quad (\text{G.1.97}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2(r_0^2 + r_1^2) - 1 & 2(r_1r_2 - r_0r_3) & 2(r_1r_3 + r_0r_2) \\ 2(r_1r_2 + r_0r_3) & 2(r_0^2 + r_2^2) - 1 & 2(r_2r_3 - r_0r_1) \\ 2(r_1r_3 - r_0r_2) & 2(r_2r_3 + r_0r_1) & 2(r_0^2 + r_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1.98})$$

En posant  $\mathbf{r} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{e} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u}$ , il est possible de retrouver la matrice de l'équation (G.1.56) par le biais des formules de trigonométrie classiques. Ceci fait bien le lien entre les quaternions et le théorème d'Euler. Il est également possible de remarquer par l'équation (G.1.98) que  $\mathbf{r}$  et  $-\mathbf{r}$  représentent la même matrice de rotation. En matrice de rotation, cela signifie que :

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{R}(-\theta, -\mathbf{u}) \quad (\text{G.1.99})$$

### G.1.2.6.3 Algorithmes de conversion

La traduction d'un quaternion en matrice de rotation est simplement réalisée à partir de l'équation (G.1.98). Par contre, l'algorithme d'évaluation d'un quaternion à partir de la matrice de rotation est plus complexe car il y a une singularité [Fossen, 2002]. Il est donc nécessaire de faire un choix. Un algorithme classique est utilisé au sein de ces travaux [Shepperd, 1978]. Il est présenté par l'algorithme (G.1.3 page suivante).

---

**Données :** Matrice de rotation :  $R$   
**Résultat :** Quaternion :  $q$

// Calcul de la trace  
1  $tr \leftarrow R_{1,1} + R_{2,2} + R_{3,3}$

// Calcul de quelques quantités  
2  $r_{02} \leftarrow 1 + tr$   
3  $r_{12} \leftarrow 1 + 2R_{1,1} - tr$   
4  $r_{22} \leftarrow 1 + 2R_{2,2} - tr$   
5  $r_{32} \leftarrow 1 + 2R_{3,3} - tr$

// Cas 1  
6 **si**  $i = 0$  **alors**  
7      $q_0 \leftarrow \sqrt{r_{02}}/2$   
8      $q_1 \leftarrow -(R_{2,3} - R_{3,2})/(2\sqrt{r_{02}})$   
9      $q_2 \leftarrow -(R_{3,1} - R_{1,3})/(2\sqrt{r_{02}})$   
10     $q_3 \leftarrow -(R_{1,2} - R_{2,1})/(2\sqrt{r_{02}})$   
11 **finsi**

// Cas 2  
12 **si**  $i = 0$  **alors**  
13      $q_0 \leftarrow -(R_{2,3} - R_{3,2})/(2\sqrt{r_{12}})$   
14      $q_1 \leftarrow \sqrt{r_{12}}/2$   
15      $q_2 \leftarrow (R_{2,1} + R_{1,2})/(2\sqrt{r_{12}})$   
16      $q_3 \leftarrow (R_{1,3} + R_{3,1})/(2\sqrt{r_{12}})$   
17 **finsi**

// Cas 3  
18 **si**  $i = 0$  **alors**  
19      $q_0 \leftarrow -(R_{3,1} - R_{1,3})/(2\sqrt{r_{22}})$   
20      $q_1 \leftarrow (R_{2,1} + R_{1,2})/(2\sqrt{r_{22}})$   
21      $q_2 \leftarrow \sqrt{r_{22}}/2$   
22      $q_3 \leftarrow (R_{3,2} + R_{2,3})/(2\sqrt{r_{22}})$   
23 **finsi**

// Cas 4  
24 **si**  $i = 0$  **alors**  
25      $q_0 \leftarrow -(R_{1,2} - R_{2,1})/(2\sqrt{r_{32}})$   
26      $q_1 \leftarrow (R_{1,3} + R_{3,1})/(2\sqrt{r_{32}})$   
27      $q_2 \leftarrow (R_{3,2} + R_{2,3})/(2\sqrt{r_{32}})$   
28      $q_3 \leftarrow \sqrt{r_{32}}/2$   
29 **finsi**

---

**Algorithme G.1.3 :** Passage d'une matrice de rotation à un quaternion

## G.2 Méthodes d'intégration temporelle

### G.2.1 Introduction

Cette annexe présente quelques généralités sur l'intégration temporelle des équations différentielles.

### G.2.2 Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est dite ordinaire lorsqu'elle peut se mettre sous forme explicite, c.-à-d. lorsqu'il existe une fonction  $f$  tel que :

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (\text{G.2.1})$$

La forme explicite est un cas particulier. Dans tous les cas, les équations différentielles peuvent se présenter sous la forme implicite suivante :

$$f(t, y, \dot{y}) = 0 \quad (\text{G.2.2})$$

Les méthodes classiques de résolution des équations différentielles du premier ordre s'appuient principalement sur la résolution des équations différentielles pouvant se mettre sous forme explicite. Cependant, les problèmes multi-corps produisent naturellement des systèmes d'équations différentielles algébriques du premier ordre qui ne peuvent pas se mettre directement sous forme explicite du fait de leur caractère « algébrique ». Des méthodes de résolution particulières doivent donc être utilisées. Cependant, il est toujours intéressant de présenter quelques méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Afin de simplifier le contenu de cette annexe, la dimension du problème est supposée unitaire car la généralisation aux dimensions supérieures est présentée dans de nombreux ouvrages.

### G.2.3 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy consiste à chercher la solution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre avec des conditions initiales. Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{G.2.3})$$

Au sein de cette annexe, le temps est discrétisé régulièrement sur l'intervalle d'intégration. Le pas de discrétisation temporelle est noté  $h$ . Des conventions d'écritures sont prises pour simplifier les notations. Ainsi, à l'instant  $t$ ,  $t_n = n \cdot h$ .

### G.2.4 Approche par intégration

L'équation (G.2.3) peut également s'écrire de la façon suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \quad (\text{G.2.4})$$

Ainsi, en connaissant l'intégrale de  $f$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , il est possible de résoudre le problème pas à pas. Cependant, il est rare de connaître cette intégrale sur cet intervalle ce qui rend nécessaire l'utilisation de méthodes numériques d'approximation des intégrales. Au sein de cette annexe, les méthodes mono-pas sont différenciées des méthodes multi-pas mais il existe de nombreuses autres catégories ou sous-catégories. Le membre de droite de l'équation (G.2.4) est appelé intégrateur et la fonction correspondante est notée  $F$ . Une méthode est dite mono-pas si, l'intégrateur peut se mettre sous la forme :

$$y_{n+1} = F(y_n, f_{n+1}, f_n) \quad (\text{G.2.5})$$

Elle est dite multi-pas si elle peut se mettre sous la forme :

$$y_{n+1} = F(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots) \quad (\text{G.2.6})$$

Il est également vrai que certaines méthodes dite mono-pas utilisent des pas intermédiaires (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 par exemple). Cependant, comme elles n'utilisent pas les informations des temps antérieurs à  $t_n$ , elles sont dites mono-pas. Si l'intégrateur ne dépend pas de  $f_{n+1}$ , alors la méthode est explicite. Elle est dite implicite sinon. Des explications détaillées et de nombreux exemples peuvent être trouvés dans [Huré, 2002], [Viot, 2010], [Weil et Yger, 2009] et [Hairer, 2001]. De part l'équation (G.2.4), le problème différentiel est transformé en un problème d'intégration. Quelques formules d'approximation des intégrales sont donc présentées à la section suivante.

### G.2.5 Quelques formules d'intégration

Formule du point milieu (approximation par un polynôme d'ordre 0) :

$$\int_0^1 g(t)dt = g(1/2) \quad (\text{G.2.7})$$

Formule des trapèzes (approximation par un polynôme d'ordre 1) :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{2} [g(0) + g(1)] \quad (\text{G.2.8})$$

Formule de Simpson (approximation par un polynôme d'ordre 2) :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{6} [g(0) + 4g(1/2) + g(1)] \quad (\text{G.2.9})$$

Formule de la « pulcherrima et utilissima regula » de Newton (approximation par un polynôme d'ordre 3) :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{8} [g(0) + 3g(1/3) + 3g(2/3) + g(1)] \quad (\text{G.2.10})$$

### G.2.6 Quelques schémas d'intégration mono-pas

#### G.2.6.1 Méthode d'Euler explicite (1768)

Cette méthode consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par sa valeur en  $t_n$  (polynôme d'ordre 0). C'est une méthode mono-pas d'ordre 1. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (\text{G.2.11})$$

#### G.2.6.2 Méthode de Runge (1895)

Cette méthode consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par sa valeur en  $t_n + h/2$  (polynôme d'ordre 0). Une approximation de sa valeur en  $t_n + h/2$  est réalisée par la méthode d'Euler explicite. C'est une méthode mono-pas d'ordre 2. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$\begin{aligned} y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{G.2.12})$$

### G.2.6.3 Méthode de Heun (1900)

Cette méthode consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par une droite passant par  $f(t_n, y_n)$  et  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$  (polynôme d'ordre 1). Une approximation de sa valeur en  $t_{n+1}$  est réalisée par la méthode d'Euler explicite. C'est une méthode mono-pas d'ordre 2 de type prédiction-correction. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) && \text{Prédiction} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})] && \text{Correction} \end{aligned} \quad (\text{G.2.13})$$

### G.2.6.4 Méthode d'Euler implicite

Cette méthode consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par sa valeur en  $t_{n+1}$  (polynôme d'ordre 0). C'est une méthode mono-pas d'ordre 1. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (\text{G.2.14})$$

### G.2.6.5 Méthode de Crank-Nicolson (1947)

Cette méthode consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par une droite passant par  $f(t_n, y_n)$  et  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$  (polynôme d'ordre 1). En opposition à la méthode de Heun, ce n'est pas une approximation de sa valeur en  $t_{n+1}$  qui est réalisée ce qui fait quelle garde son caractère implicite. C'est une méthode mono-pas implicite d'ordre 2. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (\text{G.2.15})$$

### G.2.6.6 Méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 (1901)

Cette méthode très classique fait partie d'une très grande famille<sup>10</sup> et consiste à approximer la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par un polynôme d'ordre 3. C'est une méthode mono-pas à pas intermédiaires d'ordre 4. Les différentes étapes sont les suivantes :

1. Étape 1 :
  - (a) Évaluation de la pente en  $t_n$  :  $\tilde{k}_1^n$ .
  - (b) Estimation de la valeur en  $t_{n+\frac{1}{2}}$  avec  $\tilde{k}_1^n$  :  $y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_1^n$ .
2. Étape 2 :
  - (a) Prédiction de la pente  $t_{n+\frac{1}{2}}$  avec  $y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_1^n$  :  $\tilde{k}_2^n$ .
  - (b) Estimation de la valeur  $t_{n+\frac{1}{2}}$  avec  $\tilde{k}_2^n$  :  $y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_2^n$ .
3. Étape 3 :
  - (a) Correction de la pente  $t_{n+\frac{1}{2}}$  avec  $y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_2^n$  :  $\tilde{k}_3^n$ .
  - (b) Estimation de la valeur  $t_{n+1}$  avec  $\tilde{k}_3^n$  :  $y_n + h\tilde{k}_3^n$ .
4. Étape 4 :
  - (a) Évaluation de la pente en  $t_{n+1}$  avec  $y_n + h\tilde{k}_3^n$  :  $\tilde{k}_4^n$ .

10. Les méthodes de Runge-Kutta sont sous-déterminées. Il existe également les méthodes de Runge-Kutta implicite.

Elle est d'ordre 4. Sa formule est donnée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_1^n &= f(t_n, y_n) \\
 \tilde{k}_2^n &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_1^n\right) && \text{Prédiction} \\
 \tilde{k}_3^n &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\tilde{k}_2^n\right) && \text{Correction} \\
 \tilde{k}_4^n &= f\left(t_{n+1}, y_n + h\tilde{k}_3^n\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(\tilde{k}_1^n + 2\tilde{k}_2^n + 2\tilde{k}_3^n + \tilde{k}_4^n)
 \end{aligned} \tag{G.2.16}$$

Le lien avec la formule de Simpson est présenté ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \\
 &\approx y_n + \frac{h}{6} \left[ \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{\approx \tilde{k}_1^n} + \underbrace{4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right)}_{\approx 2\tilde{k}_2^n + 2\tilde{k}_3^n} + \underbrace{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}_{\approx \tilde{k}_4^n} \right] \\
 &\approx y_n + \frac{h}{6}(\tilde{k}_1^n + 2\tilde{k}_2^n + 2\tilde{k}_3^n + \tilde{k}_4^n)
 \end{aligned} \tag{G.2.17}$$

## G.2.7 Quelques schémas d'intégration multi-pas

### G.2.7.1 Méthodes d'Adams (1855)

Le principe des méthodes d'Adams consiste à interpoler la fonction à intégrer entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par un polynôme de Lagrange d'ordre donné pouvant être évalué par l'interpolation polynomiale de Newton. Si le polynôme d'interpolation est explicite, elle est appelée méthode d'Adams-Bashforth, s'il est implicite c'est une méthode d'Adams-Moulton. Les formules sont présentées ci-dessous.

#### G.2.7.1.1 Méthode d'Adams-Bashforth (1883)

La méthode d'Adams-Bashforth<sup>11</sup> consiste à mettre en place un polynôme interpolateur avec les points évalués en  $t_n, t_{n-1}, t_{n-2}$ , etc. L'intégrale de ce polynôme est évaluée entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Si l'ordre du polynôme est nul, c'est un schéma d'Euler explicite. Les formules sont, en fonction de l'ordre du polynôme interpolateur :

$$\begin{aligned}
 \text{ordre 0 : } y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\
 \text{ordre 1 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{3}{2}f(x_n, y_n) - \frac{1}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1}) \right] \\
 \text{ordre 2 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{23}{12}f(x_n, y_n) - \frac{16}{12}f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{5}{12}f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right] \\
 \text{ordre 3 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{55}{24}f(x_n, y_n) - \frac{59}{24}f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{37}{24}f(x_{n-2}, y_{n-2}) - \frac{9}{24}f(x_{n-3}, y_{n-3}) \right]
 \end{aligned} \tag{G.2.18}$$

11. John Couch Adams a utilisé cette méthode en 1855 et Francis-Bashforth l'a publiée en 1883.

### G.2.7.1.2 Méthode d'Adams-Moulton (1926)

La méthode d'Adams-Moulton<sup>12</sup> consiste à mettre en place un polynôme interpolateur avec les points évalués en  $t_{n+1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n-1}$ , etc. L'intégrale de ce polynôme est évaluée entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Si l'ordre du polynôme est nulle, c'est un schéma d'Euler implicite. Si l'ordre du polynôme est égal à 1, c'est un schéma de Crank-Nicolson. Les formules sont, en fonction de l'ordre du polynôme interpolateur :

$$\begin{aligned}
 \text{ordre 0 : } y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
 \text{ordre 1 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{1}{2}f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{2}f(x_n, y_n) \right] \\
 \text{ordre 2 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{5}{12}f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{8}{12}f(x_n, y_n) - \frac{1}{12}f(x_{n-1}, y_{n-1}) \right] \\
 \text{ordre 3 : } y_{n+1} &= y_n + h \left[ \frac{9}{24}f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{19}{24}f(x_n, y_n) - \frac{5}{24}f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{24}f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right] \quad (G.2.19)
 \end{aligned}$$

### G.2.7.2 Méthodes BDF

Le principe des méthodes BDF (« Backward Differentiation Formula ») est identique aux méthodes d'Adams sauf, qu'au lieu d'interpoler la fonction à intégrer, c'est l'inconnue qui est interpolée. La méthode d'ordre 2 est décrite ci-dessous mais il est possible de généraliser à des ordres supérieurs. En plus de la connaissance des points précédents ( $y_n$ ,  $y_{n-1}$ ,  $y_{n-2}$ , etc.), l'inconnue est définie par :

$$y(t) = \int f(t, y) dt \quad (G.2.20)$$

En interpolant  $y$  par les polynômes de Lagrange entre  $t_{n-1}$  et  $t_{n+1}$  :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_{n+1} \frac{(t - t_n)(t - t_{n-1})}{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} - t_{n-1})} \\
 &+ y_n \frac{(t - t_{n+1})(t - t_{n-1})}{(t_n - t_{n+1})(t_n - t_{n-1})} \\
 &+ y_{n-1} \frac{(t - t_{n+1})(t - t_n)}{(t_{n-1} - t_{n+1})(t_{n-1} - t_n)} \quad (G.2.21)
 \end{aligned}$$

En dérivant ce polynôme :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= y_{n+1} \frac{(t - t_n + t - t_{n-1})}{2h^2} \\
 &- y_n \frac{(t - t_{n+1} + t - t_{n-1})}{h^2} \\
 &+ y_{n-1} \frac{(t - t_{n+1} + t - t_n)}{2h^2} \quad (G.2.22)
 \end{aligned}$$

En  $t_{n+1}$  la dérivée de ce polynôme doit être égale à la fonction. Soit l'équation :

$$\frac{dp}{dt}(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (G.2.23)$$

Par conséquent, le schéma d'intégration BDF-2 propose que :

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} [-y_{n-1} + 4y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (G.2.24)$$

<sup>12</sup>. Forest Ray Moulton a découvert que cette méthode peut être utilisée en tandem avec la méthode d'Adams-Bashforth pour former une méthode de type prédicteur-correcteur.

A l'ordre 1, le schéma correspond à un Euler implicite. Pour obtenir des ordres plus élevés, il est nécessaire d'interpoler à partir d'un nombre de points plus important. Ainsi, pour un schéma d'ordre 3 :

$$y_{n+1} = \frac{1}{11} [2y_{n-2} - 9y_{n-1} + 18y_n + 6hf(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (\text{G.2.25})$$

et pour un schéma d'ordre 4 :

$$y_{n+1} = \frac{1}{25} [-3y_{n-3} + 16y_{n-2} - 36y_{n-1} + 48y_n + 12hf(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (\text{G.2.26})$$

### G.2.7.3 Multi-Step

Le schéma utilisé par défaut dans MBDyn est un schéma développé spécifiquement pour la résolution des équations différentielles algébriques. Il est nommé « Multi-Step » car il peut potentiellement utiliser les informations des 2 pas de temps précédents. C'est un schéma implicite de type prédicteur-correcteur. Pour une présentation plus détaillée, il est possible de se référer à [Masarati *et al.*, 2001].

#### G.2.7.3.1 Formulation

Le prédicteur :

$$f(t_{n+1}, y_{n+1}) = -\frac{12}{h} (y_n - y_{n-1}) + 8f(t_n, y_n) + 5f(t_{n-1}, y_{n-1}) \quad (\text{G.2.27})$$

Le correcteur :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & (1 - \beta) y_n + \beta y_{n-1} \\ & + h \left( \delta + \frac{1}{2} \right) f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ & + h \left( \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} - 2\delta \right) f(t_n, y_n) \\ & + h \left( \frac{1}{2} \beta + \delta \right) f(t_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{G.2.28})$$

avec :

$$\beta = \frac{4\rho_\infty^2 - (1 - \rho_\infty)^2}{4 - (1 - \rho_\infty)^2} \quad \delta = \frac{(1 - \rho_\infty)^2}{2(4 - (1 - \rho_\infty)^2)} \quad (\text{G.2.29})$$

où  $\rho_\infty$  est le rayon spectral asymptotique du schéma (cf. section G.2.8 page suivante).

#### G.2.7.3.2 Cas critique $\rho_\infty = 0$

Le cas critique  $\rho_\infty = 0$  correspond au modèle BDF d'ordre 2. La preuve est présentée ci-dessous.

$$\rho_\infty = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{3} \text{ et } \delta = \frac{1}{6} \quad (\text{G.2.30})$$

En appliquant ces valeurs sur le correcteur :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + h \frac{4}{6} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ = & \frac{1}{3} [-y_{n-1} + 4y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})] \end{aligned} \quad (\text{G.2.31})$$



### G.2.7.3.3 Cas critique $\rho_\infty = 1$

Le cas critique  $\rho_\infty = 1$  correspond à un modèle de Crank-Nicolson partant du point précédent et réalisant deux intégrations successives. La preuve est présentée ci-dessous.

$$\rho_\infty = 1 \Rightarrow \beta = 1 \text{ et } \delta = 0 \quad (\text{G.2.32})$$

En appliquant ces valeurs sur le correcteur :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= y_{n-1} + \underbrace{\frac{h}{2} [f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_n, y_n)]}_{\text{Première intégration}} + \underbrace{\frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]}_{\text{Deuxième intégration}} \end{aligned} \quad (\text{G.2.33})$$

## G.2.8 Caractérisation des schémas de résolution

Les schémas de résolution sont comparés selon deux caractéristiques principales : l'ordre de précision, et la stabilité.

L'ordre de précision caractérise la capacité du schéma à réduire l'erreur en diminuant le pas de discrétisation utilisé. Il est évalué en réalisant des développements limités des schémas par la formule de Taylor. Dans cette annexe, ils sont donnés à titre d'information car il est possible de les retrouver facilement dans les ouvrages de référence.

La stabilité d'un schéma numérique peut être définie par différents critères car c'est une notion qui regroupe plusieurs phénomènes plus ou moins liés. La principale méthode de quantification de la stabilité repose sur l'équation test de Dahlquist (1963) et consiste à étudier le problème linéaire d'absorption dans le plan complexe. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = -\lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{G.2.34})$$

avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\Re(\lambda) > 0$ . La solution  $y(t) \in \mathbb{C}$  de ce problème est de la forme  $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$  et sa limite est  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . L'introduction de deux critères de stabilité est réalisée à la section suivante.

### G.2.8.1 Stabilité des méthodes mono-pas

Soit  $z = -\lambda h$ . À partir de l'équation (G.2.34), il est possible d'obtenir les relations suivantes :

$$h f_n = -\lambda h y_n = z y_n \quad (\text{G.2.35})$$

$$h f_{n+1} = -\lambda h y_{n+1} = z y_{n+1} \quad (\text{G.2.36})$$

Grâce à ces deux relations, la fonction de stabilité (ou fonction d'amplification) des schémas mono-pas peut être explicitement définie. Elle est notée  $G$  et définie par :

$$y_{n+1} = G(z) y_n \quad (\text{G.2.37})$$

Ainsi, la solution de l'équation (G.2.34) est donnée par :

$$y_n = G(z)^n y_0 \quad (\text{G.2.38})$$

L'équation (G.2.37) montre que, pour assurer la convergence, il faut que  $\|G(z)\| < 1$ . Ainsi, le domaine de stabilité est noté  $\mathbb{S}$  et est défini par :

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, \|G(z)\| < 1\} \quad (\text{G.2.39})$$

Le schéma est dit A-stable si le domaine de stabilité contient la totalité du domaine des complexes à partie réelle nulle ou négative. En d'autres mots, le schéma d'intégration est dit A-stable si la solution numérique converge dès que la solution réelle converge ( $\Re(\lambda) > 0$  avec un pas de temps positif).

La A-stabilité est une condition nécessaire pour pouvoir résoudre les équations différentielles raides (comme les équations différentielles algébriques) mais non-suffisante. Il faut également que le schéma de convergence soit L-stable. Le schéma de convergence est dit L-stable s'il est A-stable et qu'en plus :

$$\lim_{\Re(z) \rightarrow -\infty} |G(z)| = \lim_{\Re(z) \rightarrow -\infty} \left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = 0 \quad (\text{G.2.40})$$

Lorsque la L-stabilité est assurée, les hautes fréquences numériques sont rapidement amorties<sup>13</sup> et ceci rend possible la résolution des problèmes raides (c.-à-d. lorsque  $\Re(z) \rightarrow -\infty$ ). Par contre, les phénomènes à faible fréquence sont également amortis si des pas de temps trop grands sont utilisés. Le critère de L-stabilité peut donc être nuancé par un compromis entre forte-stabilité et précision. Cette nuance est apportée par le rayon spectral asymptotique qui est noté  $\rho_\infty$  et défini par :

$$\lim_{\Re(z) \rightarrow -\infty} |G(z)| = \rho_\infty \quad (\text{G.2.41})$$

où  $0 \leq \rho_\infty \leq 1$ . Le rayon spectral asymptotique est notamment le paramètre du schéma « Multi-Step ». Par conséquent, ce paramètre permet de spécifier le compromis entre l'amortissement des oscillations numériques et la précision obtenue pour les faibles fréquences.

### G.2.8.2 Stabilité des méthodes multi-pas

Une méthode à s-pas peut être synthétisée de la manière suivante :

$$\underbrace{\sum_{m=0}^s \alpha_m y_{n+1-s+m}}_{\text{Équation homogène}} + h \sum_{m=0}^s \beta_m f_{n+1-s+m} = 0 \quad (\text{G.2.42})$$

Après application de l'équation (G.2.36), la méthode peut se synthétiser en :

$$\sum_{m=0}^s \alpha_m y_{n+1-s+m} - z \sum_{m=0}^s \beta_m y_{n+1-s+m} = 0 \quad (\text{G.2.43})$$

De part l'équation (G.2.37), la fonction d'amplification est la solution d'une équation polynomiale. Soient  $\zeta = G(z)$  et  $\rho$  et  $\sigma$  les polynômes caractéristiques des deux membres de l'équation (G.2.43) :

$$\rho(\zeta) = \sum_{m=0}^s \alpha_m \zeta^m \quad \sigma(\zeta) = \sum_{m=0}^s \beta_m \zeta^m$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de l'équation (G.2.43) est noté  $\omega$  et est défini par :

$$\omega(\zeta, z) = \rho(\zeta) - \lambda \sigma(\zeta) \quad (\text{G.2.44})$$

Par extension aux méthodes mono-pas, le domaine de stabilité d'une méthode multi-pas est l'ensemble  $z \in \mathbb{C}$  où toutes les racines de l'équation (G.2.44) sont majorées par 1 [Weil et Yger, 2009]. Pour étudier la zone de stabilité, la frontière  $\partial S$  (la « root locus curve ») est évaluée. Cette frontière s'étudie pour  $|G(z)| = 1$ , c.-à-d.  $\zeta = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Ssi  $z \in \partial S$  alors  $\omega(e^{i\theta}, z) = 0$  et par conséquent :

$$\omega(e^{i\theta}, z) = \rho(e^{i\theta}) - z\sigma(e^{i\theta}) = 0 \quad (\text{G.2.45})$$

13. Elles sont même amorties de façon optimale car l'amortissement est d'autant plus grand que le problème est raide.

Afin de visualiser la zone de stabilité d'une fonction multi-pas, la fonction  $\phi$  est tracée dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  pour  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Cette fonction est définie par :

$$\phi(e^{i\theta}) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \quad (\text{G.2.46})$$

Une fois cette frontière connue, il faut vérifier dans chaque sous-domaine un point particulier ( $z$  est fixé et les normes des racines sont évaluées) pour vérifier si le schéma est stable ou instable. De nouveau, si l'ensemble du domaine de stabilité contient l'ensemble des complexes dont la valeur réelle est négative, la méthode d'intégration multi-pas est dite A-stable. Pour savoir si elle est L-stable, il faut évaluer les racines lorsque le système devient infiniment raide, c.-à-d. lorsque :

$$\Re(\lambda) \rightarrow -\infty \quad (\text{G.2.47})$$

Lorsque le système devient infiniment raide, les racines de  $\omega$  tendent vers les racines de  $\sigma$  (cf. équation G.2.44 page précédente). Le rayon spectral d'une méthode multi-pas est donc défini comme étant le maximum de la valeur absolue des racines de  $\sigma$ . Pour être L-stable, il est donc nécessaire que le schéma soit A-stable et que la totalité des racines de  $\sigma$  soient nulles. Cela ne peut se faire que si seul  $\beta_s = 0$  dans le cas des schémas multi-pas implicites<sup>14</sup>. C'est donc un critère très restrictif. De plus, il est possible de remarquer que seuls les schémas de type BDF sont construits de sorte à respecter complètement ce critère (sans pour autant être A-stable tout le temps).

### G.2.8.3 Comparaison des domaines de stabilité

Les fonctions de stabilité des méthodes mono-pas et les polynômes caractéristiques des méthodes multi-pas sont donnés aux tableaux G.2.1 et G.2.2. Les différentes zones de stabilité (zones grisées) sont données par les figures G.2.1 à G.2.17. Un récapitulatif des différents schémas présentés est proposé au tableau G.2.3.

Méthode	$G(z)$	Méthode	$G(z)$
Euler explicite	$1 + z$	Euler implicite	$\frac{1}{1 - z}$
Runge	$1 + z + \frac{z^2}{2}$	Heun	$1 + z + \frac{z^2}{2}$
Crank-Nicolson	$\frac{2 + z}{2 - z}$	Runge-Kutta 4	$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$

Tableau G.2.1 : Fonction de stabilité de quelques méthodes mono-pas

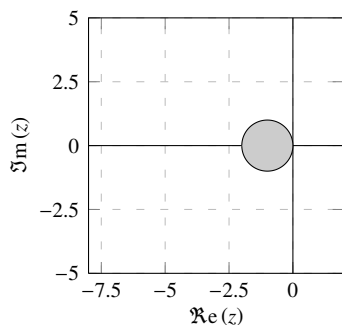


Figure G.2.1 : Euler explicite

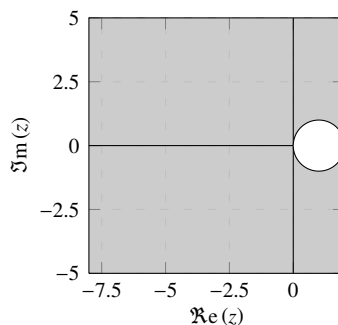


Figure G.2.2 : Euler implicite

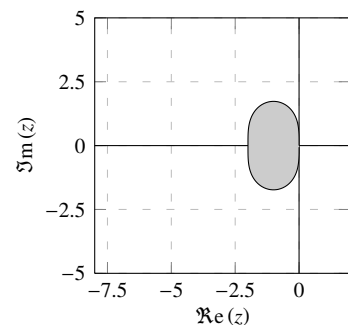


Figure G.2.3 : Heun ou Runge

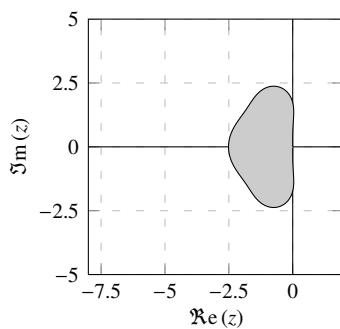
14. Il est possible de prouver que les schémas explicites ne peuvent pas être A-stable et, par conséquent, L-stable.

Méthode	$\rho(\zeta)$	$\sigma(\zeta)$
Adams Bashforth 1	$\zeta(\zeta - 1)$	$\frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}$
Adams Bashforth 2	$\zeta^2(\zeta - 1)$	$\frac{23}{12}\zeta^2 - \frac{16}{12}\zeta + \frac{5}{12}$
Adams Bashforth 3	$\zeta^3(\zeta - 1)$	$\frac{55}{24}\zeta^3 - \frac{59}{24}\zeta^2 + \frac{37}{24}\zeta - \frac{9}{24}$
Adams Moulton 2	$\zeta(\zeta - 1)$	$\frac{5}{12}\zeta^2 + \frac{8}{12}\zeta - \frac{1}{12}$
Adams Moulton 3	$\zeta^2(\zeta - 1)$	$\frac{9}{24}\zeta^3 + \frac{19}{24}\zeta^2 - \frac{5}{24}\zeta + \frac{1}{24}$
BDF-2	$3\zeta^2 - 4\zeta + 1$	$2\zeta^2$
BDF-3	$11\zeta^3 - 18\zeta^2 + 9\zeta - 2$	$6\zeta^3$
Multi-Step	$\zeta^2 - (1 - \beta)\zeta - \beta$	$\left(\delta + \frac{1}{2}\right)\zeta^2 + \left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} - 2\delta\right)\zeta + \left(\frac{1}{2}\beta + \delta\right)$

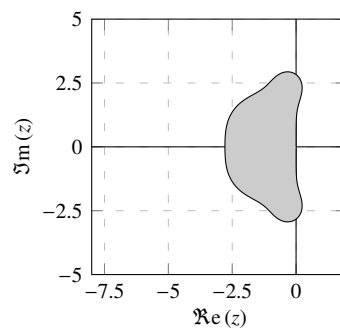
**Tableau G.2.2 :** Polynômes caractéristiques de quelques méthodes multi-pas

Méthode	Catégorie	Ordre	A-stable	L-stable	$\rho_\infty$
Euler explicite	mono-pas	1	non	non	-
Euler implicite	mono-pas	1	oui	oui	0
Adams-Bashforth 1	mono-pas	2	non	non	-
Crank-Nicolson	mono-pas	2	oui	non	1
Runge	mono-pas	2	non	non	-
Heun	mono-pas	2	non	non	-
Backward-Differentiation 2	multi-pas	2	oui	oui	0
Multi-Step ( $\rho_\infty \neq 0$ )	multi-pas	2	oui	non	$\rho_\infty$
Adams-Bashforth 2	multi-pas	3	non	non	-
Adams-Moulton 2	multi-pas	3	non	non	-
Backward-Differentiation 3	multi-pas	3	non	non	-
Adams-Bashforth 3	multi-pas	4	non	non	-
Adams-Moulton 3	multi-pas	4	non	non	-
Runge-Kutta 4 explicite	mono-pas	4	non	non	-

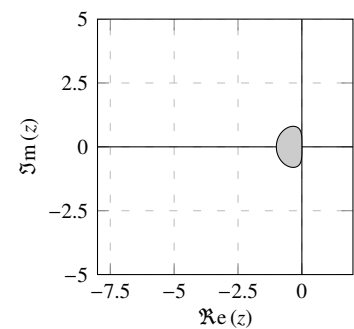
**Tableau G.2.3 :** Méthodes d'intégration temporelle – Résumé



**Figure G.2.4 :** Runge-Kutta 3



**Figure G.2.5 :** Runge-Kutta 4



**Figure G.2.6 :** Adams-Bashforth 1

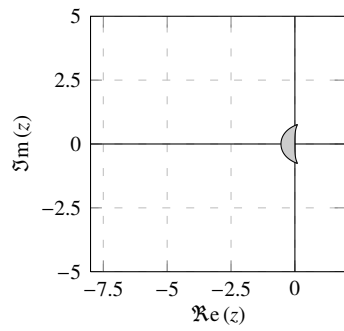


Figure G.2.7 : Adams-Bashforth 2

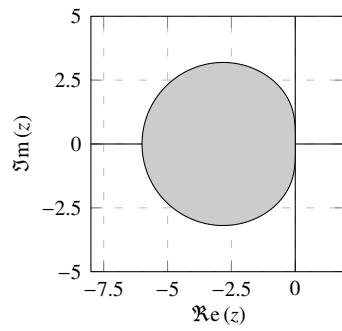


Figure G.2.8 : Adams-Moulton 2

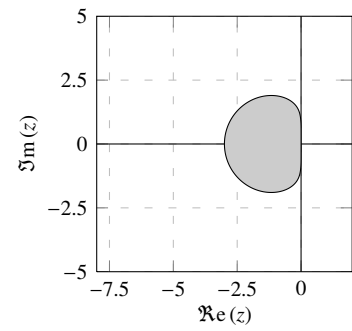


Figure G.2.9 : Adams-Moulton 3

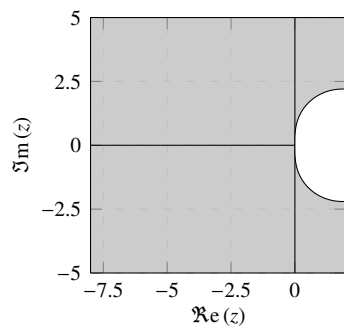


Figure G.2.10 : BDF-2

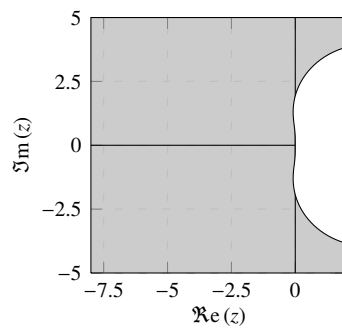


Figure G.2.11 : BDF-3

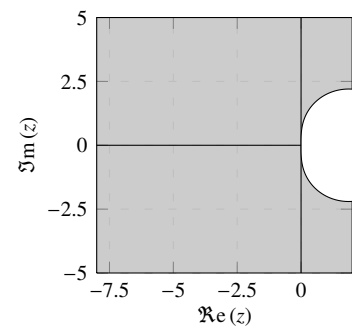


Figure G.2.12 : Multi-Step  $\rho_\infty=0.0$

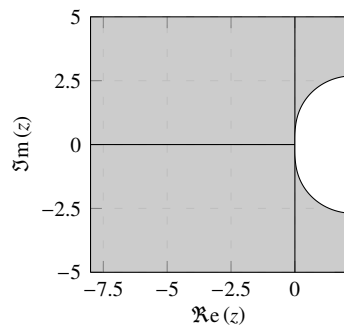


Figure G.2.13 : MS  $\rho_\infty=0.1$

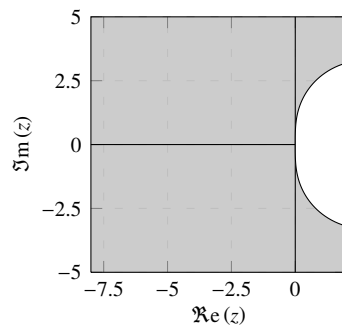


Figure G.2.14 : MS  $\rho_\infty=0.2$

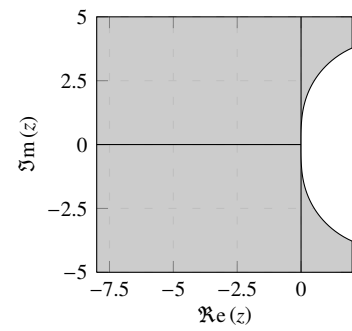


Figure G.2.15 : MS  $\rho_\infty=0.3$

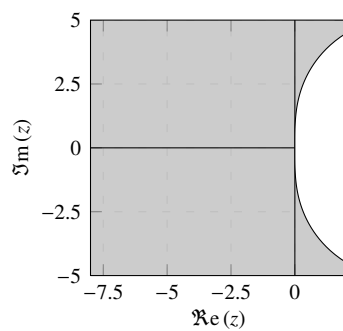


Figure G.2.16 : MS  $\rho_\infty=0.4$

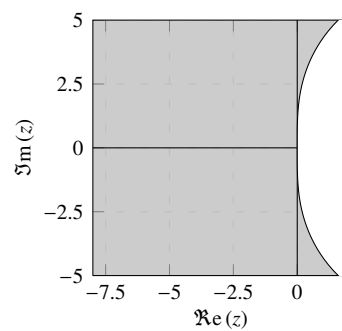


Figure G.2.17 : MS  $\rho_\infty=0.5$

## G.3 Quelques algorithmes

### G.3.1 Algorithme CSS

---

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^\Gamma _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $\delta^\Gamma _{n+1} = S_s^{-1}(\lambda^\Gamma _n)$	Résolution du problème structure
5 $\lambda^\Gamma _{n+1} = -S_f(\delta^\Gamma _{n+1})$	Résolution du problème fluide
6 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
7 $t \leftarrow t + \Delta t$	
8 <b>fin</b>	

---

**Algorithme G.3.1 :** CSS – Formulation en effort

### G.3.2 Algorithme GSS

---

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $\delta^p _{n+1} = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^\Gamma _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
5 $\lambda^\Gamma _{n+1} = S_f(\delta^p _{n+1})$	Résolution du problème fluide
6 $\delta^\Gamma _{n+1} = S_s^{-1}(-\lambda^\Gamma _{n+1})$	Résolution du problème structure
7 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
8 $t \leftarrow t + \Delta t$	
9 <b>fin</b>	

---

**Algorithme G.3.2 :** GSS – Formulation en cinématique

## G.3.3 Algorithmes DFMT-BGS

---

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
6 <b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	
7 $\delta^\Gamma _{n+1} = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^\Gamma _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
8 <b>sinon</b>	
9 $\delta^\Gamma _{n+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème structure
10 <b>fin</b>	
11 $\lambda^\Gamma _{n+1} = -\mathcal{S}_f(\delta^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème fluide
12 $i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
13 <b>fin</b>	
14 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
15 $t \leftarrow t + \Delta t$	
16 <b>fin</b>	

---

Algorithme G.3.3 : DFMT-BGS – Formulation en effort

---

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5 $\delta^\Gamma _{n+1}^0 = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^\Gamma _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
6 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
7 $\lambda^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_f(\delta^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème fluide
8 $\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(-\lambda^\Gamma _{n+1}^{i+1})$	Résolution du problème structure
9 $i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
10 <b>fin</b>	
11 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
12 $t \leftarrow t + \Delta t$	
13 <b>fin</b>	

---

Algorithme G.3.4 : DFMT-BGS – Formulation en cinématique

## G.3.4 Algorithmes DFMT-BGS-IFC

---

<b>Données :</b> $n_{\text{init}} = 0, t_{\text{init}}, \Delta t, \lambda^s _0, \xi^f _0, \xi^s _0$	
1 $n \leftarrow n_{\text{init}}$	Initialisation des données
2 $t \leftarrow t_{\text{init}}$	
3 <b>tant que</b> $t < t_{\text{fin}}$ <b>faire</b>	Début de la boucle temporelle
4 $i \leftarrow 0$	Initialisation de la boucle implicite
5 <b>tant que</b> critère > tolérance <b>faire</b>	Début de la boucle implicite
6 <b>si</b> $i = 0$ <b>alors</b>	
7 $\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{P}(\delta^\Gamma _n, \delta^\Gamma _{n-1}, \dots)$	Prédiction de la cinématique
8 <b>sinon</b>	
9 $\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma _{n+1}^i)$	Résolution du problème structure
10 <b>finsi</b>	
11 $\lambda^\Gamma _{n+1}^{i+1} = -\mathcal{S}_f^*(\delta^\Gamma _{n+1}^{i+1})$	Résolution du problème fluide
12 $i \leftarrow i + 1$	Prochaine itération de couplage
13 <b>fin</b>	
14 $n \leftarrow n + 1$	Prochaine itération temporelle
15 $t \leftarrow t + \Delta t$	
16 <b>fin</b>	

---

Algorithme G.3.5 : DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort



## G.4 Compléments sur le problème fluide-structure

### G.4.1 Méthode de Gauss-Seidel par blocs

Soit le système linéaire en dimension 2 à résoudre :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.1})$$

La méthode de Gauss-Seidel consiste à séparer la matrice  $\mathbf{A}$  en trois parties : la diagonale  $\mathbf{D}$  et les opposées des matrices triangulaires inférieure  $\mathbf{E}$  et supérieure  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.2})$$

Ainsi, la résolution du système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  est équivalente à la résolution de l'équation  $(\mathbf{D} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{Fx} + \mathbf{b}$ . La méthode de Gauss-Seidel<sup>15</sup> consiste à résoudre cette équation par une méthode de point-fixe :

$$(\mathbf{D} - \mathbf{E})\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{Fx}^i + \mathbf{b} \quad (\text{G.4.3})$$

La formulation du problème couplé par le biais des opérateurs de Steklov-Poincaré et de Poincaré-Steklov peut, avec une formulation en effort par exemple, s'écrire sous la forme (cf. section D.2 p. 113) :

$$\mathcal{S}_f(\delta^\Gamma) = -\lambda^\Gamma \quad \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma) = \delta^\Gamma \quad (\text{G.4.4})$$

Une fois les opérateurs linéarisés, ce problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & -\mathcal{S}_s^{-1} \\ \mathcal{S}_f & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^\Gamma \\ \lambda^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.5})$$

L'application de l'équation (G.4.3) donne :

$$\begin{cases} \delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = \mathcal{S}_s^{-1}(\lambda^\Gamma|_{n+1}^i) \\ \lambda^\Gamma|_{n+1}^{i+1} = -\mathcal{S}_f(\delta^\Gamma|_{n+1}^{i+1}) \end{cases} \quad (\text{G.4.6})$$

Ce système d'équations est bien celui présenté à la section D.3.3.3 p. 124.

### G.4.2 Compléments primal et dual de Schur

Une fois linéarisé, les problèmes fluide et structure peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{/\xi^f} & \mathcal{M}_{/\xi^m} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{/\xi^f} & \mathcal{F}_{/\xi^m} & \mathcal{F}_{/\delta^\Gamma} \\ -(\mathcal{P}_{f/\lambda^\Gamma})^{-1} \mathcal{P}_{f/\xi^f} & -(\mathcal{P}_{f/\lambda^\Gamma})^{-1} \mathcal{P}_{f/\xi^m} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^f \\ \xi^m \\ \delta^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \lambda^\Gamma \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.7})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{s/\xi^s} & \mathcal{P}_{s/\delta^\Gamma} \\ -(\mathcal{R}_{/\lambda^\Gamma})^{-1} \mathcal{R}_{/\xi^s} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^s \\ \delta^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda^\Gamma \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.8})$$

Ces deux problèmes peuvent donc se réécrire sous la forme générale :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^s \\ \delta^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda^\Gamma \end{bmatrix} \quad (\text{G.4.9})$$

15. Pour information, la méthode de Jacobi consiste à résoudre de la même façon l'équation  $\mathbf{Dx} = (\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

Le complément primal de Schur  $\mathcal{G}$  est obtenu par élimination des états « internes » des deux problèmes par un pivot de Gauss. Soit l'équation :

$$\mathcal{G} \cdot \delta^\Gamma = \lambda^\Gamma \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_{22} - \mathcal{G}_{21} \mathcal{G}_{11}^{-1} \mathcal{G}_{12} \qquad (\text{G.4.10})$$

C'est donc bien une version discrétisée de l'opérateur de Steklov-Poincaré qui est définie par (cf. équation D.2.4 p. 114) :

$$\mathcal{S}_i(\delta^i) = \lambda^i \qquad (\text{G.4.11})$$

Il est néanmoins important de remarquer que les différents opérateurs élémentaires sont linéarisés dès le début. Quelques fois, la linéarisation de l'opérateur de Steklov-Poincaré est plus subtile. De manière inverse, le complément dual de Schur (version linéarisée de l'opérateur de Poincaré-Steklov) est obtenu en posant le problème de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^\mathbf{g} \\ \lambda^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \delta^\Gamma \end{bmatrix} \qquad (\text{G.4.12})$$

## G.5 Premières applications

### G.5.1 Un cylindre excité par des lâchers tourbillonnaires

#### Liste des figures de l'application

G.5.1	Cylindre – Géométrie . . . . .	351
G.5.2	Cylindre fixe – Nombre de Strouhal en fonction de $Re$ . . . . .	352
G.5.3	Cylindre fixe – Amplitude des efforts normaux en fonction de $Re$ . . . . .	352
G.5.4	Cylindre fixe – $Re = 90 - \Delta t = 0.0025$ s – Maillage 1 – Champ de pression . . . . .	352
G.5.5	Cylindre fixe – $Re = 90 - \Delta t = 0.0025$ s – Maillage 1 – Champ de pression . . . . .	352
G.5.6	Cylindre oscillant – Amplitude et fréquence des oscillations du cylindre . . . . .	353
G.5.7	Cylindre oscillant – Champs de vorticité – $Re = 100$ . . . . .	354
G.5.8	Cylindre oscillant – Enveloppe, initialisation et régime stabilisé des oscillations . . . . .	355
G.5.9	Cylindre oscillant – Maillage 1 . . . . .	356
G.5.10	Cylindre oscillant – Maillage 2 . . . . .	356
G.5.11	Cylindre oscillant – Maillage 3 . . . . .	356

#### Liste des tableaux de l'application

G.5.1	Cylindre oscillant – Informations . . . . .	351
-------	---	-----

#### G.5.1.1 Description

La présente étude consiste à valider les premiers développements réalisés sur un cas bidimensionnel relativement simple mais couramment étudié dans le domaine offshore. Un cylindre mobile de diamètre  $D$  est placé sans mouvement initial dans un écoulement for . Seul le degré de translation normal à l'écoulement est libre. Un dispositif, caractérisé par une raideur et un amortissement linéaire, maintient le cylindre proche de sa position initiale. L'unique fluide présent est considéré comme étant incompressible et newtonien. L'écoulement est, quant à lui, considéré laminaire. La géométrie ainsi que les caractéristiques de la simulation sont présentées à la figure G.5.1.1 et au tableau G.5.1.1. Trois maillages sont utilisés dans la première partie de cette étude (cylindre fixe). Des visualisations de ces maillages sont proposées aux figures G.5.1.9, G.5.1.10 et G.5.1.11 p. 356. Le plus grossier est composé de 21000 cellules et les deux suivants sont composés de 21600 et 32800 cellules. Les nombres sans dimension caractérisant l'écoulement sont les nombres de Reynolds et de Strouhal. Ils sont respectivement notés  $Re$  et  $St$  et définis par les équations suivantes :

$$Re = \frac{u_\infty \cdot L}{\mu_f / \rho_f} \quad St = \frac{f \cdot L}{u_\infty} \quad (G.5.1)$$

Au sein des équations précédentes,  $u_\infty$  est la vitesse du fluide incident,  $L$  une longueur caractéristique (diamètre du cylindre),  $\mu_f$  la viscosité dynamique du fluide,  $\rho_f$  la densité volumique du fluide et  $f$  la fréquence des lâchers tourbillonnaires. Les nombres de Reynolds étudiés sont compris entre 90 et 140 inclus. Cette zone est caractérisée par des lâchers tourbillonnaires laminaires bidimensionnels. Au delà de 200, les lâchers tourbillonnaires deviennent tridimensionnels et au-delà de 400, ils sont turbulents [Blevins, 1977]. Cette étude est un exemple classique de mouvements induits par des lâchers tourbillonnaires : « Vortex Induced Motion »<sup>16</sup> (VIM).

Une première étape de validation de la fréquence des lâchers tourbillonnaires est réalisée en bloquant le degré de liberté du cylindre. Trois maillages sont étudiés. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux [Williamson, 1989] et numériques [Bahmani et Akbari, 2011], [Park *et al.*, 1998] et [Placzek *et al.*, 2009]. Cette dernière référence propose également une fonction exprimant le nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre fixe lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 47 et 150. Parfois, les résultats bibliographiques sont donnés en fonction du confinement de la veine d'essais qui est donné par le rapport  $H/D$ , où  $H$  est la hauteur de la veine et  $D$  le diamètre du cylindre.

16. Souvent, c'est l'expression « Vortex Induced Vibration » (VIV) qui est utilisée. Cependant, il est plus cohérent de parler de VIM dans le cas de corps rigide.

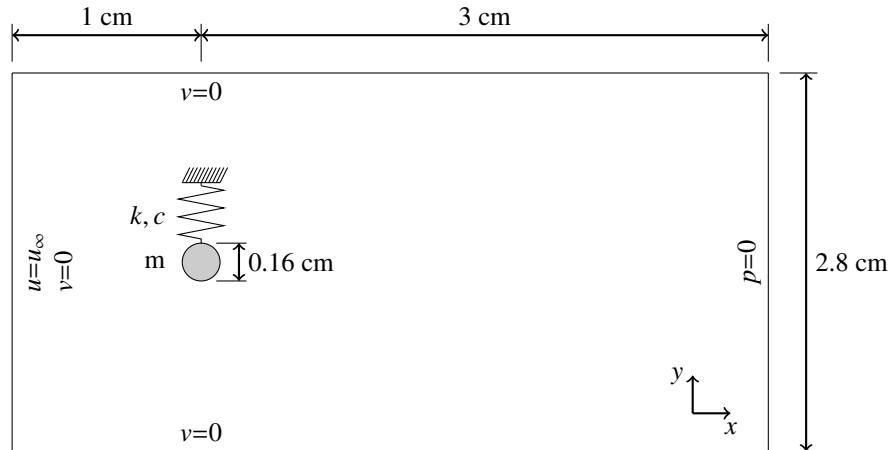


Figure G.5.1.1 : Cylindre – Géométrie

Descriptif	Valeur	Unité
$\rho_f$	1000	$\text{kg.m}^{-3}$
$\mu_f$	0.001	$\text{kg.m}^{-2}.\text{s}$
$\Delta t$	0.0025/0.0010	s
$m$	0.149	$\text{kg.m}^{-1}$
$k$	289.5	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$
$c$	0.01625	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

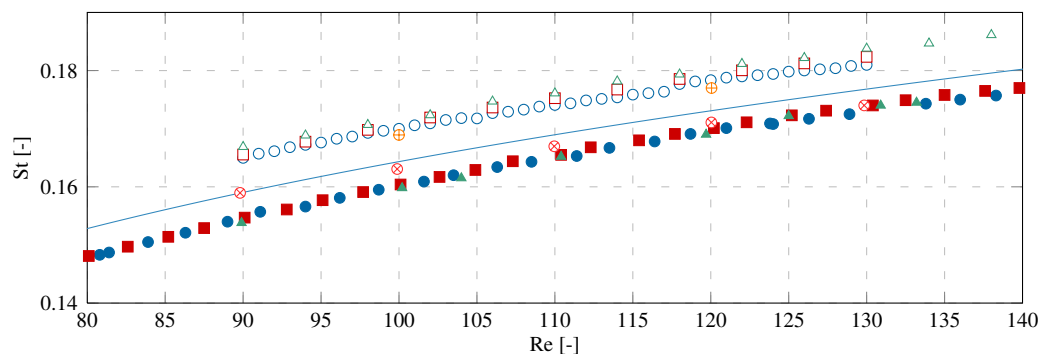
Tableau G.5.1.1 : Cylindre oscillant – Informations

### G.5.1.2 Cylindre fixe

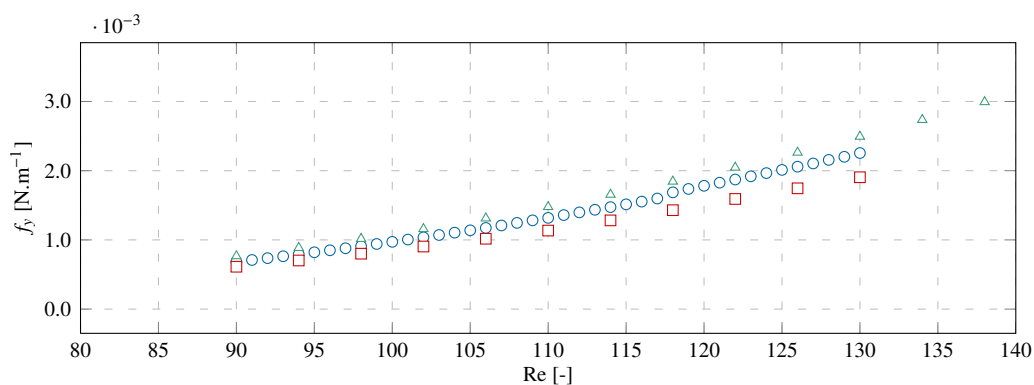
Lorsque le cylindre est fixe, les nombres de Strouhal calculés sont cohérents avec les résultats bibliographiques (cf. figure G.5.1.2 page suivante). Pour le maillage le plus fin (maillage 3), le pas de temps a dû être diminué à 0.010 s pour obtenir des nombres de Strouhal cohérents avec les résultats de référence. Dans ce cas-ci, un pas de temps plus élevé a tendance à sous-estimer la fréquence des lâchers tourbillonnaires. Il est important de remarquer que ce type de lâchers tourbillonnaires est difficile à modéliser car ces derniers prennent leur source au niveau du décollement de la couche limite. Ce lieu de décollement est difficile à capter précisément du fait de l'inexistence d'angle vif. Ceci peut expliquer les décalages entre les résultats tirés de la littérature et ceux des simulations. La complexité de l'écoulement peut également expliquer les différences d'amplitude des efforts normaux obtenues entre les différents maillages (cf. figure G.5.1.3 page suivante). Des exemples de champ de pression sont présentés aux figures G.5.1.4 et G.5.1.5. Il est également important de remarquer que le fait d'augmenter le gain des différents solveurs n'a pas eu d'effet notable sur les résultats. En conclusion de cette première partie, la fréquence des lâchers tourbillonnaires est suffisamment proche des résultats bibliographiques pour pouvoir étudier le comportement du cylindre lorsqu'il est libre, même si une étude plus approfondie semble nécessaire pour améliorer les résultats obtenus.

### G.5.1.3 Cylindre oscillant librement

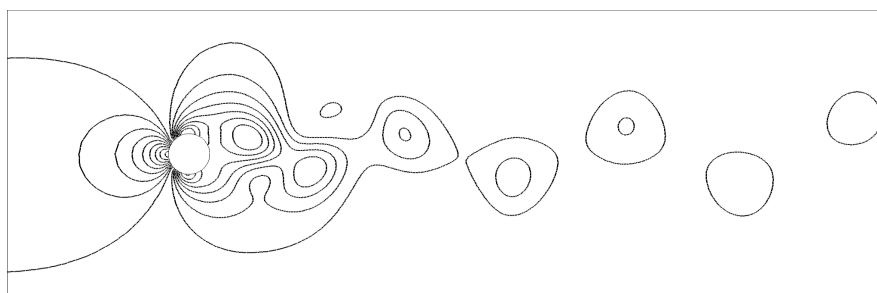
Dans la suite de l'étude, le degré de translation du cylindre transversal à l'écoulement est libéré. Les simulations sont réalisées avec le premier maillage et le plus grand pas de temps. La liaison est caractérisée par une raideur  $k$  et un coefficient d'amortissement  $c$ . La masse du cylindre est, quant à elle, notée  $m$ . Les valeurs par unité de longueur sont données au tableau G.5.1.1. La fréquence propre du système masse-ressort-amortisseur est notée  $f_0$  et est égale à  $7.017 \text{ s}^{-1}$ . La fréquence dominante des oscillations du cylindre est notée  $f_v$ . L'amplitude des déplacements est notée  $\bar{y}$ . Les résultats sont présentés en fonction du nombre de Reynolds à la figure G.5.1.6. Ils sont notamment comparés à des résultats provenant d'essais expérimentaux [Anagnostopoulos et Bearman, 1992] et de simulations numériques [Dettmer et Perić, 2007].



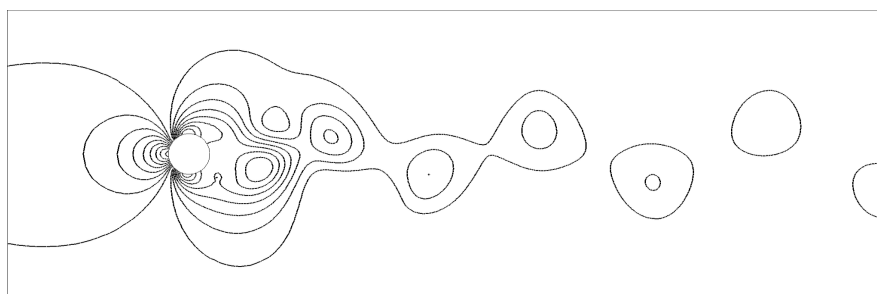
**Figure G.5.1.2 :** Cylindre fixe – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds :  $\circ$  maillage 1,  $\square$  maillage 2,  $\triangle$  maillage 3,  $\bullet$  [Williamson, 1989]  $H/D=140$ ,  $\blacksquare$  [Williamson, 1989]  $H/D=240$ ,  $\blacktriangle$  [Williamson, 1989]  $H/D=240$ ,  $\oplus$  [Bahmani et Akbari, 2011],  $\text{—}$  [Placzek *et al.*, 2009],  $\otimes$  [Park *et al.*, 1998]



**Figure G.5.1.3 :** Cylindre fixe – Amplitude des efforts en fonction du nombre de Reynolds :  $\circ$  maillage 1,  $\square$  maillage 2,  $\triangle$  maillage 3



**Figure G.5.1.4 :** Cylindre fixe –  $Re = 90$  –  $\Delta t = 0.0025$  s – Maillage 1 – Exemple de champ de pression

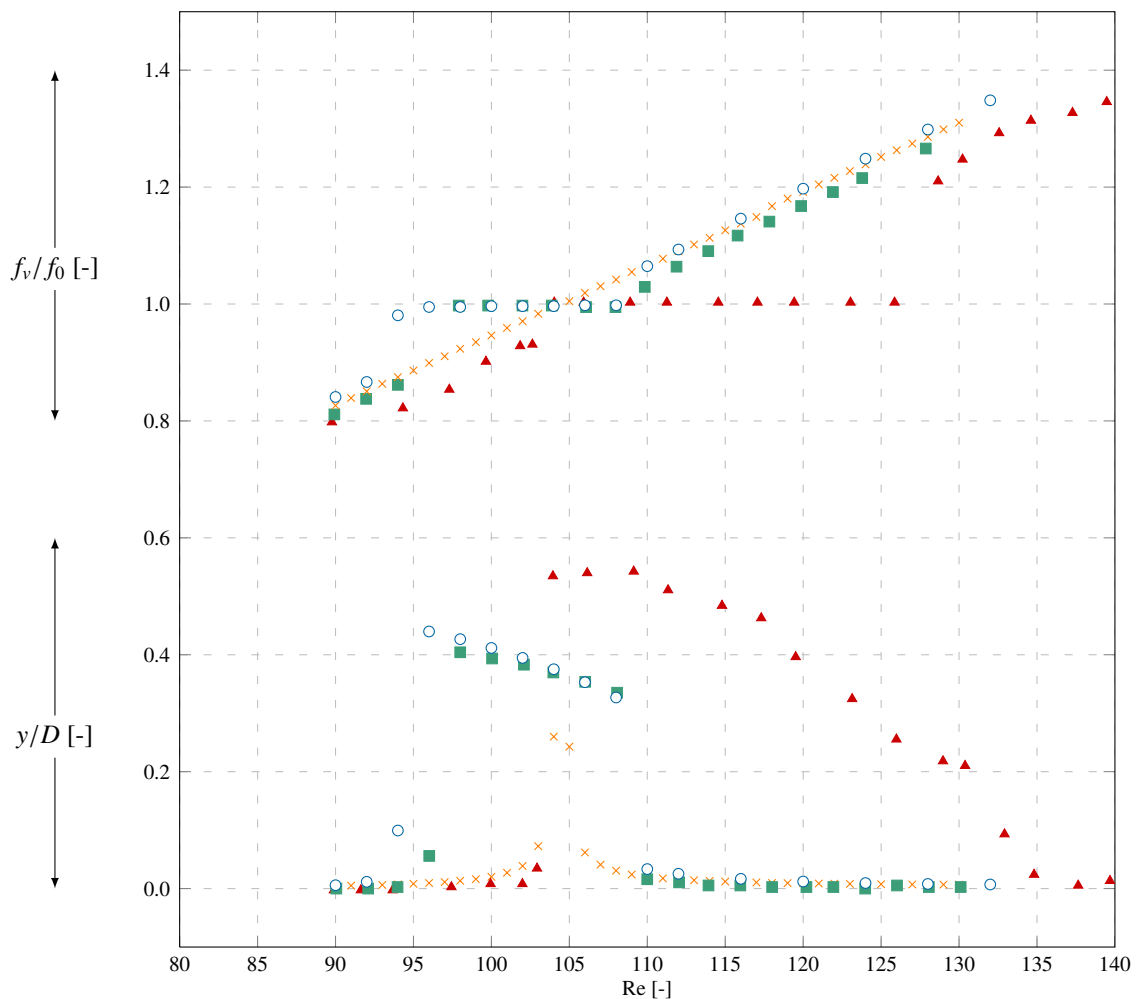


**Figure G.5.1.5 :** Cylindre fixe –  $Re = 90$  –  $\Delta t = 0.0025$  s – Maillage 1 – Exemple de champ de pression

Les résultats obtenus sont très proches des résultats numériques de référence [Dettmer et Perić, 2007]. La zone dite de « lock-in » est bien capturée. Elle est caractérisée par des déplacements importants du fait de la synchronisation de la fréquence des lâchers tourbillonnaires avec la pseudo-fréquence du système mécanique [Blevins, 1977]. Elle est obtenue pour des nombres de Reynolds compris entre 96 et 108. Le décalage du nombre de Strouhal observé pour le cylindre fixe, peut expliquer une plus grande étendue de cette zone vers les faibles nombres de Reynolds. Les résultats expérimentaux n'ont, quant à eux, pas été obtenus avec un écoulement bidimensionnel. Ils ne sont donc présentés qu'à titre d'illustration du comportement général et pour comparer les ordres de grandeurs des amplitudes de déplacement. Lors de ces expériences, la zone de « lock-in » est plus étendue et commence pour des nombres de Reynolds plus élevés.

Afin de mettre en avant l'influence du couplage fort entre le fluide et la structure, des simulations découplées ont également été réalisées. Les résultats sont également présentés à la figure G.5.1.6. Lors de ces simulations, les signaux des efforts transversaux obtenus pour un cylindre fixe sont appliqués au même système masse-ressort-amortisseur. Le comportement classique d'un système mécanique masse-ressort-amortisseur est obtenu. L'intervalle en nombre de Reynolds à l'intérieur duquel des oscillations importantes sont observées est plus étroit et l'amplitude maximale est sous-estimée par rapport aux simulations couplées. Afin de correctement modéliser les situations critiques, il est donc nécessaire de réaliser des simulations couplées.

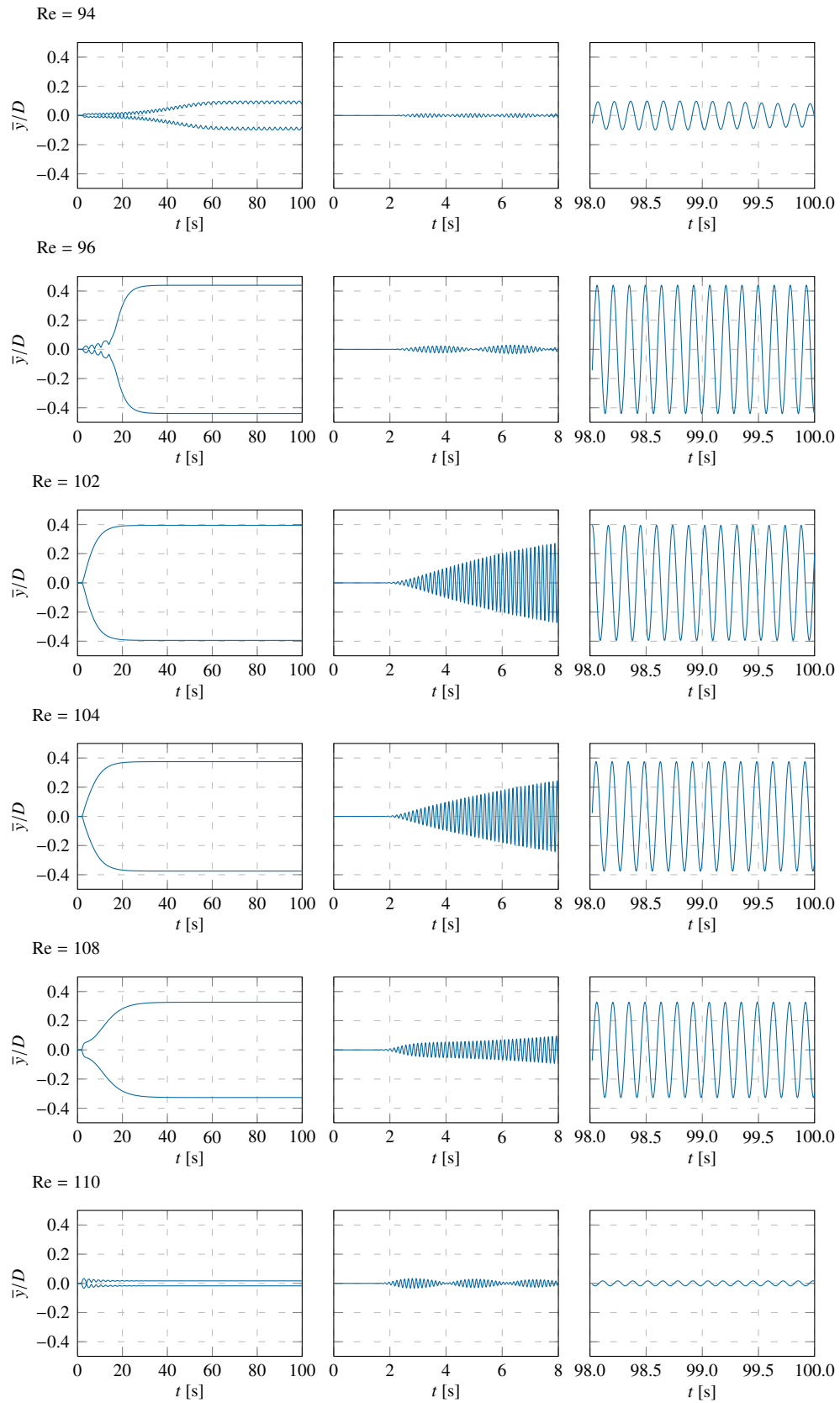
Puisque l'utilisation conjointe du premier maillage avec un pas de temps de 0.0025 s fournit des résultats satisfaisants, l'étude de l'influence de la discrétisation spatiale (maillage) et temporelle (pas de temps) n'a pas été réalisée sur ce cas d'étude. Finalement, l'enveloppe, l'initialisation et le régime stabilisé des oscillations du cylindre sont présentés à la figure G.5.1.8 pour quelques nombres de Reynolds. Afin d'obtenir un mouvement périodique stable, il est nécessaire de simuler au minimum 50 s. Des visualisations du champ de vorticité au cours d'une demi-oscillation sont proposées à la figure G.5.1.7 lorsque  $Re = 100$ .



**Figure G.5.1.6** : Cylindre oscillant – Amplitudes et fréquences en fonction du nombre de Reynolds :  
 ▲ [Anagnostopoulos et Bearman, 1992], ■ [Dettmer et Perić, 2007], ○ maillage 1, × MBDyn découplé



**Figure G.5.1.7** : Cylindre oscillant – Champs de vorticité –  $Re = 100$



**Figure G.5.1.8 :** Cylindre oscillant – Enveloppe, initialisation et régime stabilisé des oscillations du cylindre pour différents nombres de Reynolds



#### G.5.1.4 Conclusion

Cette première étude a permis de rapidement prendre en main les différents outils et de valider les premiers développements informatiques. D'un point de vue physique, la zone de « lock-in » est bien captée et les résultats obtenus sont proches de ceux trouvés dans la bibliographie. De plus, la nécessité d'étudier ce genre de phénomène par un couplage fluide-structure fort a été démontrée en réalisant des simulations découplées. Si ce cas de modélisation peut paraître simpliste aux premiers abords, il n'en reste pas moins que l'étude de ce type de situation à des nombres de Reynolds plus réalistes reste difficile à l'heure actuelle [Molin *et al.*, 2010].

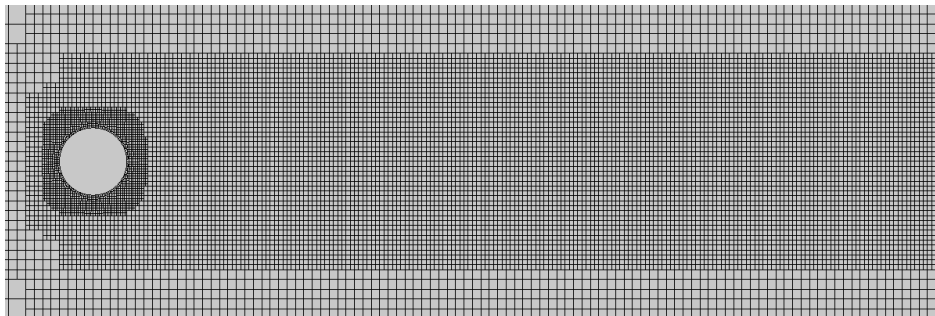


Figure G.5.1.9 : Cylindre oscillant – Maillage 1

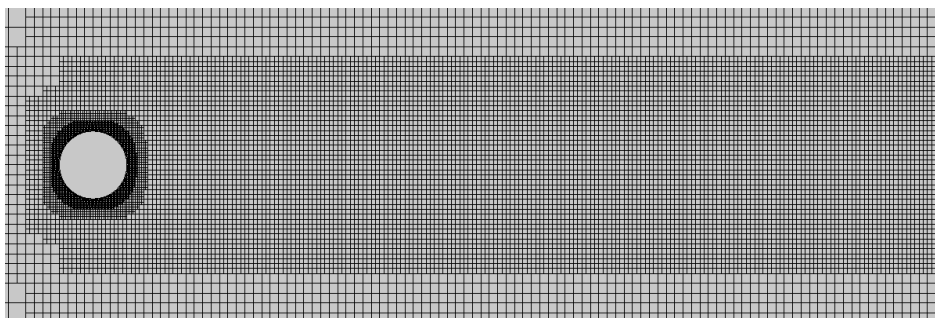


Figure G.5.1.10 : Cylindre oscillant – Maillage 2

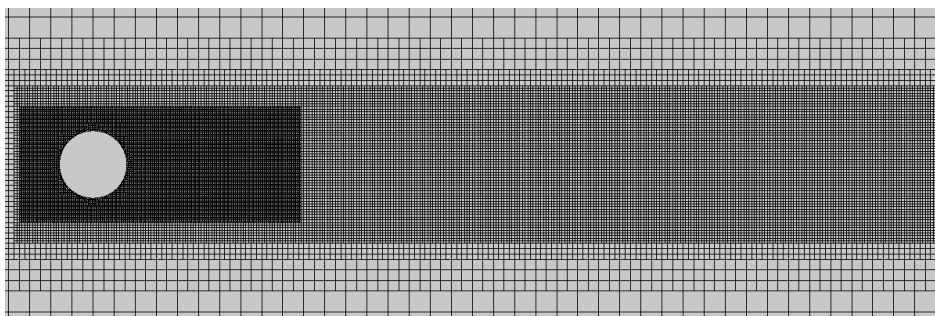


Figure G.5.1.11 : Cylindre oscillant – Maillage 3

## G.5.2 Un carré excité par des lâchers tourbillonnaires

### Liste des figures de l'application

G.5.1	Carré – Géométrie . . . . .	357
G.5.2	Carré oscillant – Maillage 1 . . . . .	359
G.5.3	Carré oscillant – Maillage 2 . . . . .	359
G.5.4	Carré fixe – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	359
G.5.5	Carré fixe – Amplitude des efforts normaux en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	359
G.5.6	Carré oscillant – Amplitude des oscillations en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	360
G.5.7	Carré oscillant – Fréquences des oscillations en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	360
G.5.8	Carré oscillant – Exemples d'oscillations . . . . .	361
G.5.9	Carré oscillant – Exemples d'oscillations . . . . .	362
G.5.10	Carré oscillant – Re = 50 – Vorticité en position haute . . . . .	363
G.5.11	Carré oscillant – Re = 50 – Vorticité en position basse . . . . .	363
G.5.12	Carré oscillant – Re = 200 – Vorticité en position haute . . . . .	363
G.5.13	Carré oscillant – Re = 200 – Vorticité en position basse . . . . .	363

### Liste des tableaux de l'application

G.5.1	Carré oscillant – Informations . . . . .	357
-------	--	-----

#### G.5.2.1 Description

La présente étude est identique à celle réalisée précédemment mais la géométrie considérée est de forme carrée. Cette dernière, du fait de la présence d'angles vifs, permet de capter plus facilement les décollements de couche limite qui sont à l'origine des lâchers tourbillonnaires. La géométrie et les caractéristiques de la simulation sont présentées à la figure G.5.2.1 et au tableau G.5.2.1. Deux maillages différents sont utilisés. Ils sont constitués de 20800 et 76300 cellules. Des visualisations de ces maillages sont proposées aux figures G.5.2.2 et G.5.2.2.

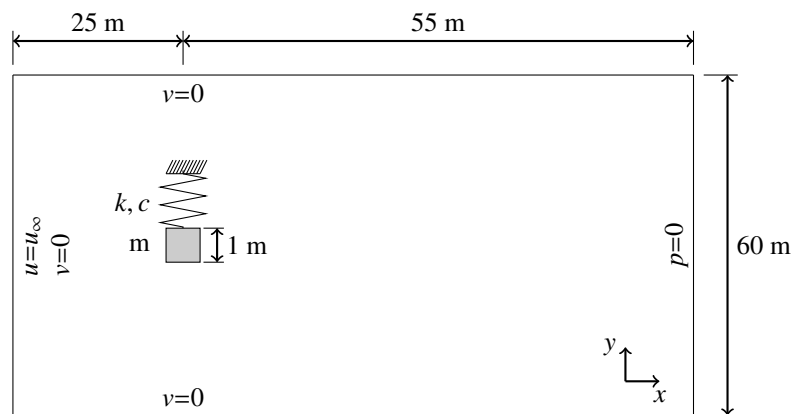


Figure G.5.2.1 : Carré – Géométrie

Descriptif	Valeur	Unité
$\Delta t$	0.100/0.050/0.025	s
$\rho_f$	1.0	kg.m <sup>-3</sup>
$\mu_f$	0.01	kg.m <sup>-2</sup> .s
$m$	20.0	kg.m <sup>-1</sup>
$k$	3.084	kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-2</sup>
$c$	0.058	kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup>

Tableau G.5.2.1 : Carré oscillant – Informations

### G.5.2.2 Carré fixe

De manière identique à l'étude précédente, une première analyse de la fréquence des lâchers tourbillonnaires est réalisée en bloquant le degré de liberté du carré. Dans cette première partie, l'étude de l'influence du pas de temps et du niveau de discrétisation du maillage est réalisée. Les résultats sont comparés à des résultats bibliographiques [Franke *et al.*, 1990], [Breuer *et al.*, 2000] aux figures G.5.2.4 et G.5.2.5. Au sein de la dernière référence précédemment citée, les conditions diffèrent de celles utilisées car un confinement (rapport entre la longueur du carré et la hauteur du domaine) de 1/8 est pris en compte pour un profil de vitesse entrant de forme parabolique. De plus, deux méthodes de résolution sont comparées dans cette référence. La première est une méthode classique de type volumes finis et la deuxième est une « Méthode de Lattice Boltzmann » (LBM).

Les lâchers tourbillonnaires commencent à apparaître lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 60 [Breuer *et al.*, 2000]. Cependant, c'est uniquement à partir de 75 que leur présence est facilement visible. C'est la raison pour laquelle, seuls des nombre de Reynolds supérieurs à 75 sont considérés lors de cette première partie de l'étude. Il est important de remarquer que, lorsque le degré de liberté du carré est relâché, des oscillations non négligeables sont observées pour des nombres de Reynolds légèrement inférieurs à 60 du fait du couplage entre l'écoulement et le mouvement du carré (cf. section G.5.2.3). Afin de provoquer l'apparition des lâchers tourbillonnaires lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 75 et lorsque le carré est fixe, une perturbation extérieure de l'écoulement est nécessaire sous peine de devoir simuler un très grand nombre de pas de temps. Cette piste n'a pas été suivie lors de cette étude.

Lorsque le premier maillage est utilisé, un pas de temps égal à  $\Delta t = 0.100$  s est suffisant pour capter de manière satisfaisante les différents phénomènes lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 250 (cf. figure G.5.2.4 page suivante). Au contraire, le pas de temps ne doit pas dépasser 0.050 s lorsque le second maillage est utilisé (respect des contraintes sur le nombre de Courant). De plus, lorsque ce second maillage est utilisé, les efforts normaux obtenus pour les plus grands nombres de Reynolds étudiés présentent des oscillations dont l'amplitude est plus importante (cf. figure G.5.2.5 page suivante). En conclusion, les pas de temps précédemment cités peuvent être utilisés dans un premier temps pour réaliser des simulations où le degré de liberté du carré est relâché, même si, en toute rigueur, des pas de temps plus faibles se révèlent nécessaires pour les grands nombres de Reynolds considérés.

### G.5.2.3 Carré oscillant librement

Dans la suite de l'étude, le degré de translation transversal à l'écoulement est libéré. Les notations sont identiques à celles utilisées lors de l'étude précédente. La fréquence propre du système masse-ressort-amortisseur est notée  $f_0$  et est égale à  $0.0625 \text{ s}^{-1}$ . Les résultats sont présentés aux figures G.5.2.6 et G.5.2.7. La première zone de « lock-in » est parfaitement captée. Elle est observée pour des nombres de Reynolds compris entre 50 et 60. D'importantes oscillations de fréquence égale à la fréquence propre du système mécanique sont également observées pour des nombres de Reynolds supérieurs à 150. Dans cette zone, l'amplitude des oscillations diffère selon le maillage et le pas de temps utilisés. Ces grandes oscillations apparaissent quand la fréquence des lâchers tourbillonnaires dépasse de 4 fois la fréquence propre du système masse-ressort-amortisseur. La complexité de l'écoulement pour ces nombres de Reynolds (cf. figures G.5.2.12 et G.5.2.13 p. 363) peut expliquer la disparité des résultats dans cette zone.

### G.5.2.4 Conclusion

Cette deuxième application avait pour objectif de valider une deuxième fois les premiers développements effectués. Du fait de la géométrie considérée, la capture des lâchers tourbillonnaires est plus facile. De plus grands nombres de Reynolds ont également été étudiés. Cependant, les amplitudes des oscillations dépendent toujours du maillage et du pas de temps utilisés. Un approfondissement s'avère donc nécessaire pour obtenir des résultats parfaitement convergés. Néanmoins, le comportement qualitatif est correctement capté à ces grands nombres de Reynolds.

La combinaison de ces deux premières applications permet de valider les développements réalisés dans le cadre d'un système mécanique possédant un degré de liberté en translation. La prochaine application a pour objectif de réaliser les mêmes développements dans le cadre d'un degré de liberté en rotation.

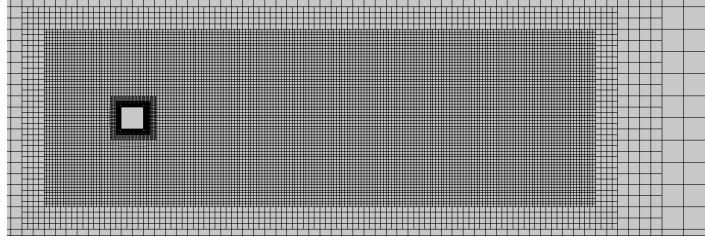


Figure G.5.2.2 : Carré oscillant – Maillage 1

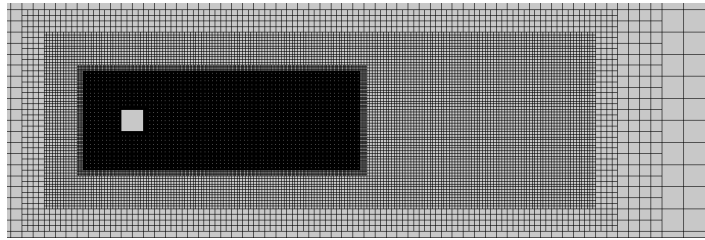
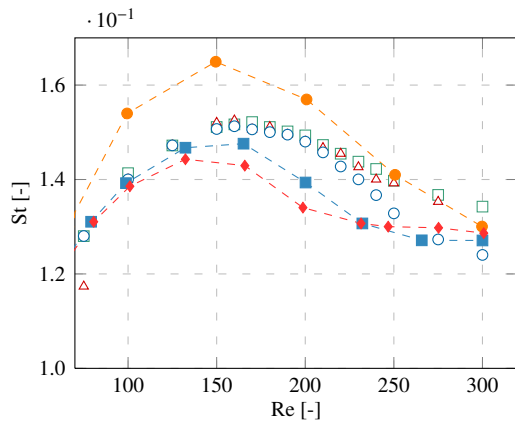
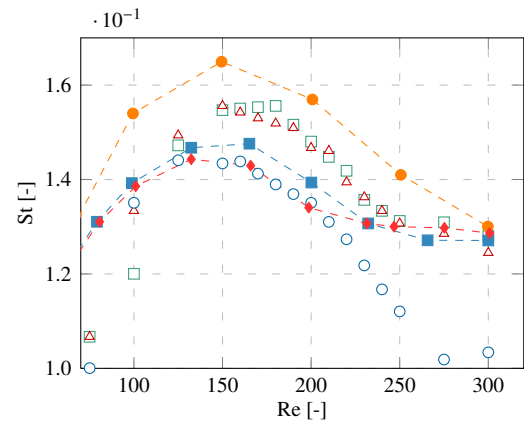


Figure G.5.2.3 : Carré oscillant – Maillage 2

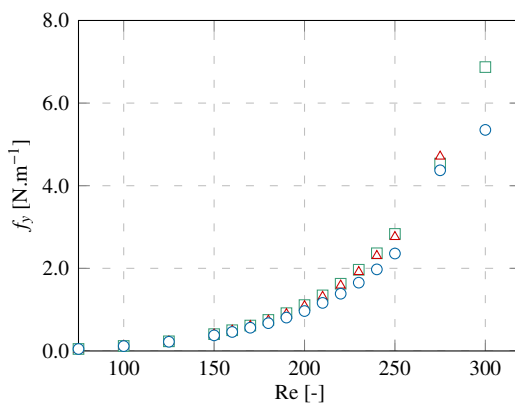


a : Maillage 1

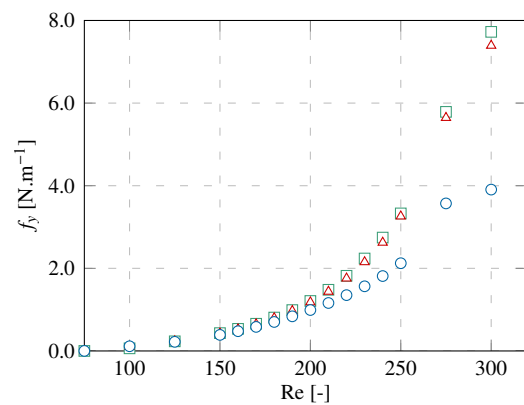


b : Maillage 2

**Figure G.5.2.4 :** Carré fixe – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds :  
 - ● - [Franke *et al.*, 1990], - ■ - [Breuer *et al.*, 2000] FVM, - ◆ - [Breuer *et al.*, 2000] LBA, ○  $\Delta t = 0.100$  s, △  $\Delta t = 0.050$  s, □  $\Delta t = 0.025$  s

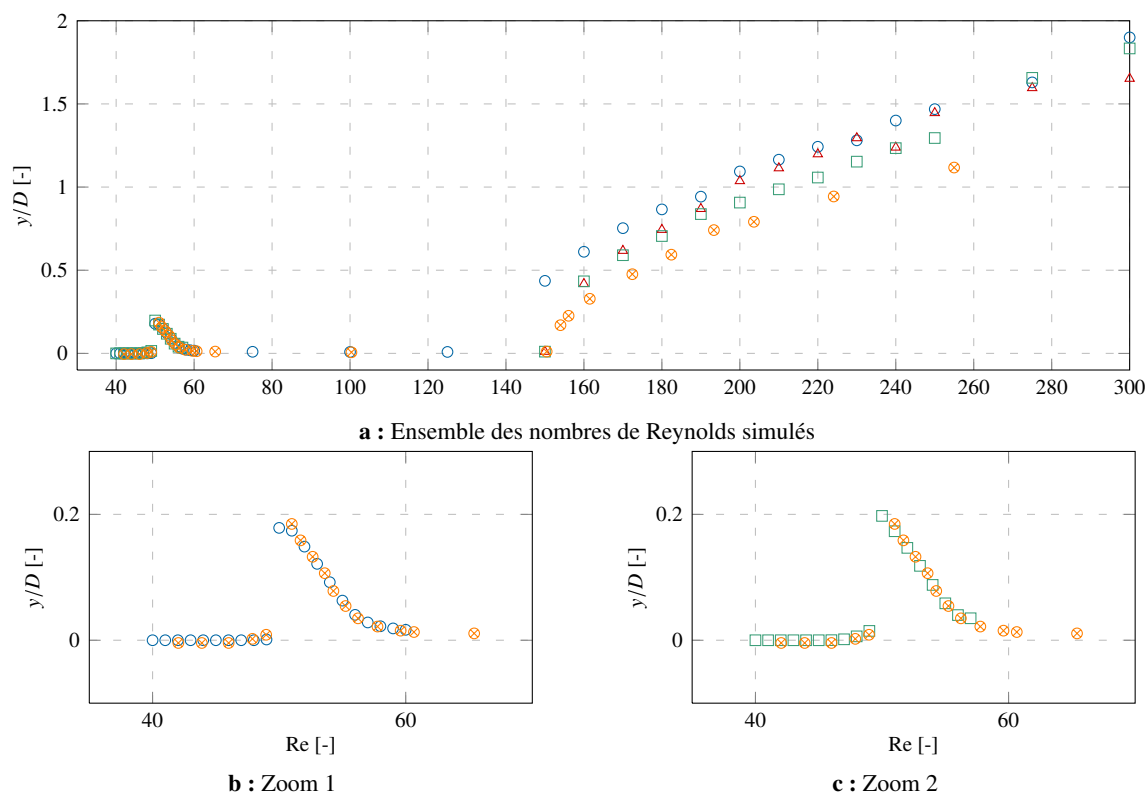


a : Maillage 1

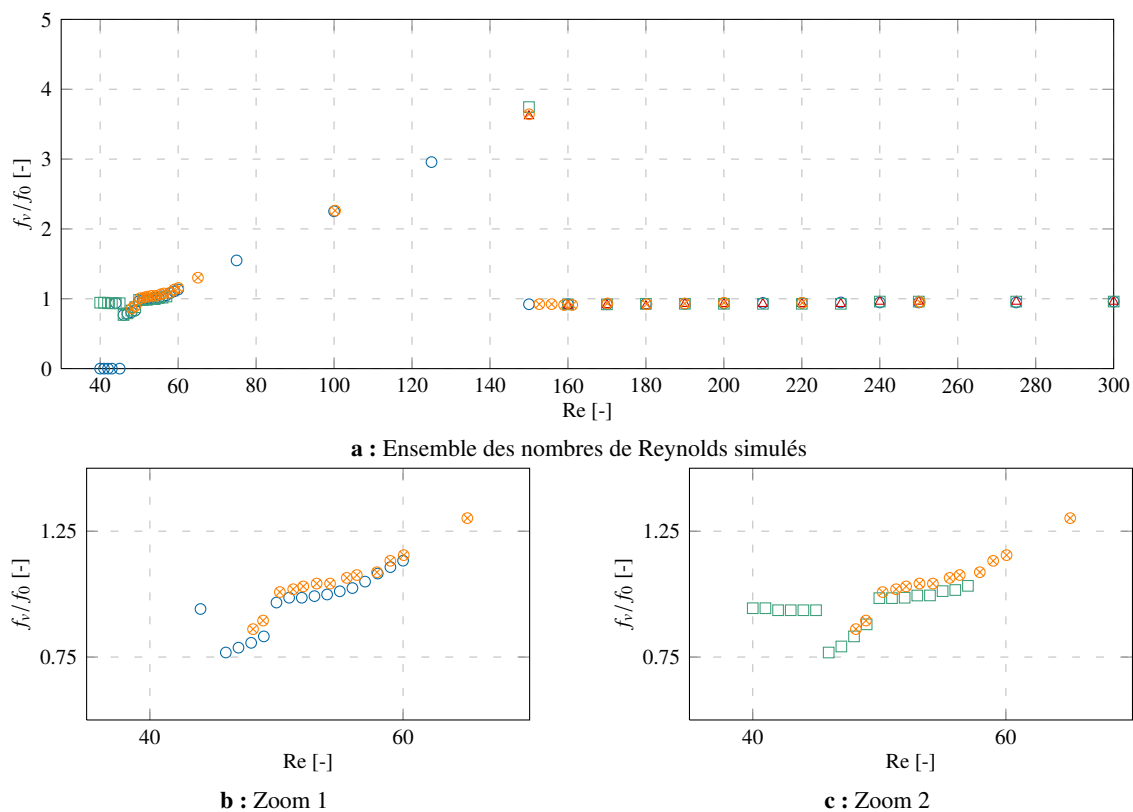


b : Maillage 2

**Figure G.5.2.5 :** Carré fixe – Amplitude des efforts normaux en fonction du nombre de Reynolds :  
 ○  $\Delta t = 0.100$  s, △  $\Delta t = 0.050$  s, □  $\Delta t = 0.025$  s



**Figure G.5.2.6 :** Carré oscillant – Amplitude des oscillations du cylindre en fonction du nombre de Reynolds :  
 ○ maillage 1  $\Delta t = 0.100$  s, △ maillage 2  $\Delta t = 0.050$  s, □ maillage 2  $\Delta t = 0.025$  s, ◇ [Dettmer et Perić, 2007]



**Figure G.5.2.7 :** Carré oscillant – Fréquences des oscillations du cylindre en fonction du nombre de Reynolds :  
 ○ maillage 1  $\Delta t = 0.100$  s, △ maillage 2  $\Delta t = 0.050$  s, □ maillage 2  $\Delta t = 0.025$  s, ◇ [Dettmer et Perić, 2007]

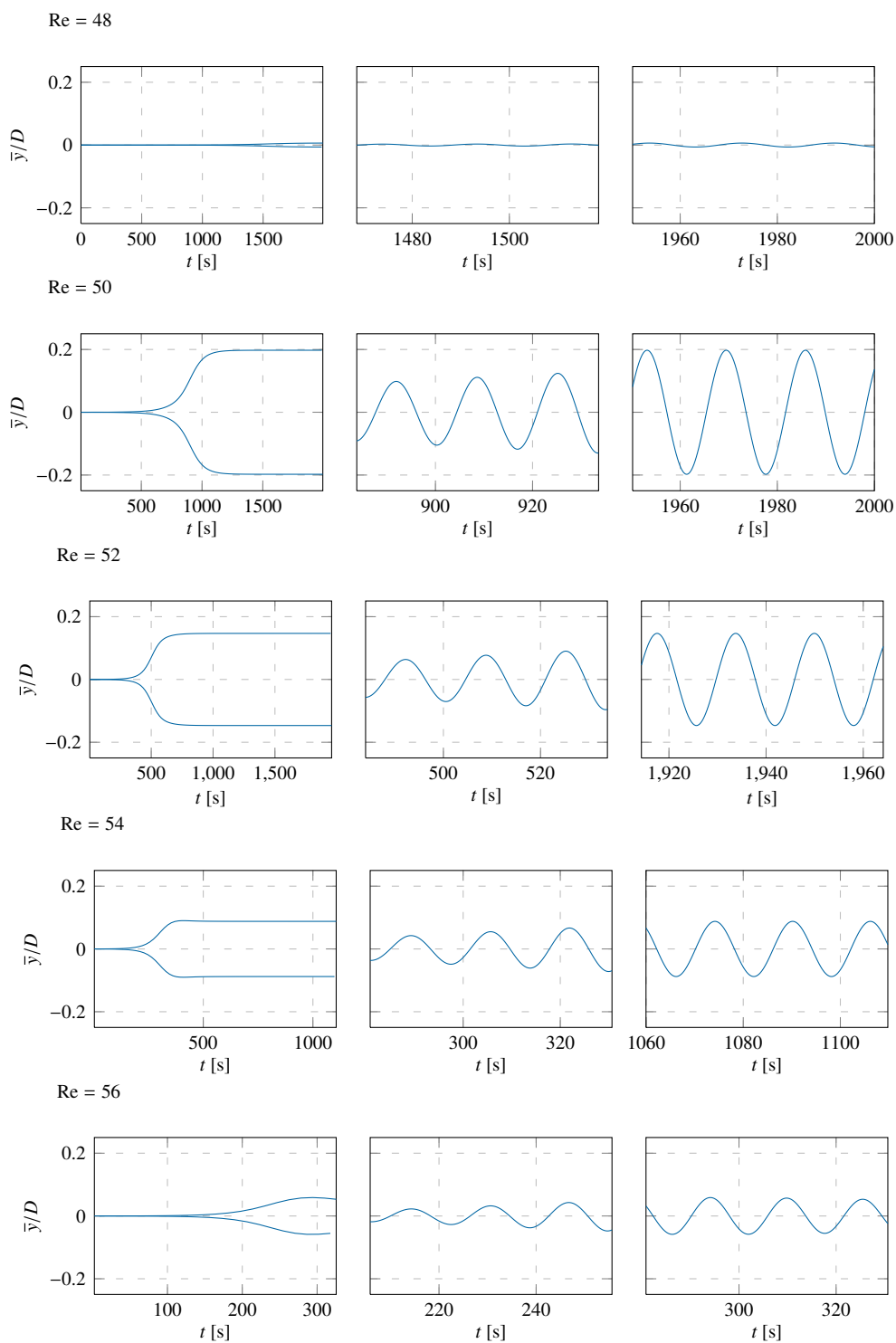


Figure G.5.2.8 : Carré oscillant – Exemples d'oscillations

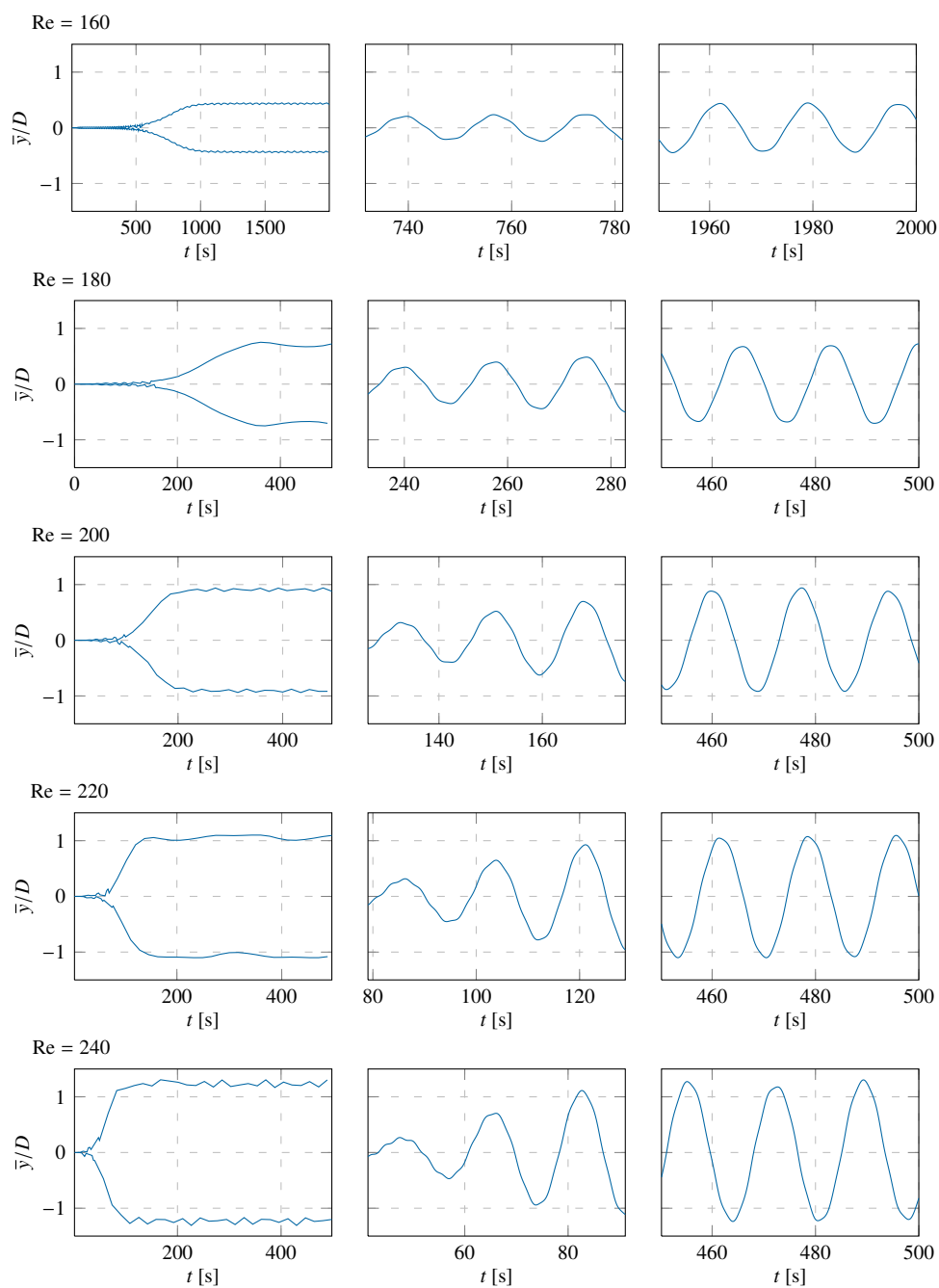
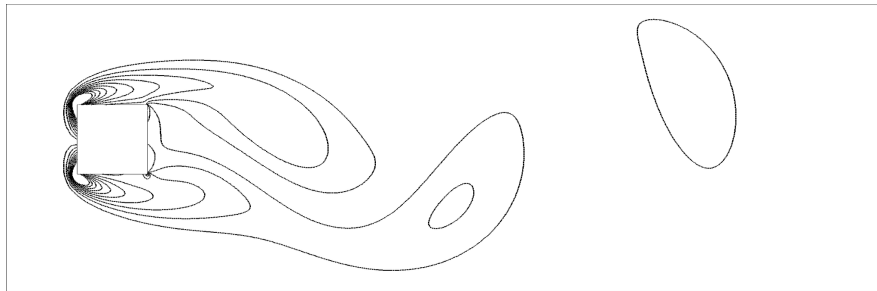
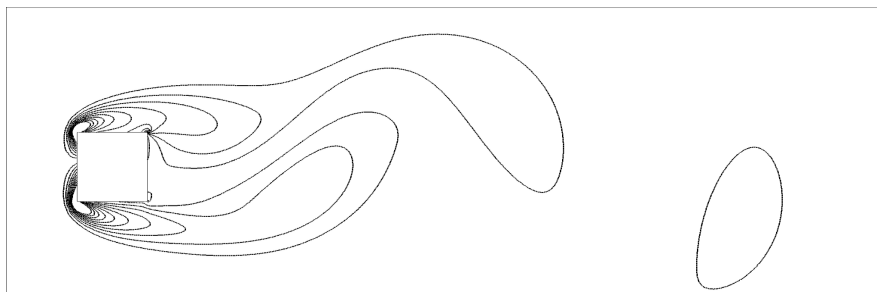


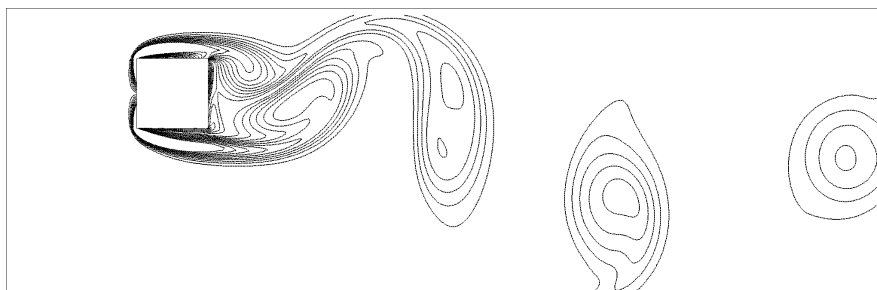
Figure G.5.2.9 : Carré oscillant – Exemples d'oscillations



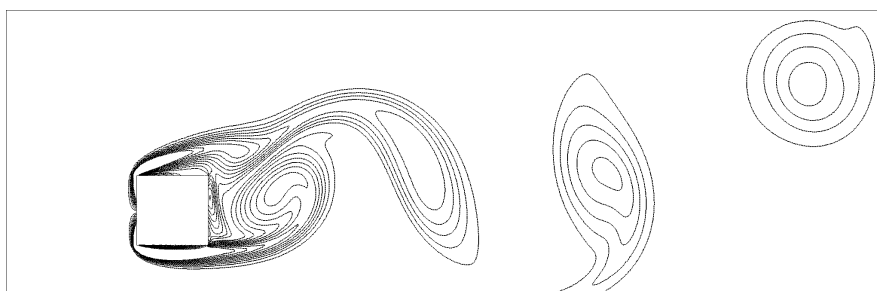
**Figure G.5.2.10 :** Carré oscillant –  $Re = 50$  – Vorticité en position haute



**Figure G.5.2.11 :** Carré oscillant –  $Re = 50$  – Vorticité en position basse



**Figure G.5.2.12 :** Carré oscillant –  $Re = 200$  – Vorticité en position haute



**Figure G.5.2.13 :** Carré oscillant –  $Re = 200$  – Vorticité en position basse



### G.5.3 Un rectangle excité par des lâchers tourbillonnaires

#### Liste des figures de l'application

G.5.1	Rectangle – Géométrie . . . . .	364
G.5.2	Rectangle fixe – Nombre de Strouhal et amplitude du moment en fonction de $\Delta t$ . . . . .	365
G.5.3	Rectangle fixe – Moment en fonction du temps . . . . .	365
G.5.4	Rectangle oscillant – Amplitude et fréquence des oscillations en fonction de $\Delta t$ . . . . .	366
G.5.5	Rectangle oscillant – Rotation en fonction du temps . . . . .	366
G.5.6	Rectangle oscillant – Maillage 1 . . . . .	366
G.5.7	Rectangle oscillant – Maillage 1 – Zoom . . . . .	366
G.5.8	Rectangle oscillant – Champs de vorticité – $\Delta t = 0.0250$ s . . . . .	367

#### Liste des tableaux de l'application

G.5.1	Rectangle oscillant – Informations . . . . .	365
-------	--	-----

#### Liste des figures de l'application en annexe

#### Liste des tableaux de l'application en annexe

##### G.5.3.1 Description

La présente étude se place une nouvelle fois dans le domaine des structures excitées par des lâchers tourbillonnaires. La géométrie considérée est un cylindre de forme rectangulaire et le degré de liberté relâché n'est plus un degré de liberté de translation mais de rotation. La géométrie ainsi que les caractéristiques de la simulation sont présentées à la figure G.5.3.1 et au tableau G.5.3.1. Un unique maillage, dont des visualisations sont proposées aux figures G.5.3.6 et G.5.3.7, est testé mais une étude en pas de temps est réalisée. Le maillage est constitué de 29400 cellules. De manière identique aux études précédentes, le mouvement de rotation est bloqué dans un premier temps. La longueur de référence est prise égale à hauteur du rectangle, soit  $L = 1$  m. Le nombre de Reynolds considéré vaut 250, soit  $u_\infty = 2.5 \text{ ms}^{-1}$ .

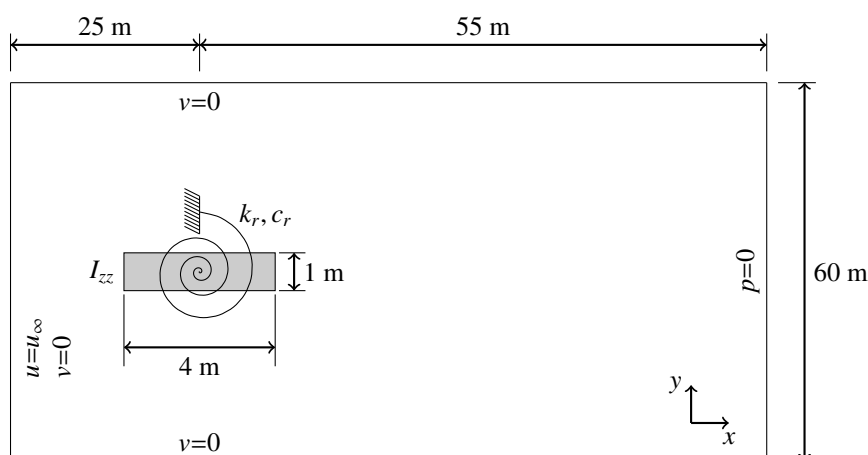


Figure G.5.3.1 : Rectangle – Géométrie

##### G.5.3.2 Rectangle fixe

Une première étude en pas de temps est réalisée en bloquant le degré de liberté en rotation. Le nombre de Strouhal basé sur le signal du moment s'exerçant sur le rectangle est peu modifié par le pas de temps (cf. figure G.5.3.2 page suivante). L'amplitude du moment s'exerçant sur le rectangle a tendance à augmenter lorsque le pas de temps diminue, et ceci, même pour de très faibles pas de temps (cf. figure G.5.3.2 page

Descriptif	Valeur	Unité
$\Delta t$	0.1000/0.0500/0.0250/0.0125	s
$\rho_f$	1.0	kg.m <sup>-3</sup>
$\mu_f$	0.01	kg.m <sup>-2</sup> .s
$I_{zz}$	400.0	kg.m
$k_r$	61.685	kg.m.s <sup>-2</sup>
$c_r$	78.540	kg.m.s <sup>-1</sup>

Tableau G.5.3.1 : Rectangle oscillant – Informations

suivante). Cependant, les plus petits pas de temps utilisés se révèlent suffisants pour résoudre correctement le cas libre comme le montre la section suivante.

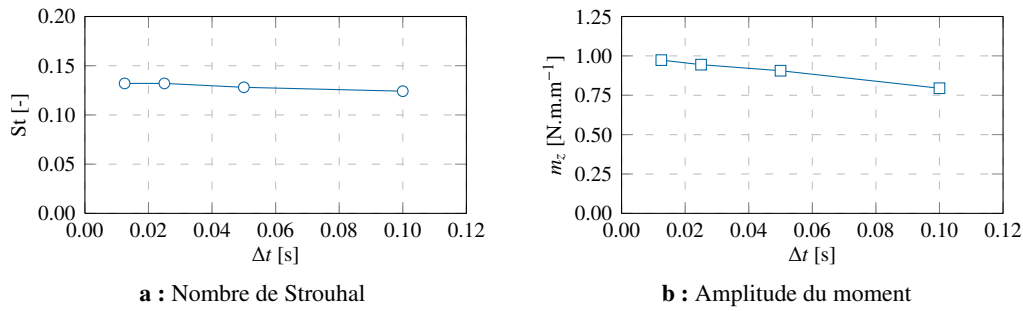
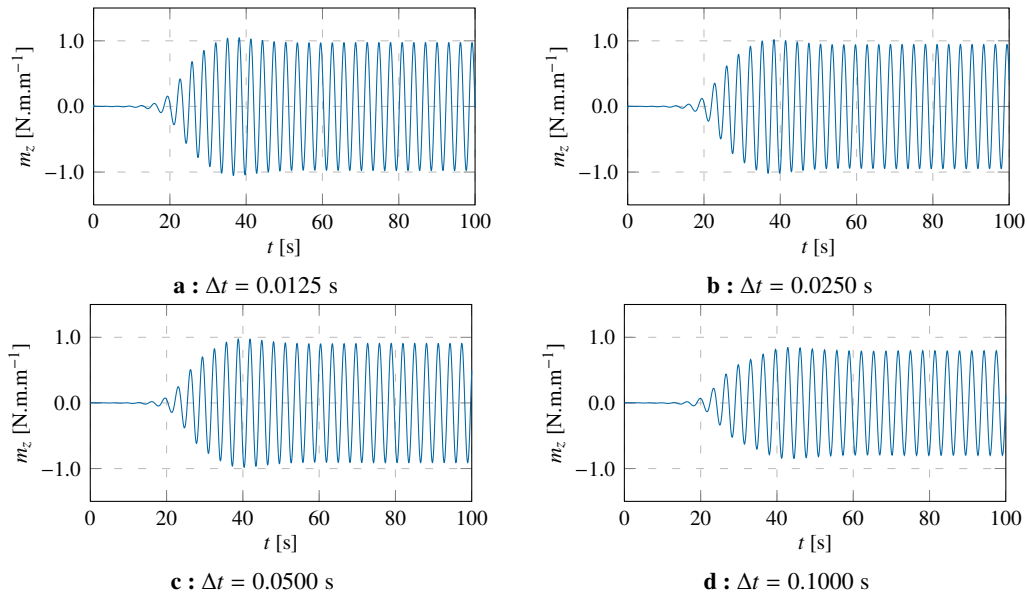
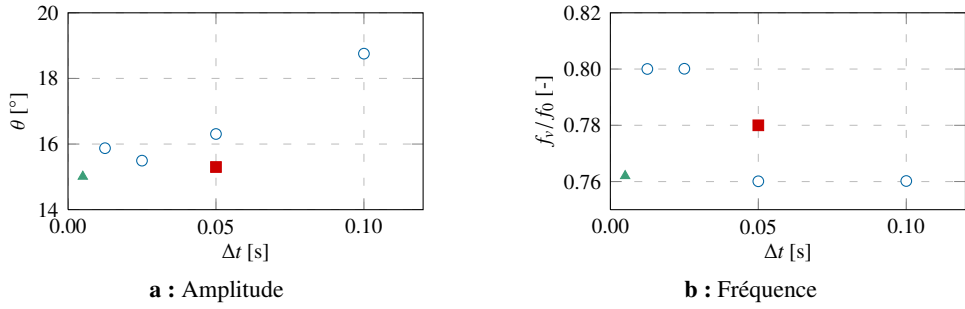
Figure G.5.3.2 : Rectangle fixe – Nombre de Strouhal et amplitude du moment en fonction de  $\Delta t$ 

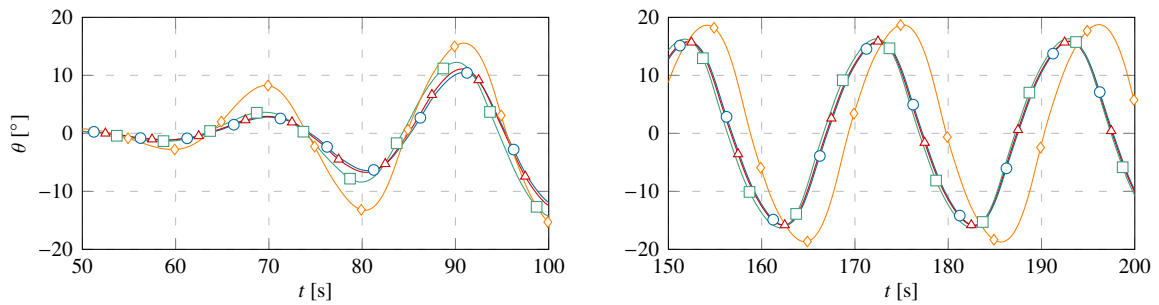
Figure G.5.3.3 : Rectangle fixe – Moment en fonction du temps

### G.5.3.3 Rectangle oscillant librement

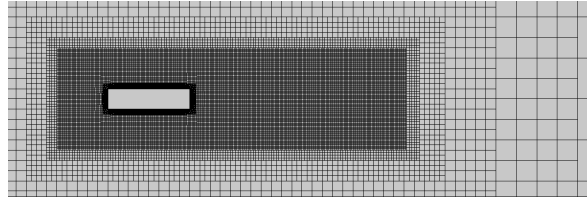
Dans la suite de l'étude, le mouvement de rotation du rectangle est libéré. Les caractéristiques mécaniques sont données par unité de longueur au tableau G.5.3.1. Les résultats sont comparés à des résultats bibliographiques [Dettmer et Perić, 2007], [Robertson *et al.*, 2003]. Comme le montrent les figures G.5.3.4 et G.5.3.5, les pas de temps inférieurs ou égaux à 0.05 s permettent d'estimer correctement la rotation maximale du rectangle. Pour information, le mouvement de rotation du rectangle est pris en compte par un mouvement rigide du maillage du fait des amplitudes importantes des oscillations. Il est important de noter que, malgré son apparente simplicité, ce cas est sujet à un écoulement complexe comme le suggère la forme des structures tourbillonnaires présentées à la figure G.5.3.8.



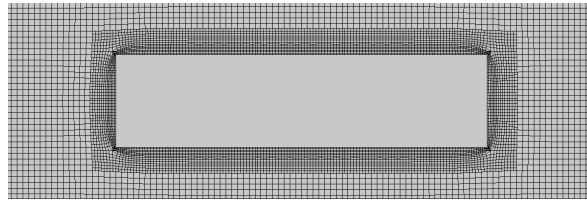
**Figure G.5.3.4 :** Rectangle oscillant – Amplitude et fréquence des oscillations en fonction de  $\Delta t$  : ■ [Dettmer et Perić, 2007], ▲ [Robertson *et al.*, 2003], ○ maillage 1



**Figure G.5.3.5 :** Rectangle oscillant – Rotation en fonction du temps : —○—  $\Delta t = 0.0125$  s, —△—  $\Delta t = 0.0250$  s, —□—  $\Delta t = 0.0500$  s, —◇—  $\Delta t = 0.1000$  s



**Figure G.5.3.6 :** Rectangle oscillant – Maillage 1



**Figure G.5.3.7 :** Rectangle oscillant – Maillage 1 – Zoom

### G.5.3.4 Conclusion

Cette étude a permis de valider rapidement les premiers travaux concernant les mouvements de rotation. Plus précisément, les différentes fonctions de conversion des matrices de rotation vers les quaternions ont notamment été implémentées lors de cette étude. La validation de l'implémentation de ces fonctions dans le cadre d'un corps rigide possédant trois degrés de liberté en rotation est réalisée au cours d'une autre application (cf. section E.4 p. 238).

L'objectif de ces trois premières études était de valider les premiers développements effectués pour des mouvements élémentaires. La prochaine application est, quant à elle, caractérisée par une structure possédant deux degrés de liberté.

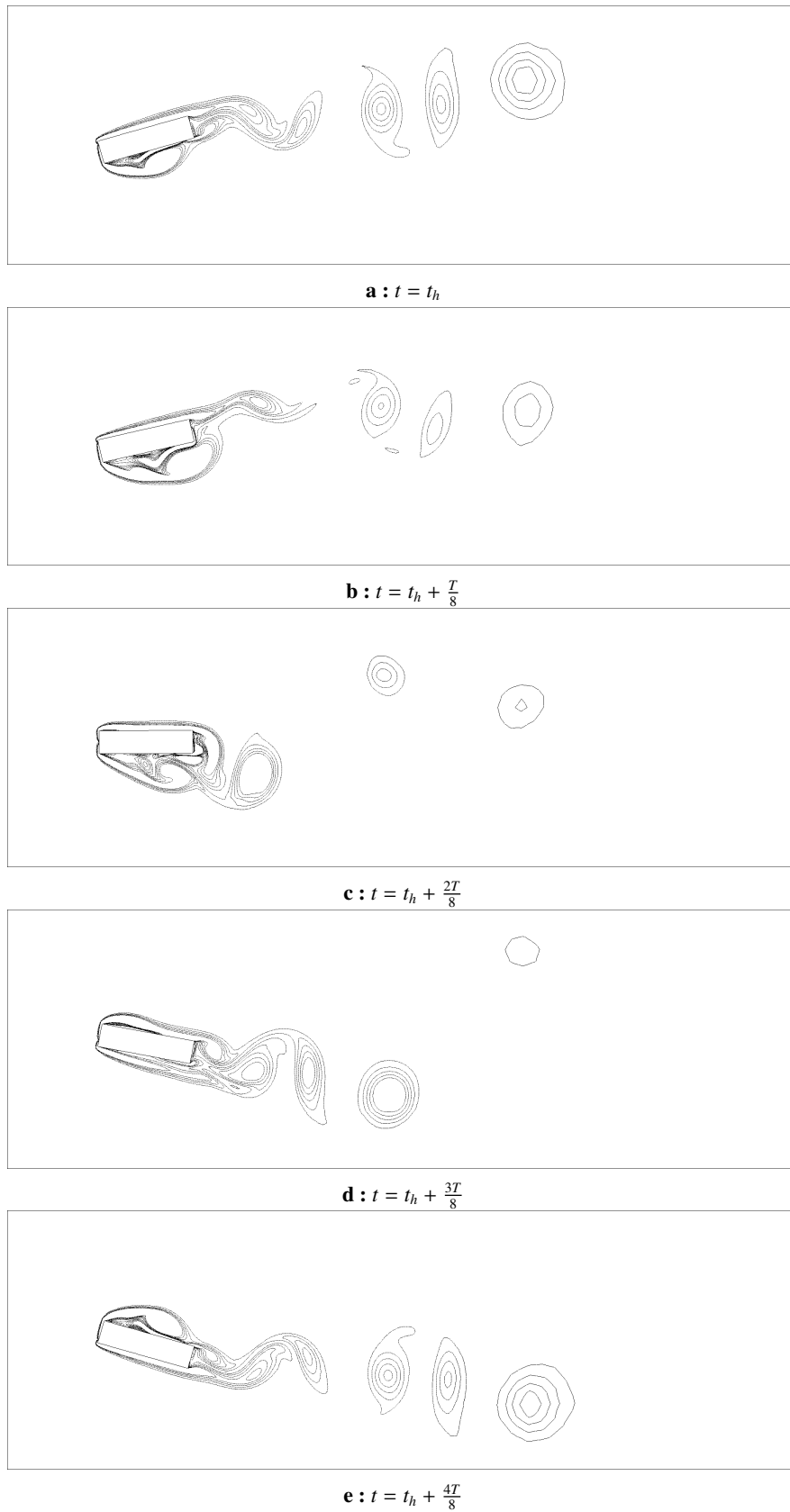


Figure G.5.3.8 : Rectangle oscillant – Champs de vorticité –  $\Delta t = 0.0250$  s

## G.5.4 Un profil de poutre oscillant

### Liste des figures de l'application

G.5.1	Profil de poutre – Géométrie . . . . .	368
G.5.2	Profil de poutre fixe – Nombre de Strouhal et amplitude de l'effort et du moment . . . . .	369
G.5.3	Profil de poutre fixe – Enveloppe de l'effort et du moment – Symétrie et dissymétrie . . . . .	369
G.5.4	Profil de poutre fixe – Effort et moment pour plusieurs $\Delta t$ . . . . .	370
G.5.5	Profil de poutre fixe – $\Delta t = 0.025$ s – Vorticité . . . . .	371
G.5.6	Profil de poutre oscillant – Mouvements en fonction du temps . . . . .	372
G.5.7	Profil de poutre oscillant – Effort et moment en fonction du temps . . . . .	373
G.5.8	Profil de poutre oscillant – Mouvements et efforts en fonction du temps . . . . .	373
G.5.9	Profil de poutre oscillant – Champs de vorticité pendant une demi oscillation . . . . .	374
G.5.10	Profil de poutre oscillant – Maillage 1 . . . . .	375
G.5.11	Profil de poutre oscillant – Maillage 1 – Zoom . . . . .	375

### Liste des tableaux de l'application

G.5.1	Profil de poutre oscillant – Informations . . . . .	369
-------	---	-----

### Liste des figures de l'application en annexe

### Liste des tableaux de l'application en annexe

#### G.5.4.1 Description

La présente étude se place une nouvelle fois dans le domaine des structures excitées par des lâchers tourbillonnaires. La géométrie considérée est un profil de poutre en H. L'objectif de ce cas d'application est de vérifier rapidement l'implémentation du couplage entre ISIS-CFD et MBDyn sur un cas possédant 2 degrés de liberté. La géométrie ainsi que les caractéristiques de la simulation sont présentées à la figure G.5.4.1 et au tableau G.5.4.1. L'écoulement est considéré comme étant laminaire afin de faciliter la comparaison avec des résultats bibliographiques. Un unique maillage, dont des visualisations sont proposées aux figures G.5.4.10 et G.5.4.11, est testé. Il est composé de 79300 cellules. De nouveau, une étude en pas de temps est réalisée en bloquant tous les degrés de liberté. La longueur du profil en H est égale à 12 m. La vitesse du fluide considéré est fixée à  $u_\infty = 10 \text{ m.s}^{-1}$ . Le nombre de Reynolds vaut ainsi 1500. Aucun amortissement mécanique n'est modélisé. Les fréquences propres du système mécanique en translation verticale et en rotation sont respectivement de  $f_{0,y} = 0.130 \text{ s}^{-1}$  et  $f_{0,r} = 0.200 \text{ s}^{-1}$ .

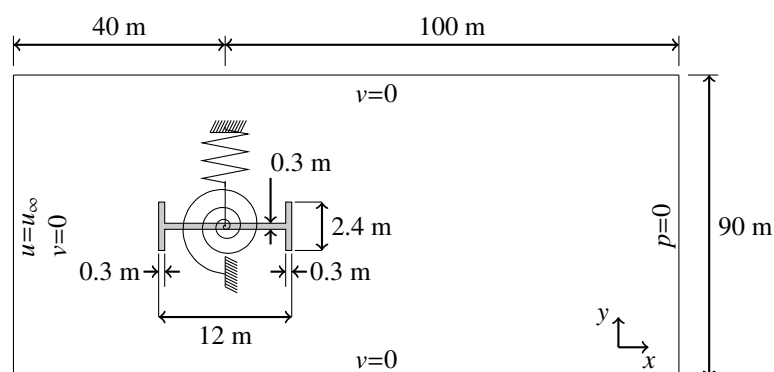


Figure G.5.4.1 : Profil de poutre – Géométrie

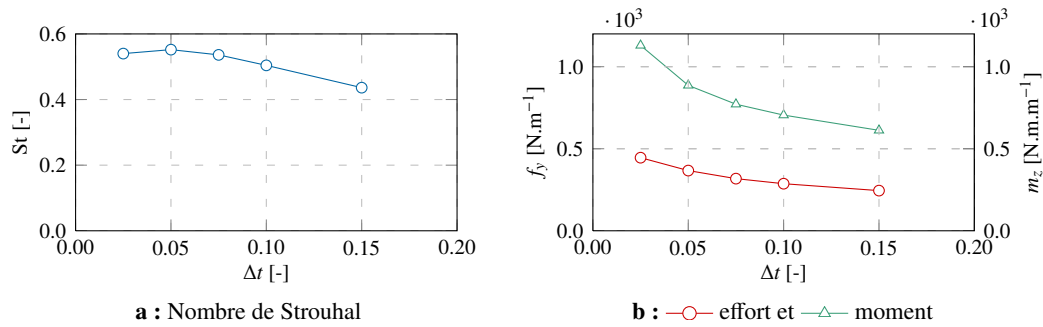
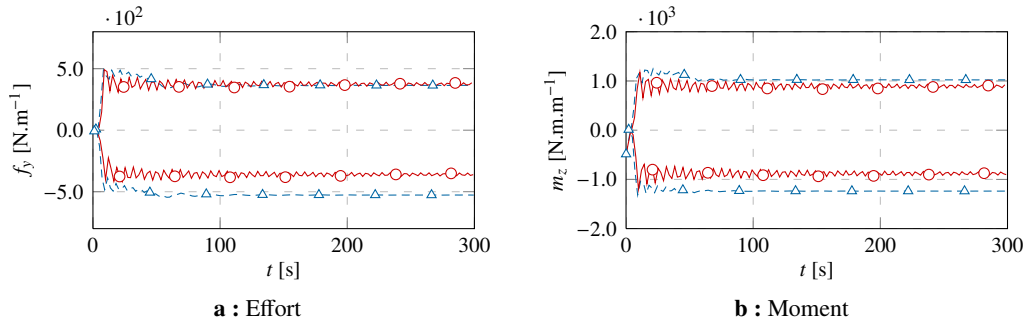
#### G.5.4.2 Profil de poutre fixe

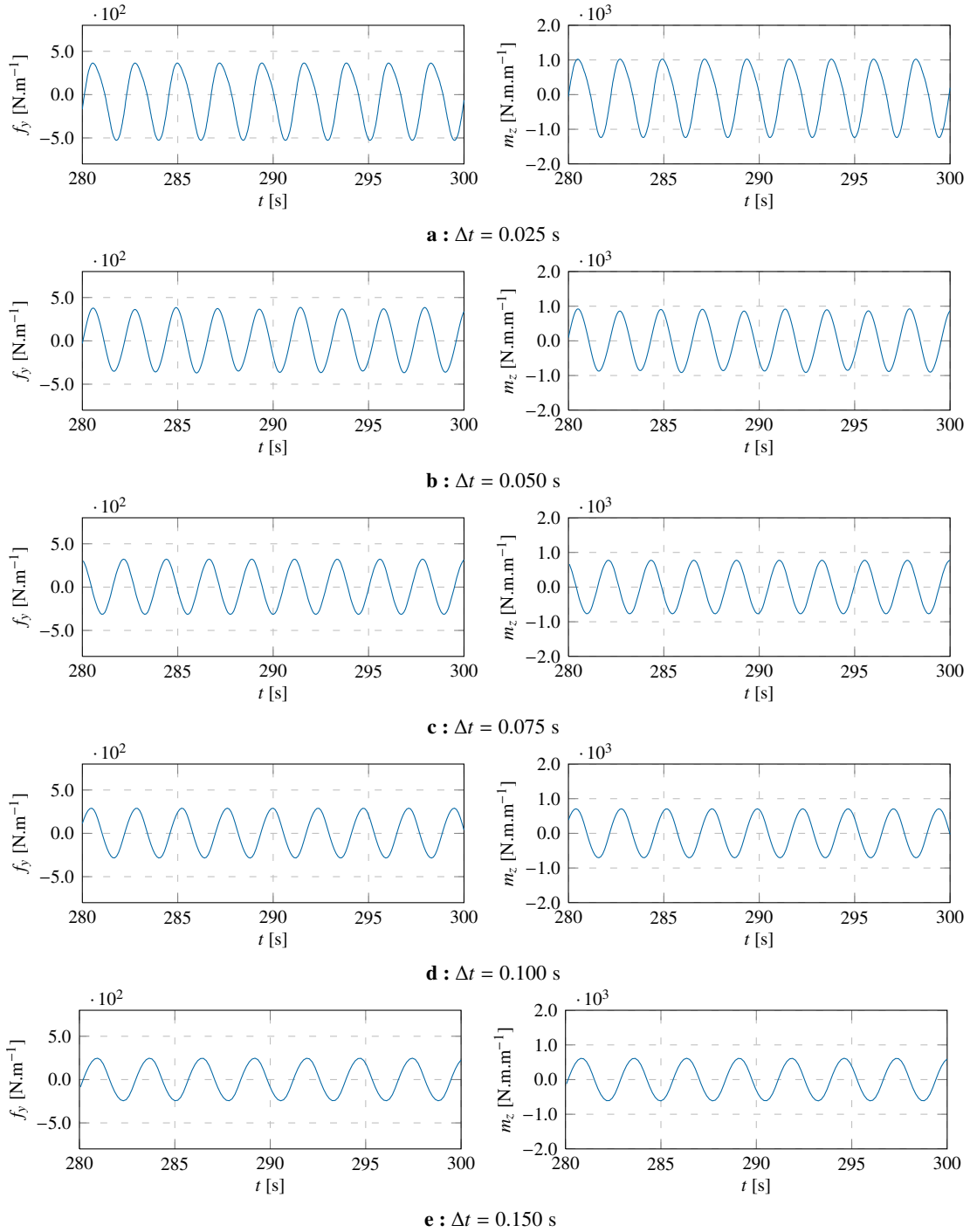
Lorsque les deux degrés de liberté sont bloqués, la valeur du pas de temps influence de manière non négligeable la fréquence des lâchers tourbillonnaires et l'amplitude des efforts subis par le profil de poutre comme le montre

Descriptif	Valeur	Unité
$\Delta t$	0.150/0.100/0.075/0.050/0.025	s
$\rho_f$	1.25	kg.m <sup>-3</sup>
$\mu_f$	0.1	kg.m <sup>-2</sup> .s
$m$	3 000	kg.m <sup>-1</sup>
$k$	2 000	kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-2</sup>
$I_{zz}$	25 300	kg.m
$k_r$	40 000	kg.m.s <sup>-2</sup>

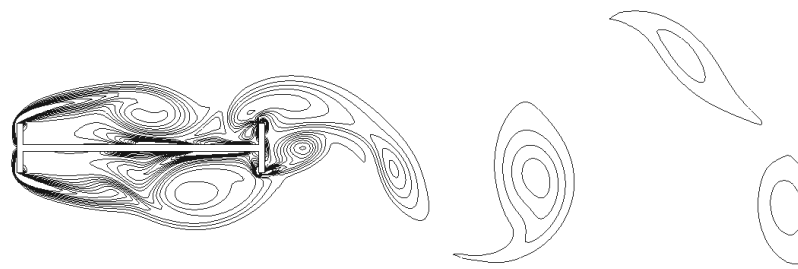
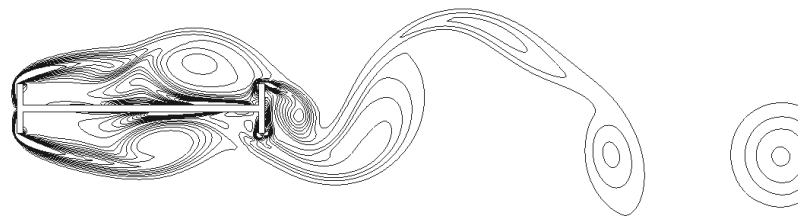
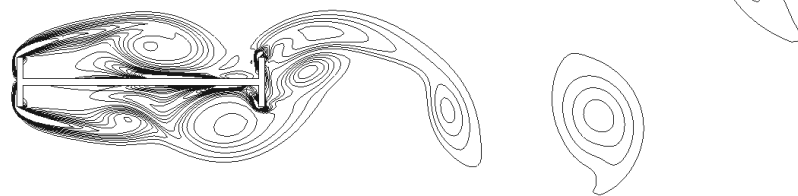
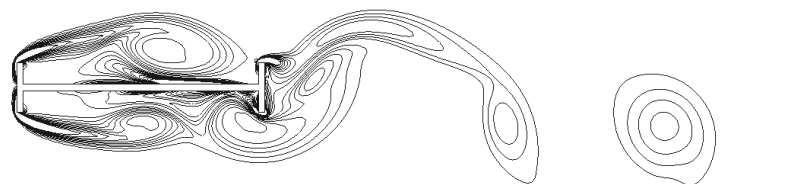
Tableau G.5.4.1 : Profil de poutre oscillant – Informations

la figure G.5.4.2. De plus, la simulation utilisant le plus petit pas de temps montre une dissymétrie temporelle du signal des efforts (cf. figure G.5.4.3). La très forte complexité de l'écoulement (cf. figure G.5.4.5 p. 371) peut facilement expliquer ces observations. En toute rigueur, une étude plus approfondie de l'influence du pas de temps serait nécessaire. L'objectif de cette étude étant uniquement de vérifier l'implémentation de l'algorithme de couplage sur un cas à deux degrés de liberté, il n'a pas été jugé pertinent de diminuer une nouvelle fois le pas de temps car, lorsque le plus petit pas de temps est utilisé, les 300 s de simulation représentent déjà 12000 pas de temps. De plus, il est attendu que le couplage entre l'écoulement et le mouvement du profil de poutre déstabilise suffisamment l'écoulement pour que les phénomènes dissymétriques disparaissent. Par la suite, un pas de temps  $\Delta t$  égal à 0.025 s est donc utilisé.

Figure G.5.4.2 : Profil de poutre fixe – Nombre de Strouhal évalué à partir du signal temporel des efforts et amplitude de l'effort et du moment en fonction de  $\Delta t$ Figure G.5.4.3 : Profil de poutre fixe – Enveloppe de l'effort et du moment – Cas dissymétrique —△— ( $\Delta t = 0.025$  s) et symétrique —○— ( $\Delta t = 0.050$  s)



**Figure G.5.4.4 :** Profil de poutre fixe – Effort et moment en fonction du temps pour plusieurs  $\Delta t$

**a :  $t = 100$  s****b :  $t = 150$  s****c :  $t = 200$  s****d :  $t = 250$  s****e :  $t = 300$  s****Figure G.5.4.5 : Profil de poutre fixe –  $\Delta t = 0.025$  s – Vorticité**



G.5.4.3 Profil de poutre oscillant librement

Dans la suite de cette étude, le mouvement de translation selon l’axe  $y$  et le mouvement de rotation selon l’axe  $z$  sont relâchés. Le pas de temps utilisé vaut  $\Delta t = 0.025$  s. Le mouvement du profil de poutre est pris en compte par un mouvement rigide du maillage du fait des amplitudes importantes du mouvement de rotation (cf. figure G.5.4.6). Les résultats sont présentés au tableau G.5.4.2 et comparés à des données bibliographiques. Ces dernières confirment notamment les observations réalisées dans la première partie de cette étude sur la difficulté d’obtenir des résultats convergés. Néanmoins, seule l’amplitude du mouvement de translation selon l’axe  $y$  diffère de façon conséquente des résultats bibliographiques. Les autres quantités, c.-à-d. les fréquences des mouvements et l’amplitude du mouvement de rotation, sont, quant à eux, bien retrouvées.

La fréquence des oscillations du profil de poutre est plus proche de la fréquence propre du système mécanique en rotation que celle en translation. Ceci explique en partie le fait que le mouvement de rotation est le mode dominant dans ce cas-ci. La cinématique du profil de poutre, ainsi que les efforts s’y exerçant sont, quant à eux, présentés aux figures G.5.4.6 et G.5.4.7.

	[Dettmer et Perić, 2007]	Présente étude	Unité
translation selon $y$	[0.75, 0.85]	1.17	m
rotation selon $z$	[51.4, 62.6]	53.4	°
$f_{0,y}$	[0.185, 0.187]	0.173	s <sup>-1</sup>
$f_{0,r}$	[0.185, 0.187]	0.173	s <sup>-1</sup>

Tableau G.5.4.2 : Profil de poutre oscillant – Amplitude des mouvements

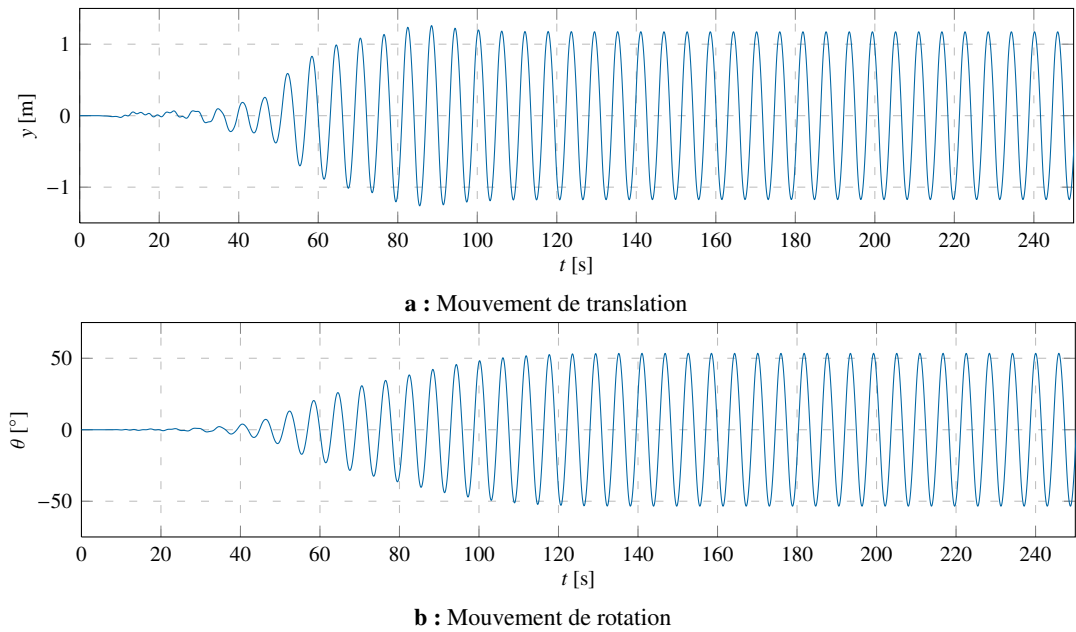


Figure G.5.4.6 : Profil de poutre oscillant – Mouvements en fonction du temps

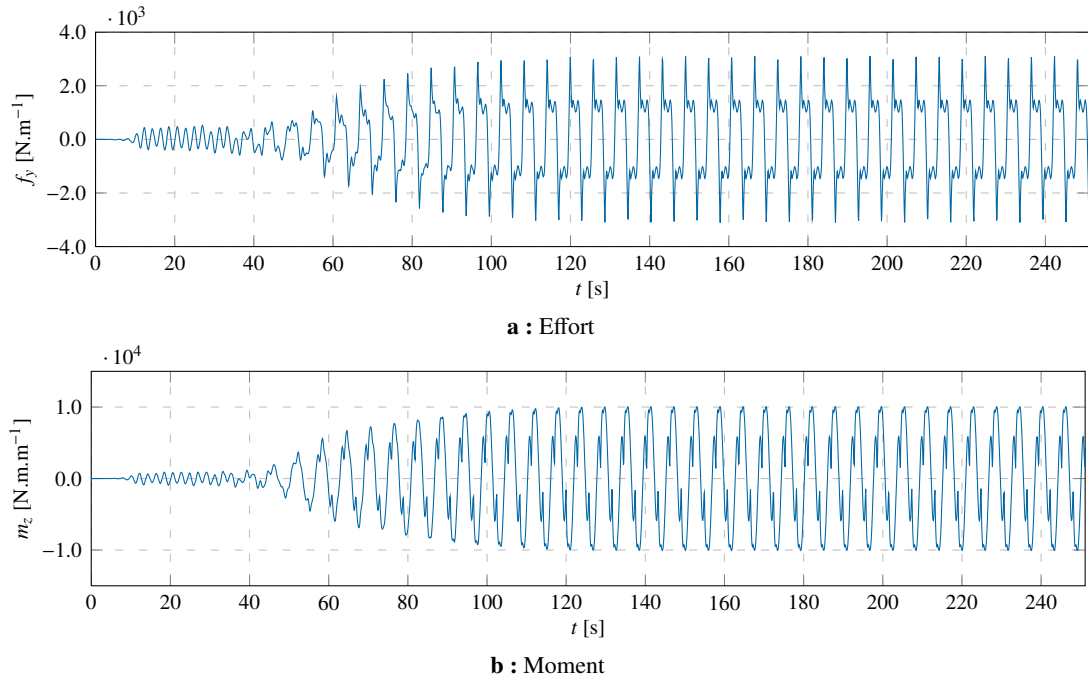


Figure G.5.4.7 : Profil de poutre oscillant – Effort et moment en fonction du temps

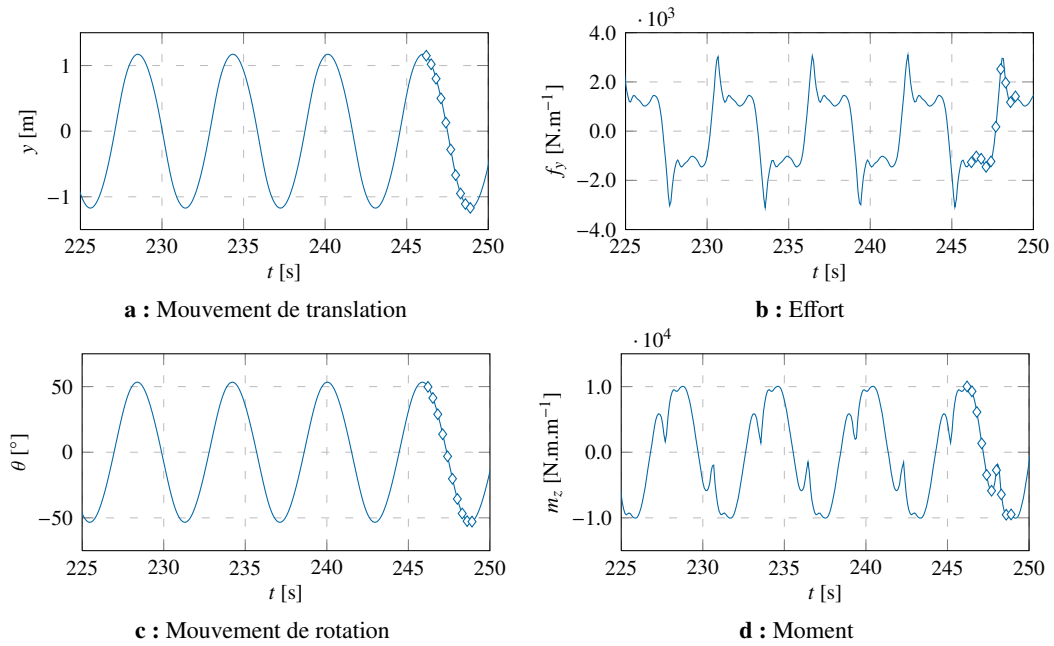
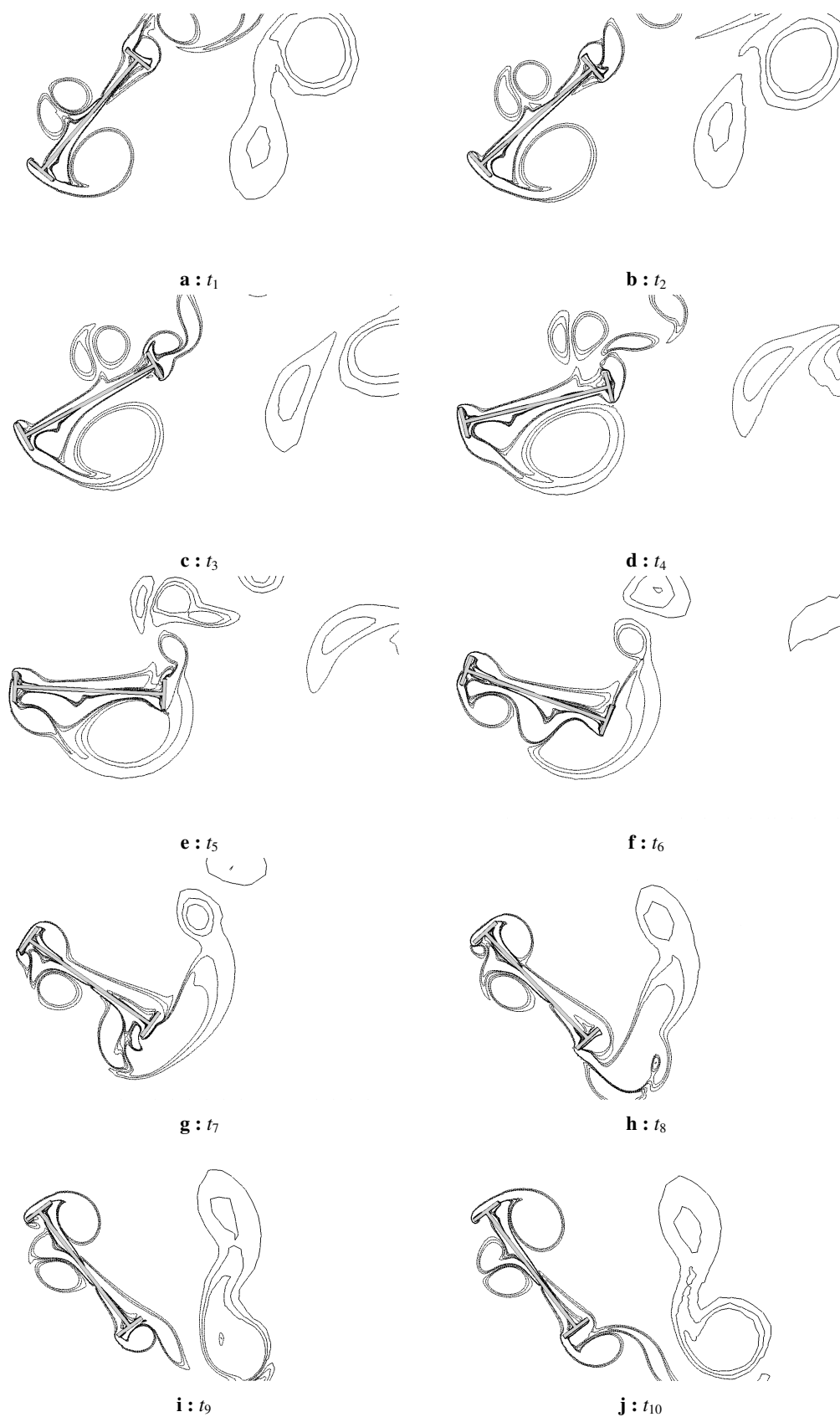


Figure G.5.4.8 : Profil de poutre oscillant – Mouvements et efforts en fonction du temps – Zoom

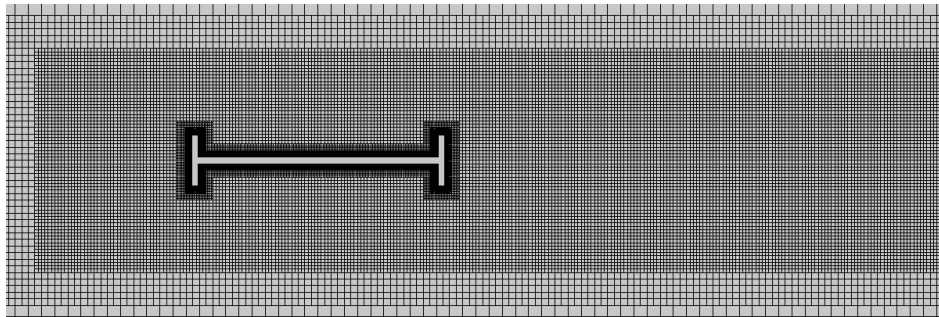


**Figure G.5.4.9** : Profil de poutre oscillant – Champs de vorticité pendant une demi oscillation – Les différents temps  $t_1$     $t_{10}$  sont repérés à la figure G.5.4.7

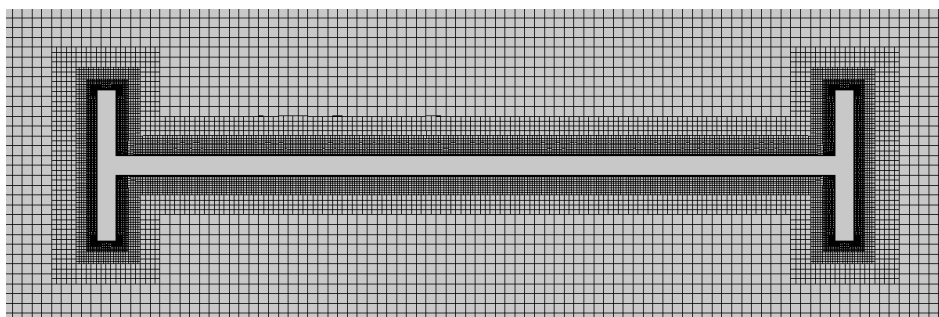
#### G.5.4.4 Conclusion

L'objectif de cette application était de valider les développements réalisés sur une application dont le corps rigide possède deux degrés de liberté. Malgré une très grande difficulté à obtenir des résultats convergés, les caractéristiques du mouvement sont globalement cohérentes avec les résultats bibliographiques. Seule l'amplitude du mouvement de translation diffère de manière significative.

Ces premières applications sont particulièrement intéressantes pour valider les développements initiaux d'une chaîne de calcul fluide-structure car des comportements oscillants sont obtenus pour des degrés de liberté élémentaires simples. De plus, les effets de masse ajoutée étant négligeables, il n'est pas nécessaire d'appliquer une méthode de stabilisation.



**Figure G.5.4.10** : Profil de poutre oscillant – Maillage 1

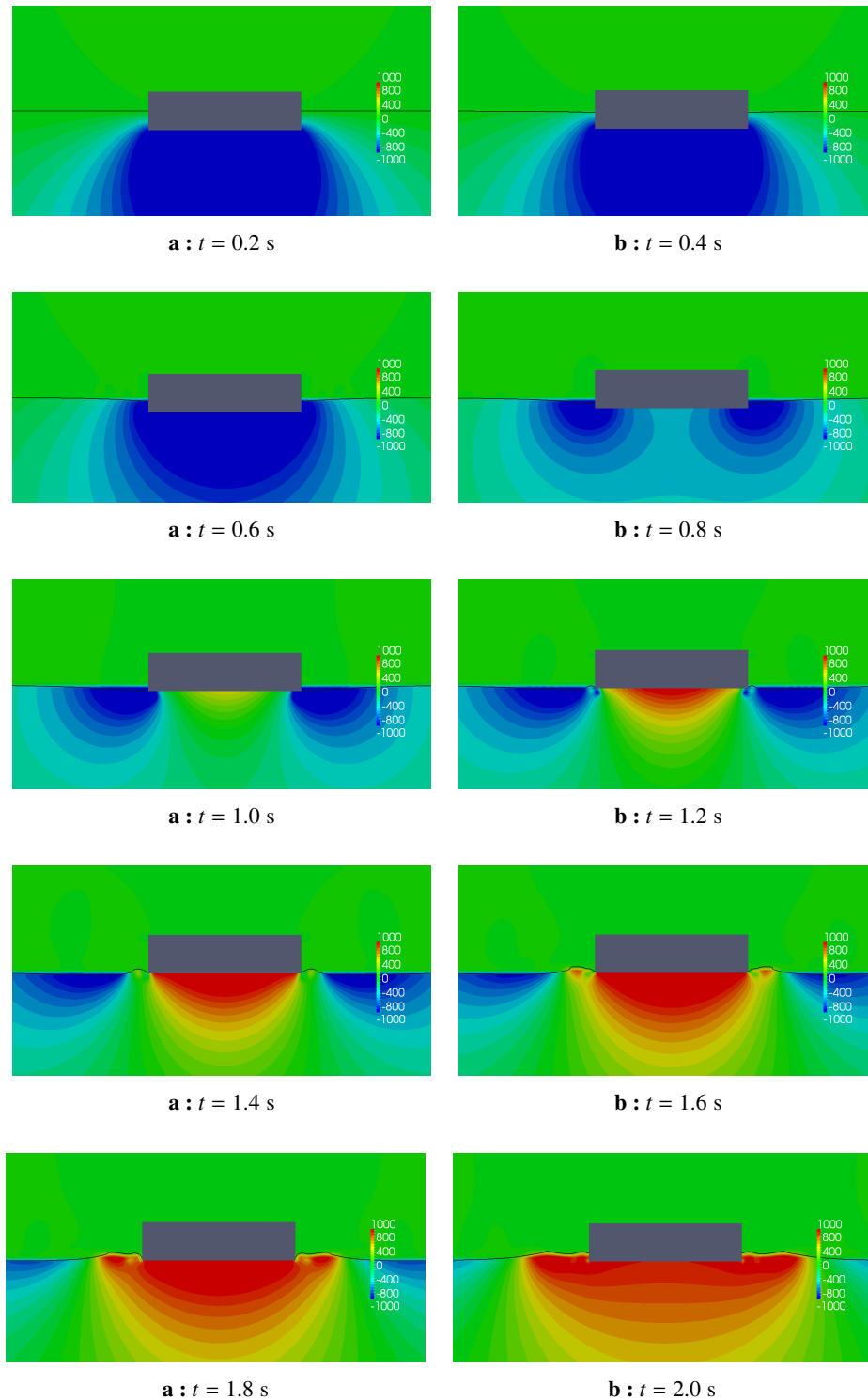


**Figure G.5.4.11** : Profil de poutre oscillant – Maillage 1 – Zoom

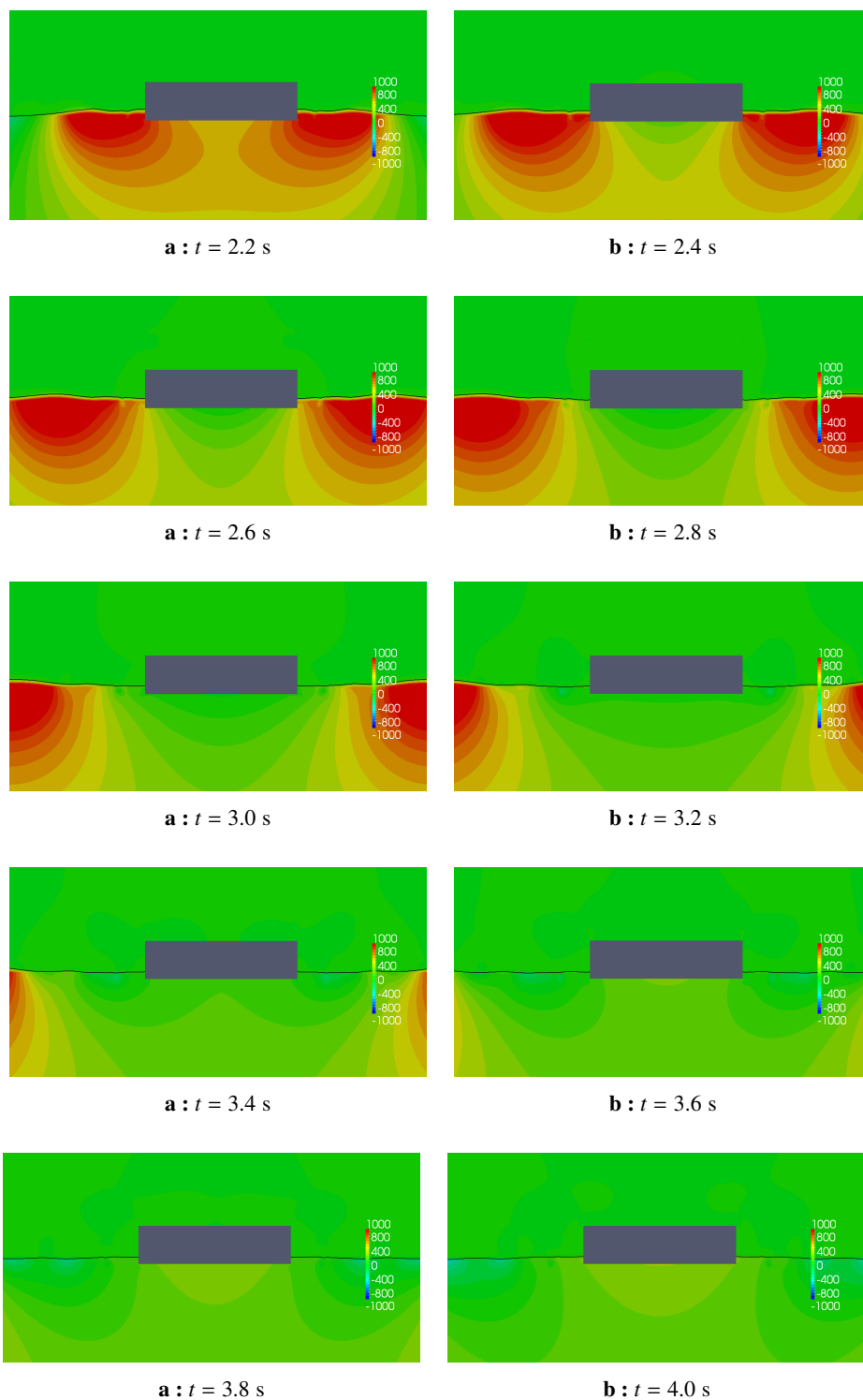
## G.6 Annexes des applications

### G.6.1 Une barge parallélépipédique

#### G.6.1.1 Pression dynamique et élévation de la surface libre

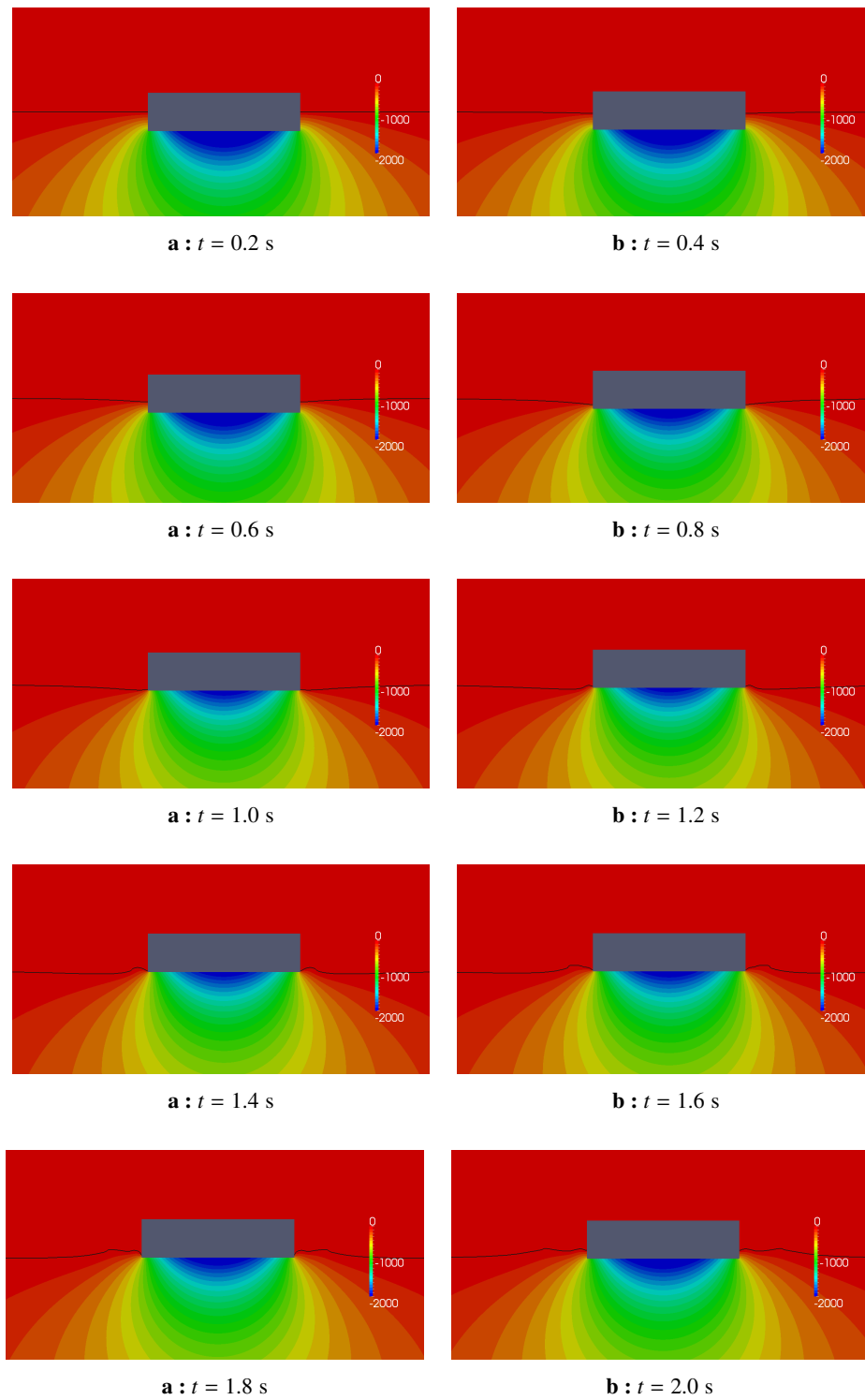


**Figure G.6.1.5 :** Une barge parallélépipédique – Pression dynamique [Pa] et position de la surface libre entre  $t = 0.2$  s et  $t = 2.0$  s

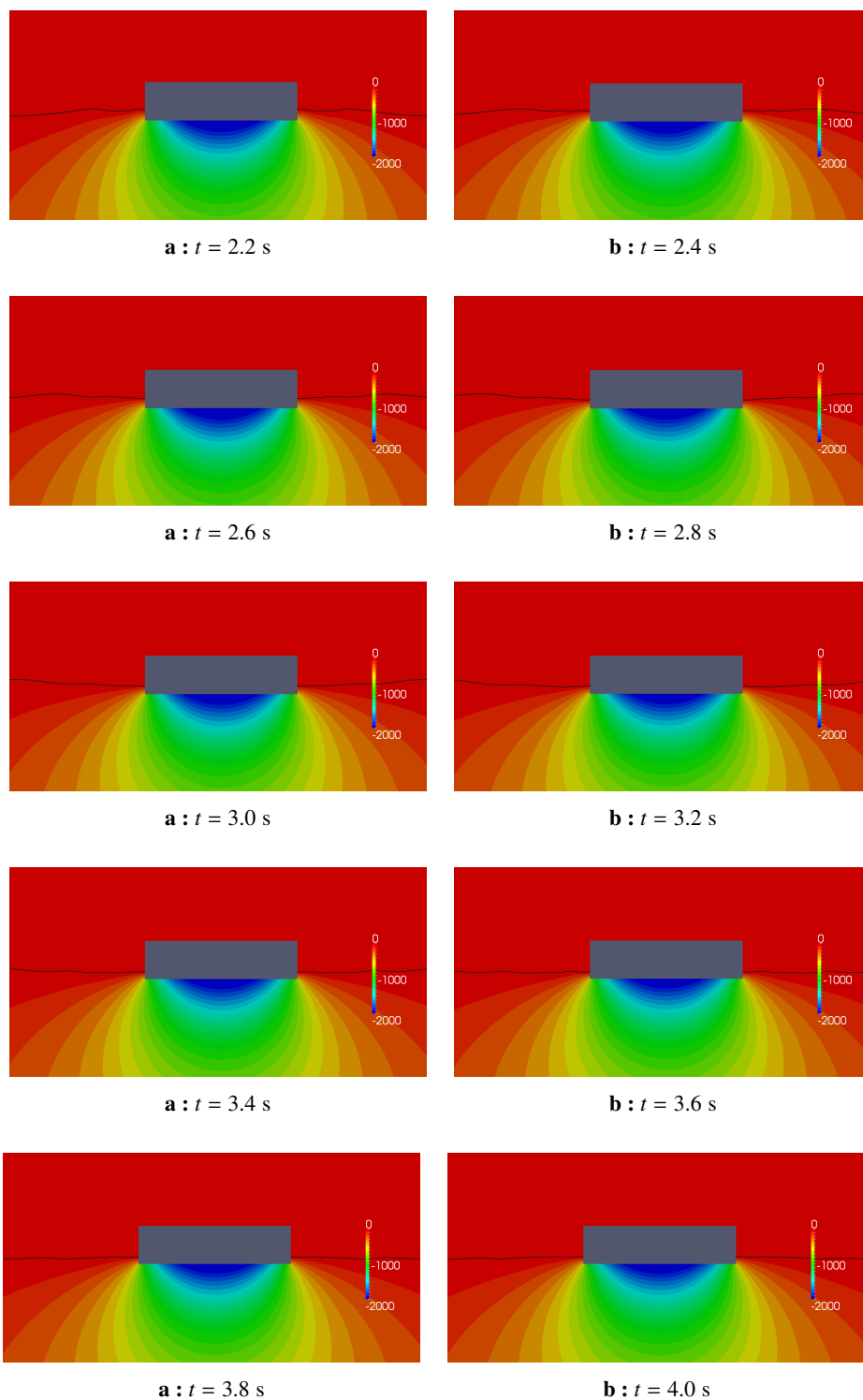


**Figure G.6.1.10 :** Une barge parallélépipédique – Pression dynamique et position de la surface libre entre  $t = 2.2$  s et  $t = 4.0$  s

G.6.1.2 Pression d'évaluation de la masse ajoutée



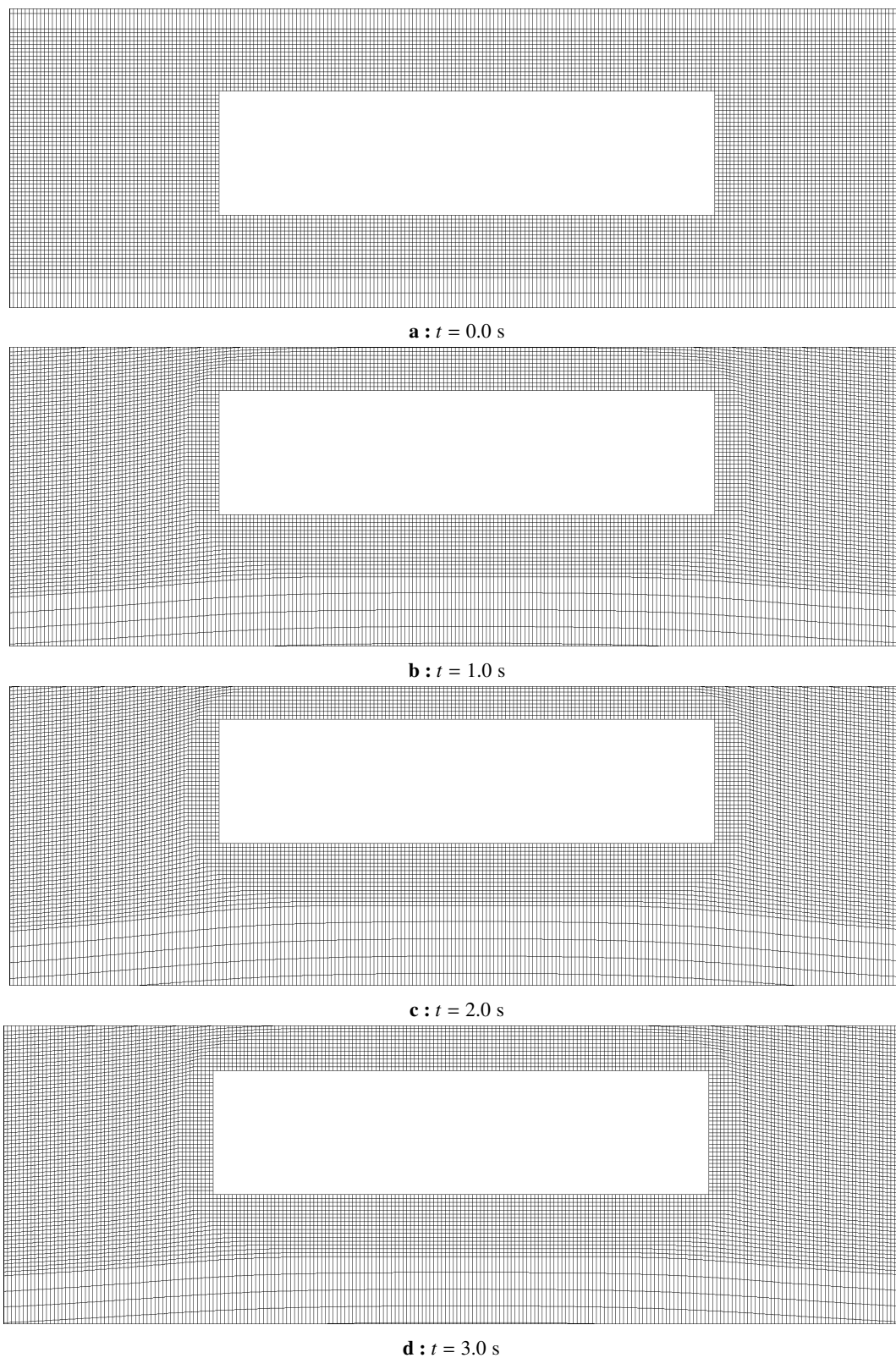
**Figure G.6.1.15 :** Une barge parallélépipédique – Pression d'évaluation de la masse ajoutée et position de la surface libre entre  $t = 0.2$  s et  $t = 2.0$  s



**Figure G.6.1.20 :** Une barge parallélépipédique – Pression d'évaluation de la masse ajoutée et position de la surface libre entre  $t = 2.2$  s et  $t = 4.0$  s



### G.6.1.3 Maillage



**Figure G.6.1.21 :** Une barge parallélépipédique – Maillage à différents instants

## G.6.2 DTMB 5512

### G.6.2.1 Maillage

Quelques illustrations d'un des maillages utilisés pour l'étude du DTMB 5512 dans les vagues sont présentées ci-dessous. Les paramètres de cette simulation sont :  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$  et  $\lambda/L_{pp} = 1.1479$ .

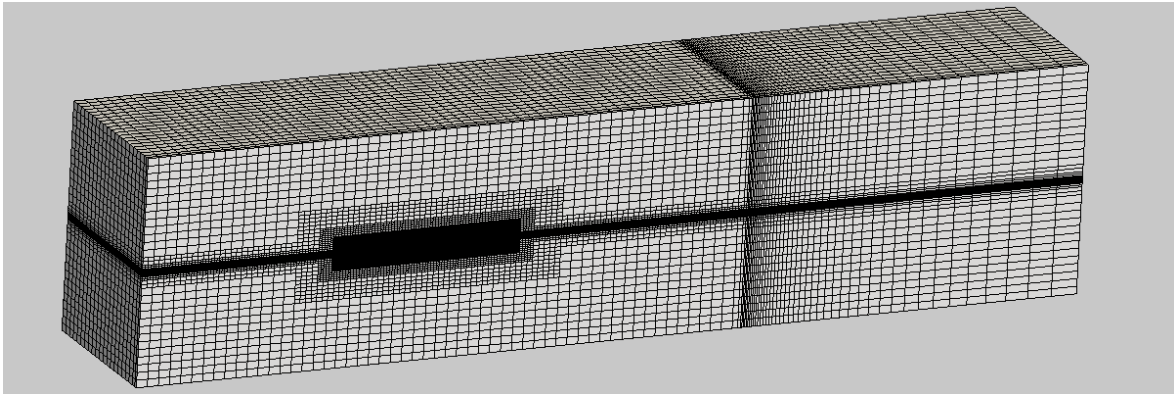


Figure G.6.2.1 : DTMB 5512 – Maillage – Vue générale

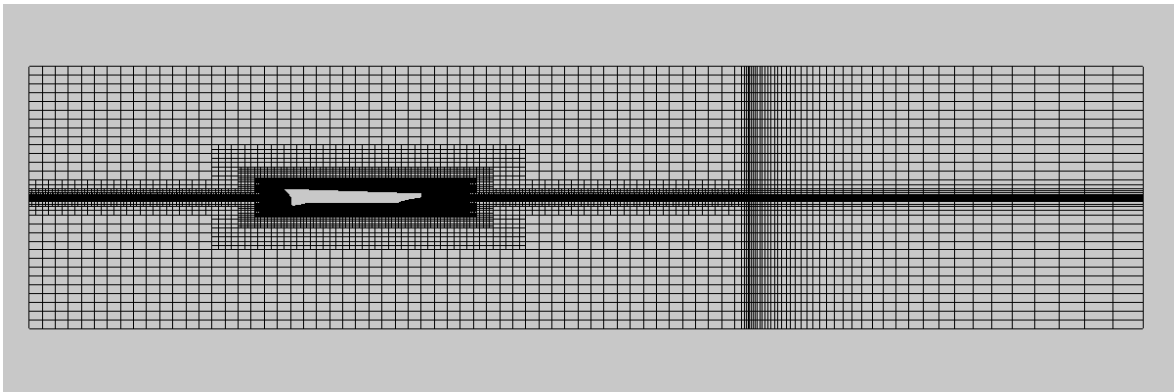


Figure G.6.2.2 : DTMB 5512 – Maillage – Vue de côté

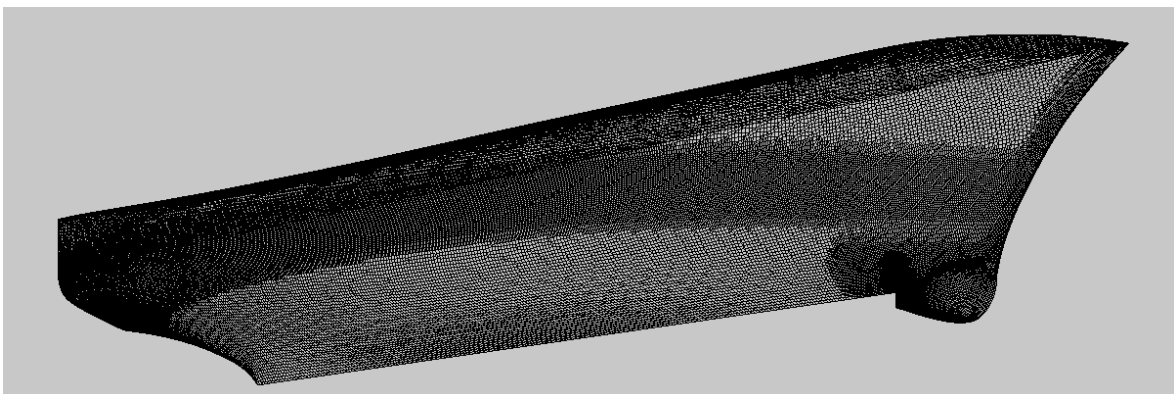
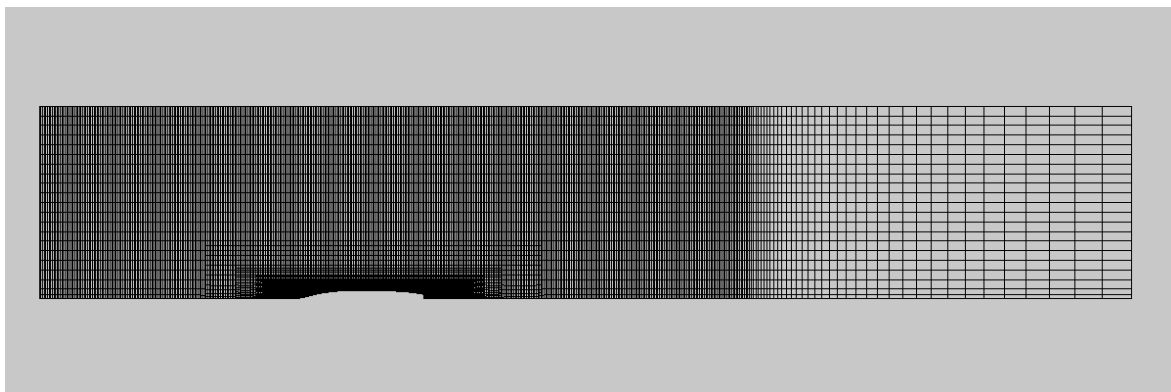
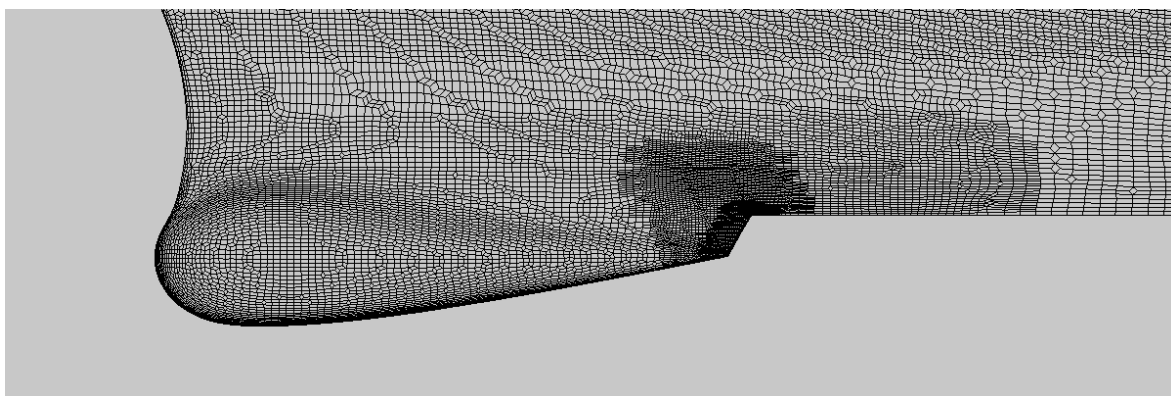


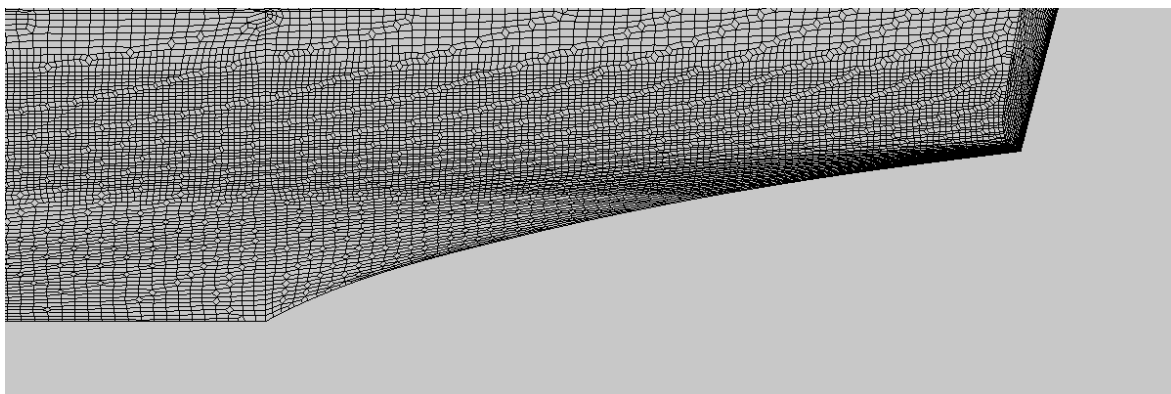
Figure G.6.2.3 : DTMB 5512 – Maillage – Vue du navire



**Figure G.6.2.4 : DTMB 5512 – Maillage – Vue du dessus au niveau de la surface libre**



**Figure G.6.2.5 : DTMB 5512 – Maillage – Zoom sur le bulbe**



**Figure G.6.2.6 : DTMB 5512 – Maillage – Zoom sur la poupe**

## G.6.2.2 Résistance ajoutée sur houle de face

Fr [-]	$A_k$ [-]	$\lambda/L_{pp}$ [-]	$f_e$ [s <sup>-1</sup> ]	$f_{x0}/f_x^*$ [-]	$f_{x2}/f_x^* / \gamma_{f_{xi}}$ [-]/[°]		
					$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0.28	0.0250	0.4990	2.02	0.99	0.10/-23	-	-
0.28	0.0250	0.7075	1.56	0.99	0.19/-129	-	-
0.28	0.0250	0.8486	1.37	1.03	0.24/-162	-	-
0.28	0.0250	0.9977	1.22	1.11	0.16/+152	0.06/+28	-
0.28	0.0250	1.1404	1.11	1.16	0.30/+80	0.09/+41	-
0.28	0.0250	1.5011	0.92	1.16	1.17/+82	0.07/+90	-
0.28	0.0250	2.7207	0.62	1.01	2.26/+122	-	-
0.28	0.0500	0.4990	2.02	1.01	0.20/-35	-	-
0.28	0.0500	0.7075	1.56	1.05	0.37/-136	-	-
0.28	0.0500	0.8486	1.37	1.15	0.44/-172	0.08/+42	-
0.28	0.0500	0.9977	1.22	1.41	0.27/+135	0.22/+19	0.07/-88
0.28	0.0500	1.1404	1.11	1.57	0.63/+75	0.31/+33	0.10/-51
0.28	0.0500	1.2929	1.02	1.61	1.50/+69	0.32/+62	0.10/-7
0.28	0.0500	1.5011	0.92	1.54	2.40/+74	0.24/+75	0.09/-9
0.28	0.0500	2.7207	0.62	1.14	4.60/+117	0.14/-50	-
0.28	0.0750	0.4990	2.02	1.04	0.28/-41	-	-
0.28	0.0750	0.7075	1.56	1.12	0.55/-147	0.05/+131	-
0.28	0.0750	0.8486	1.37	1.38	0.61/-179	0.17/+36	0.06/-75
0.28	0.0750	0.9977	1.22	2.05	0.48/+132	0.46/+22	0.22/-89
0.28	0.0750	1.1404	1.11	2.02	1.03/+50	0.62/+16	0.36/-74
0.28	0.0750	1.5011	0.92	1.91	3.80/+64	0.48/+58	0.23/-29
0.41	0.0250	0.6590	2.00	1.01	-	-	-
0.41	0.0250	0.7853	1.74	1.00	0.10/-171	-	-
0.41	0.0250	0.9900	1.46	1.02	0.19/+150	-	-
0.41	0.0250	1.1479	1.31	1.03	0.25/+135	0.05/+34	-
0.41	0.0250	1.3718	1.15	1.06	0.25/+128	0.06/+65	-
0.41	0.0250	1.4925	1.08	1.07	0.25/+117	-	-
0.41	0.0250	2.2574	0.80	1.01	0.58/+108	-	-
0.41	0.0500	0.6590	2.00	1.01	0.10/-134	-	-
0.41	0.0500	0.7853	1.74	1.02	0.19/-174	-	-
0.41	0.0500	0.9900	1.46	1.05	0.35/+142	0.12/+21	-
0.41	0.0500	1.1479	1.31	1.14	0.47/+128	0.18/+19	-
0.41	0.0500	1.3718	1.15	1.23	0.47/+112	0.17/+35	0.09/-113
0.41	0.0500	1.4925	1.08	1.25	0.48/+146	0.14/+140	0.09/+66
0.41	0.0500	2.2574	0.80	1.06	1.16/+103	-	-
0.41	0.0750	0.6590	2.00	1.03	0.14/-142	-	-
0.41	0.0750	0.7853	1.74	1.05	0.27/+174	0.08/+71	-
0.41	0.0750	0.9900	1.46	1.16	0.46/+131	0.21/+1	-
0.41	0.0750	1.1479	1.31	1.29	0.65/+108	0.32/-17	0.12/+163
0.41	0.0750	1.4925	1.08	1.39	0.74/+85	0.26/+47	0.23/-90
0.41	0.0750	2.2574	0.80	1.15	1.72/+96	0.07/-180	-

Tableau G.6.2.1 : DTMB 5512 – Résistance ajoutée – Amplitude de la moyenne et des trois premiers harmoniques

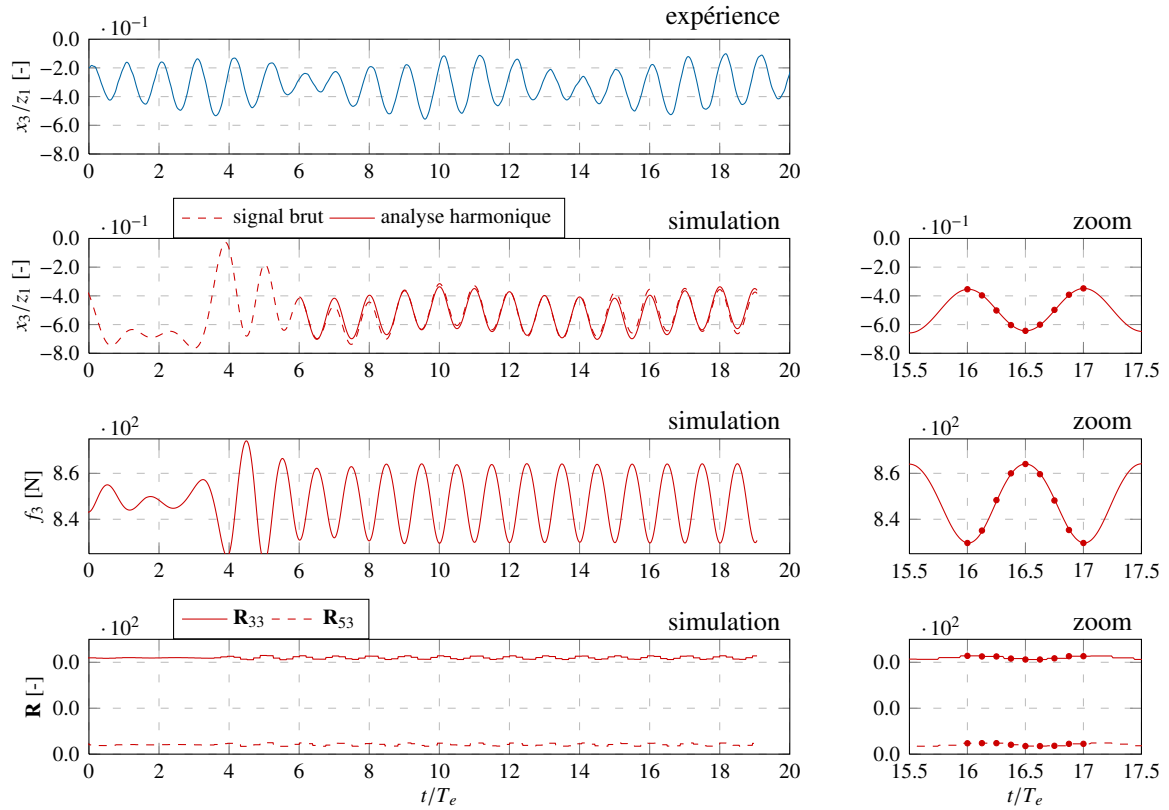
### G.6.2.3 Résultats par simulation

Dans cette section, quelques résultats sont proposés. Les pages correspondant aux différents cas présentés sont données au tableau G.6.2.2. Pour les simulations concernées, les première et seconde pages concernent le mouvement de pilonnement et de tangage. La troisième page présente l'analyse de l'effort de résistance et des visualisations de la surface libre au cours d'une période.

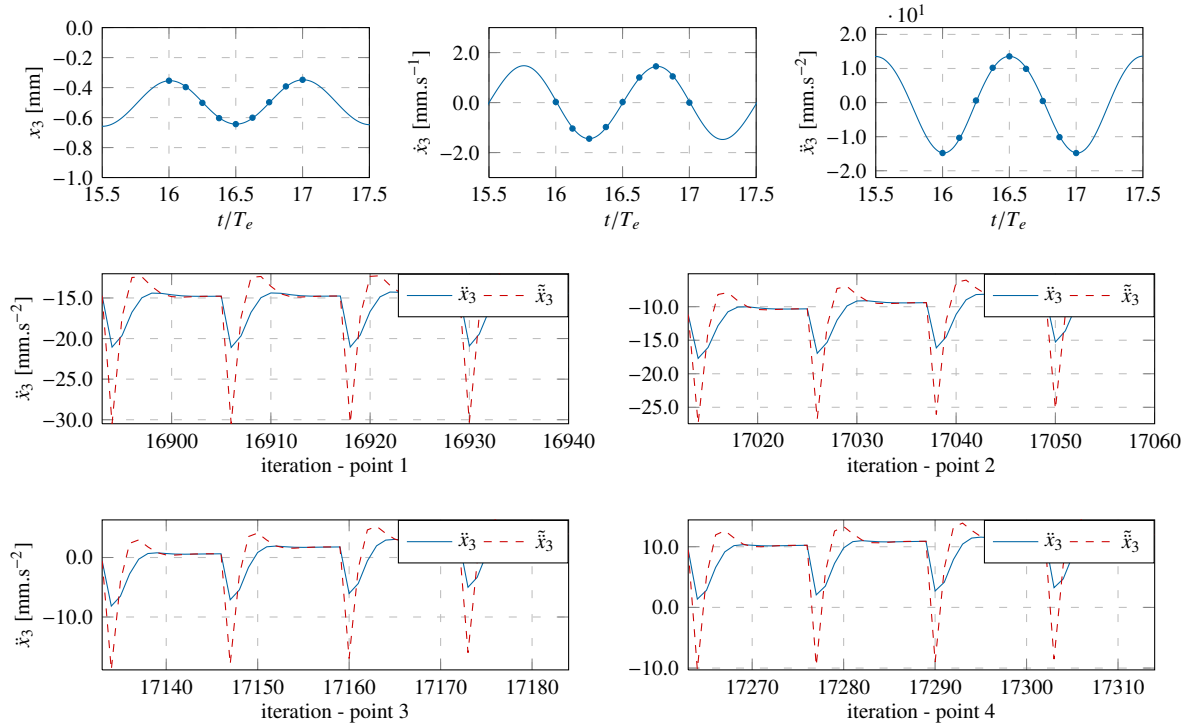
$Fr$ [-]	$A_k$ [-]	$\lambda/L_{pp}$ [-]	$f_e$ [s <sup>-1</sup> ]	pages [-]
0.28	0.0500	0.7075	1.56	385 à 387
0.28	0.0500	0.9977	1.22	388 à 390
0.28	0.0500	1.2929	1.02	391 à 393
0.28	0.0500	2.7207	0.62	394 à 396
0.41	0.0500	0.6590	2.00	397 à 399
0.41	0.0500	0.9900	1.46	400 à 402
0.41	0.0500	1.3718	1.15	403 à 405
0.41	0.0500	2.2574	0.80	406 à 408

**Tableau G.6.2.2 :** DTMB 5512 – Pages des résultats

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  (1/3)

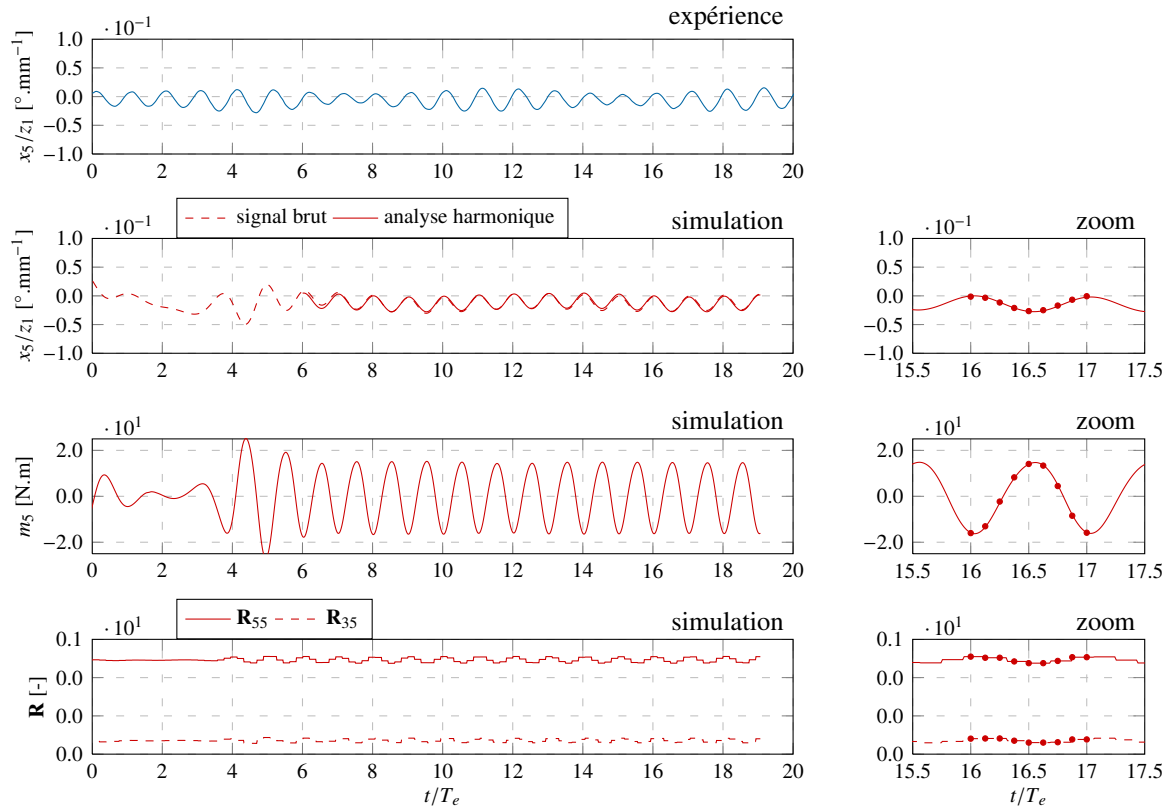


**Figure G.6.2.7 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Mouvement de pilonnement

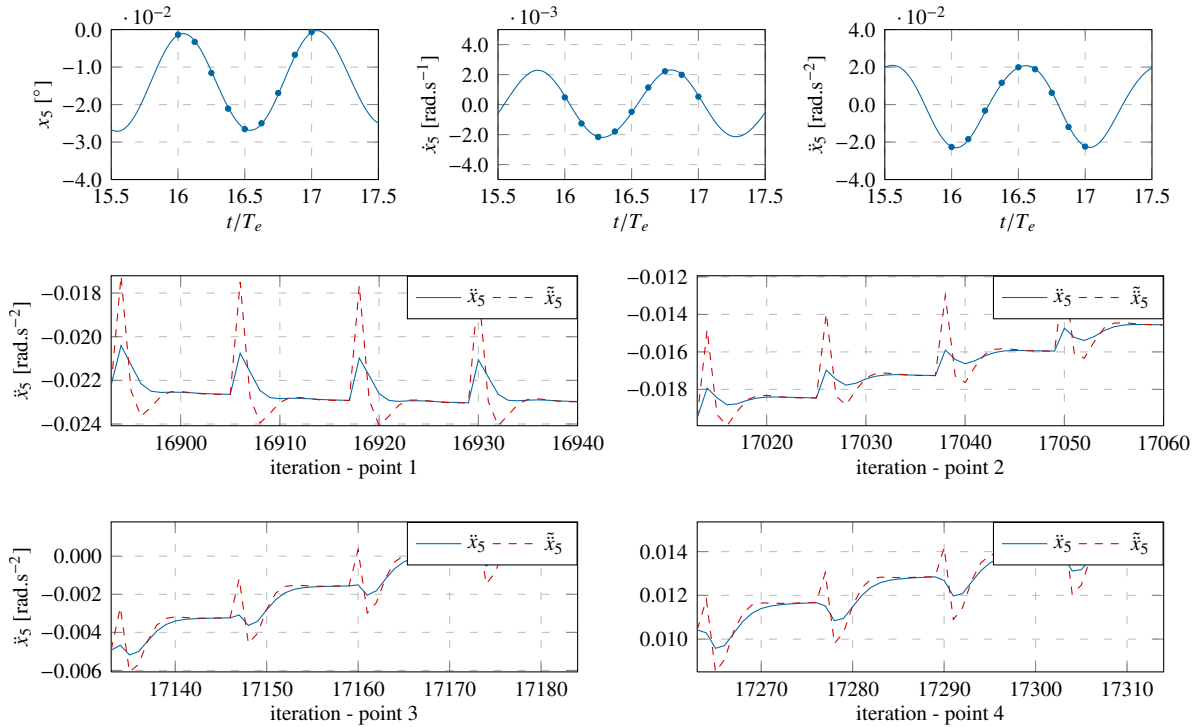


**Figure G.6.2.8 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  (1/3)



**Figure G.6.2.9 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.10 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  (3/3)

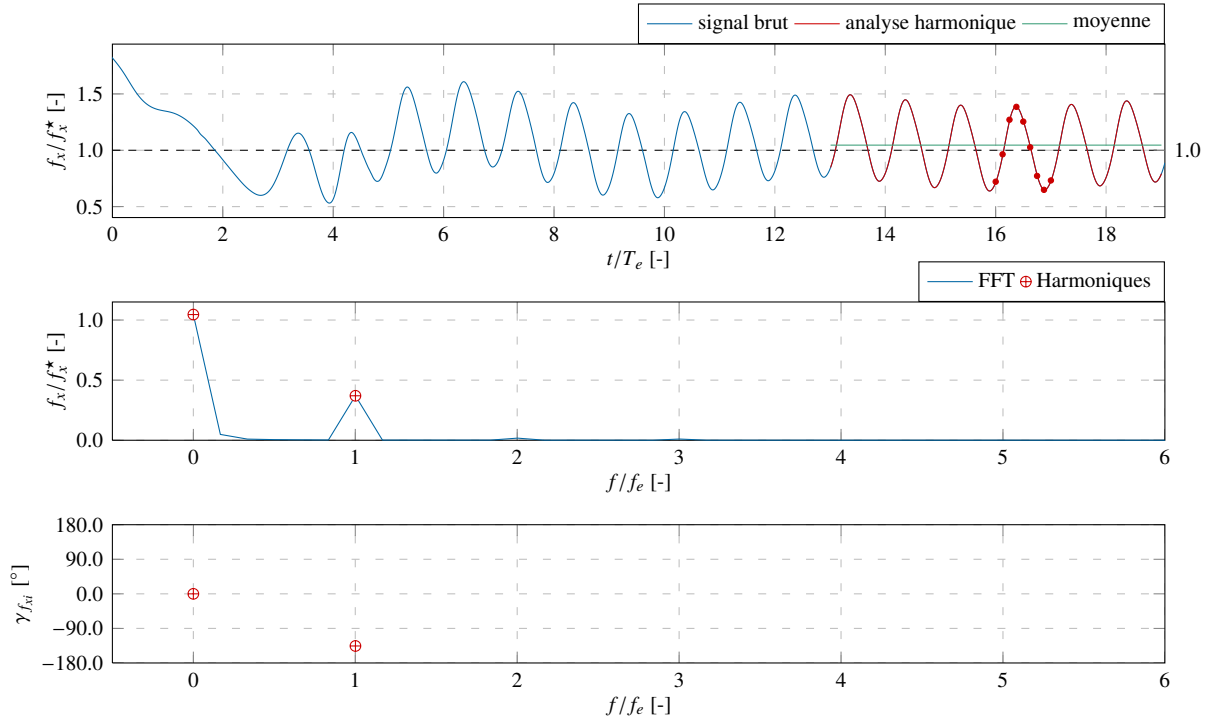


Figure G.6.2.11 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Effort de résistance

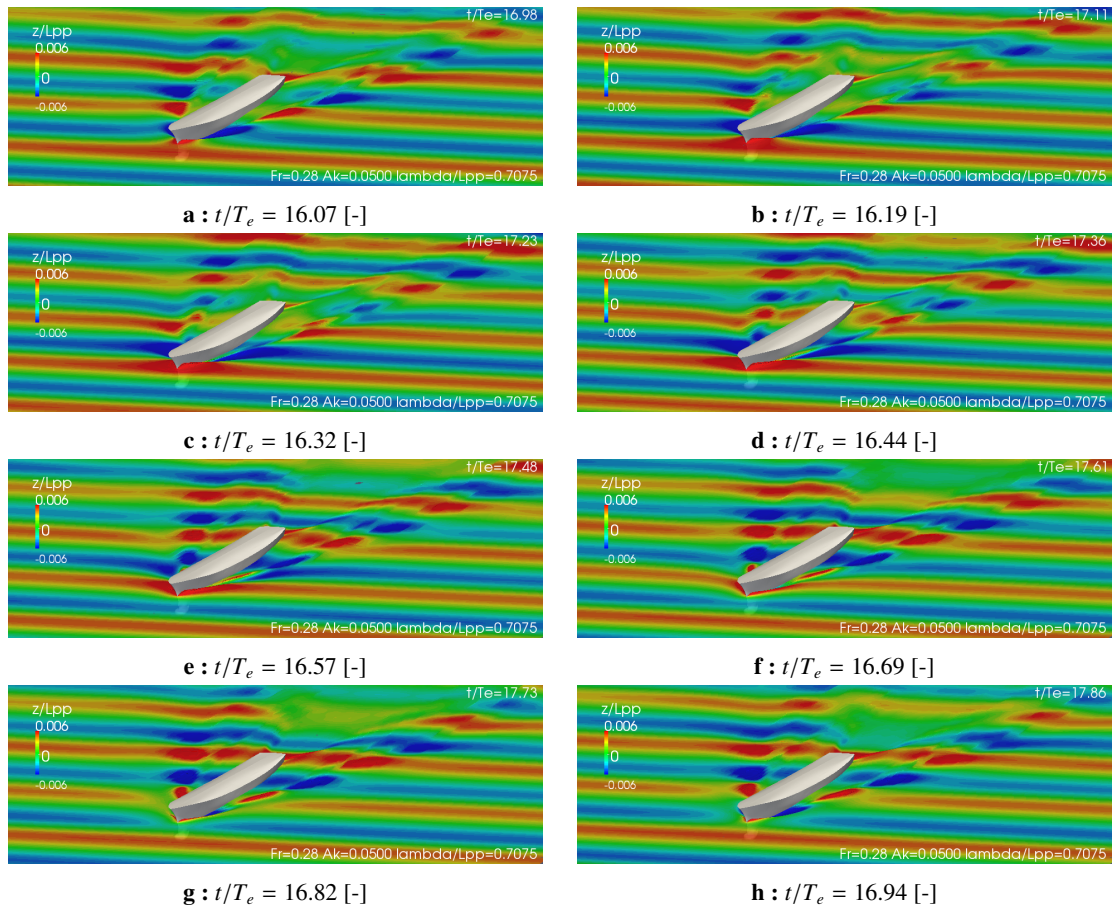


Figure G.6.2.12 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.7075$  – Surface libre



$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  (1/3)

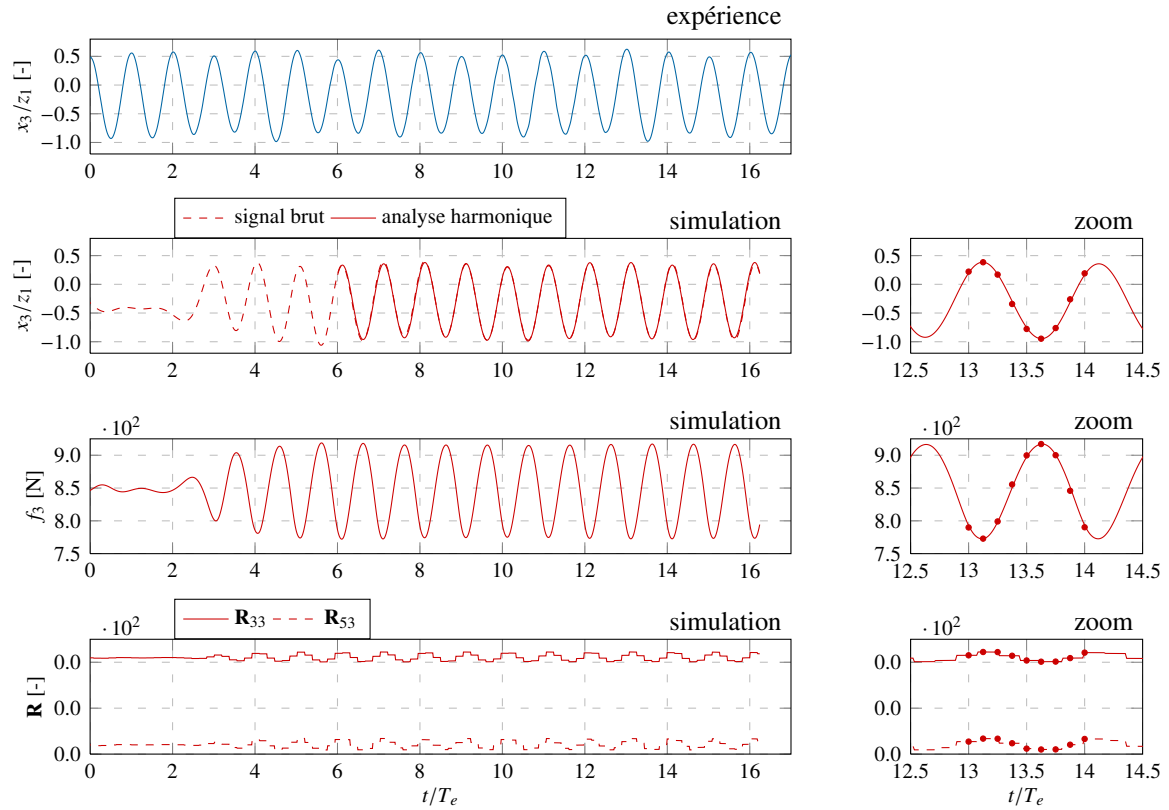


Figure G.6.2.13 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Mouvement de pilonnement

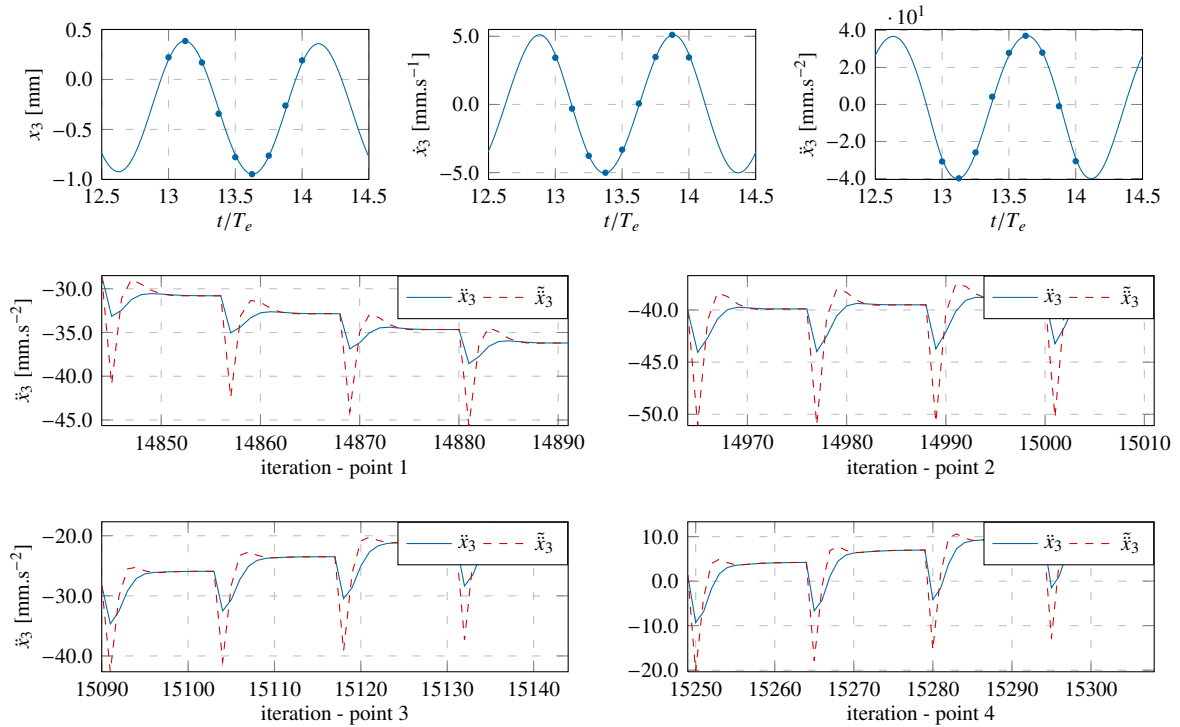
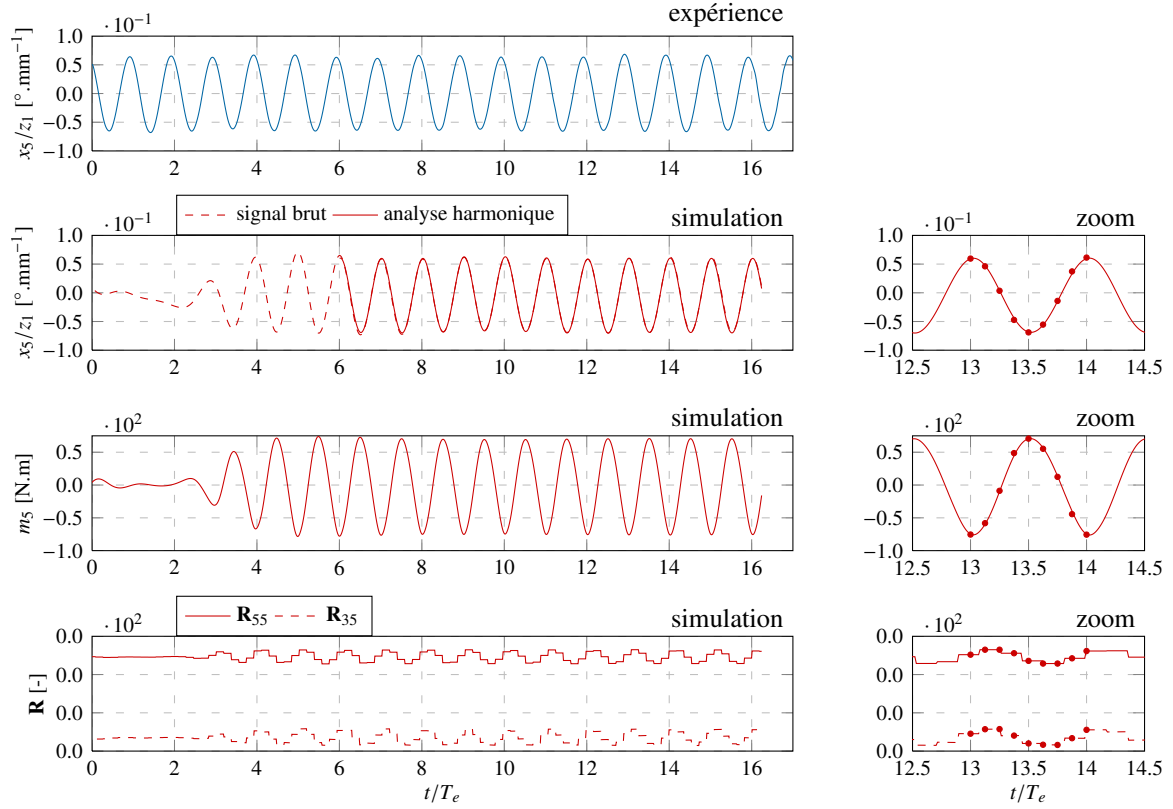
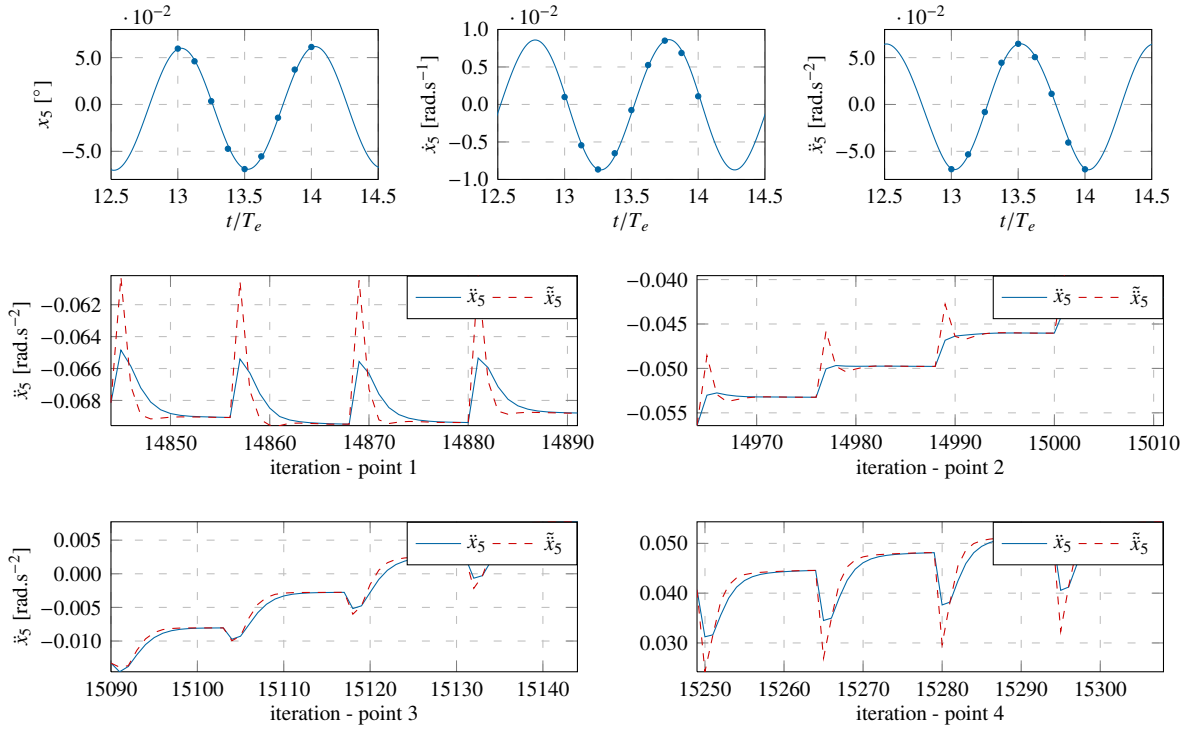


Figure G.6.2.14 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  (1/3)



**Figure G.6.2.15 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.16 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  (3/3)

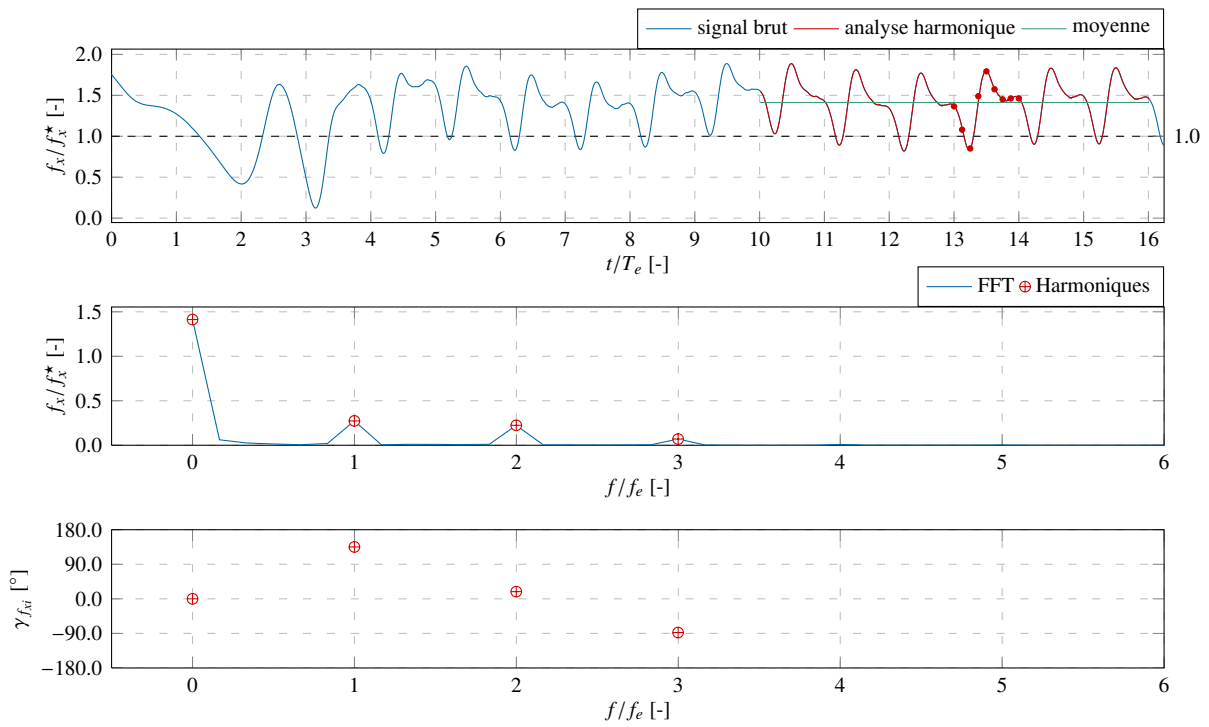


Figure G.6.2.17 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Effort de résistance

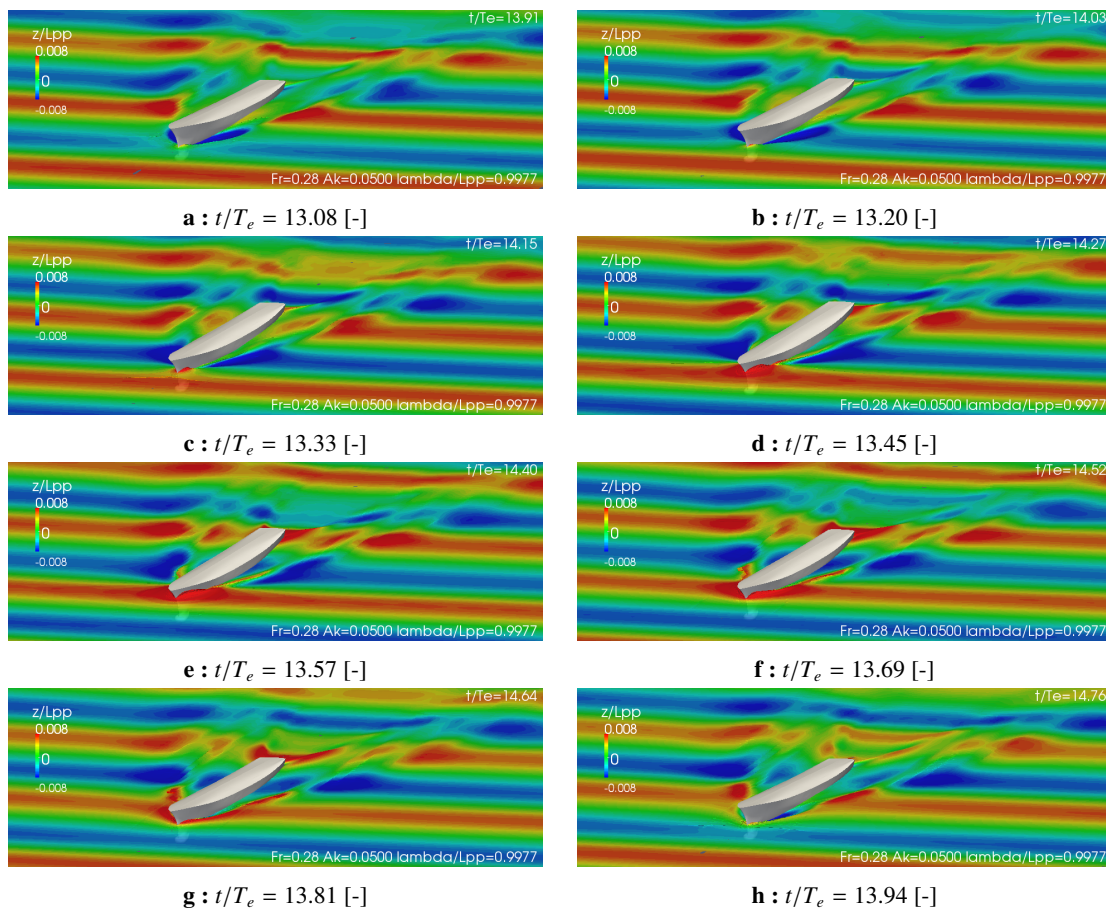
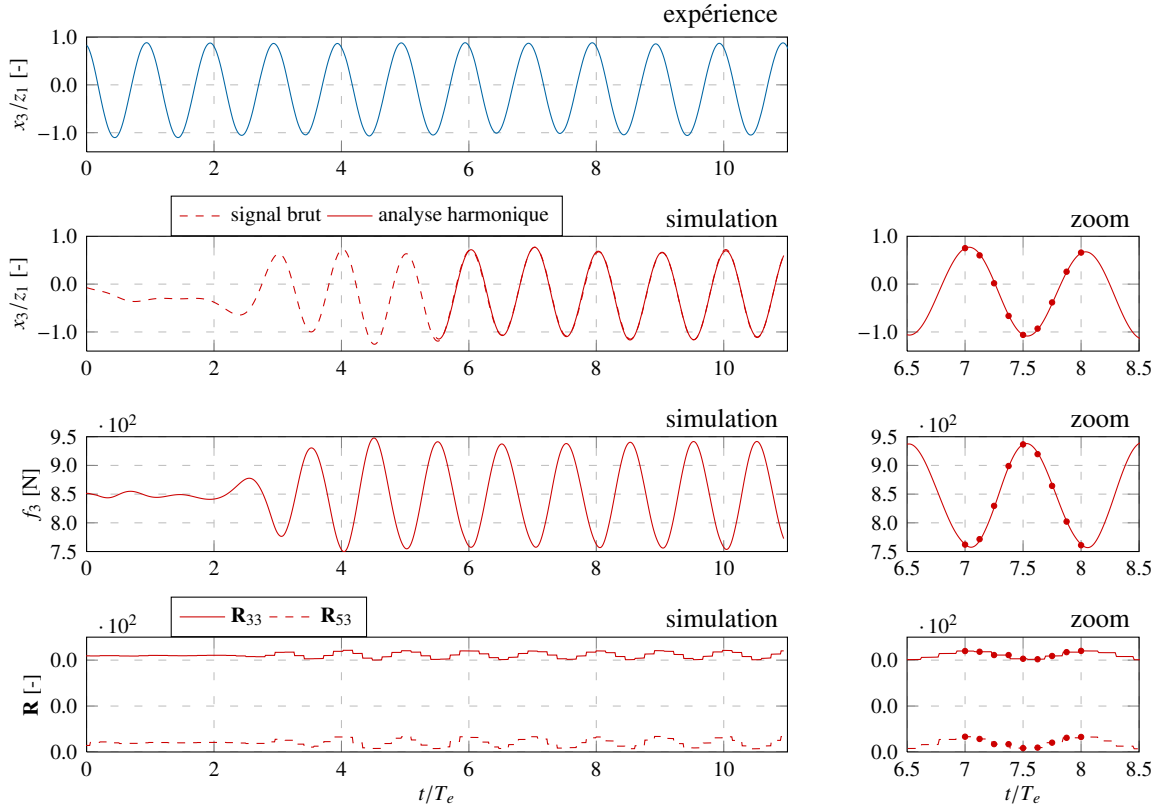
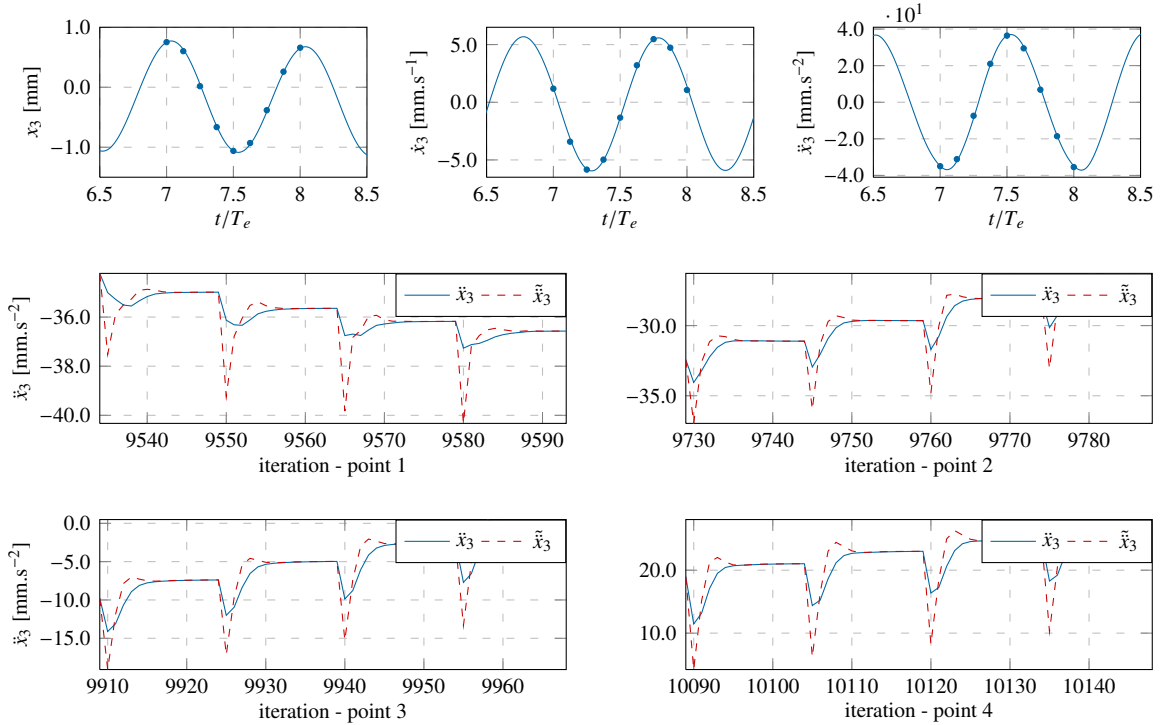


Figure G.6.2.18 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9977$  – Surface libre

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  (1/3)



**Figure G.6.2.19** : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Mouvement de pilonnement



**Figure G.6.2.20** : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  (1/3)

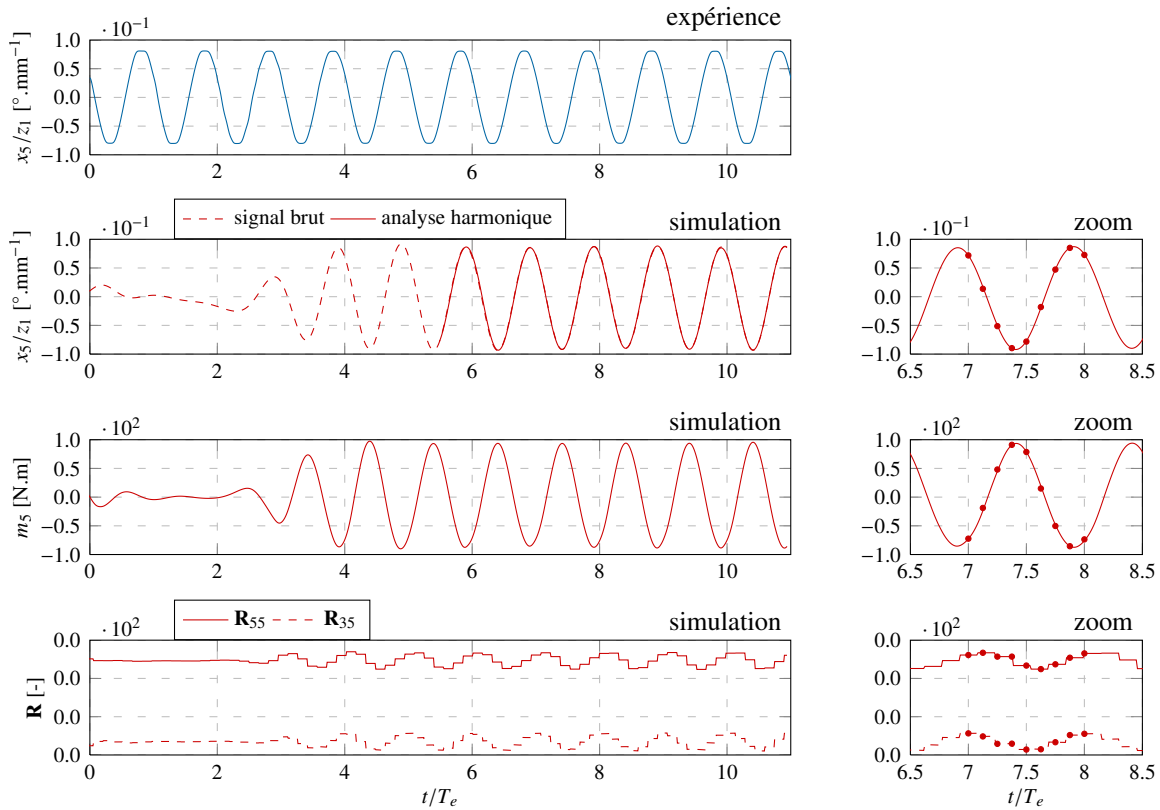


Figure G.6.2.21 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Mouvement de tangage

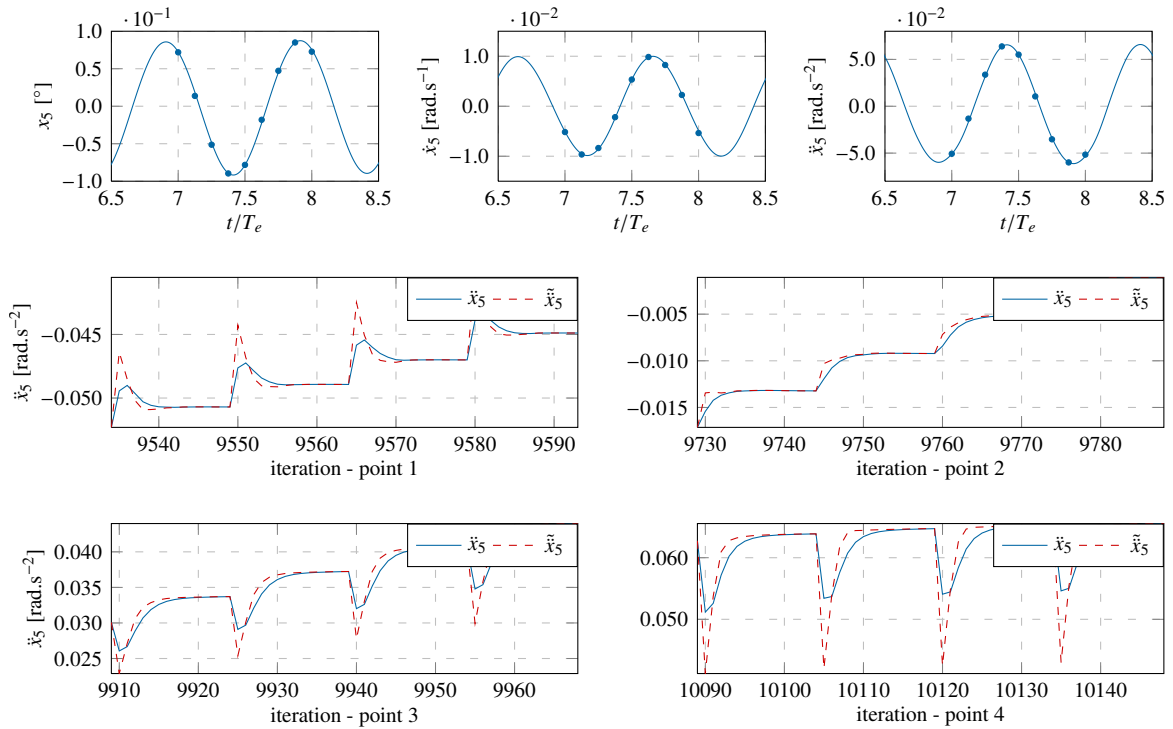


Figure G.6.2.22 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  (3/3)

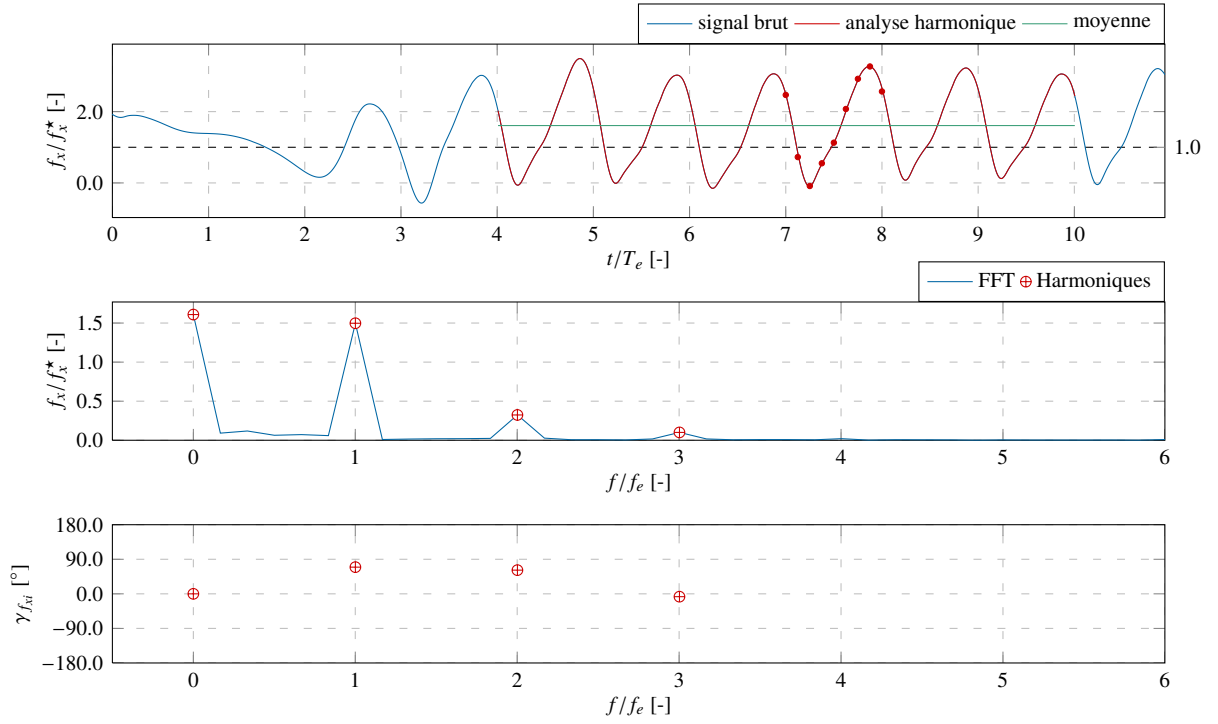


Figure G.6.2.23 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Effort de résistance

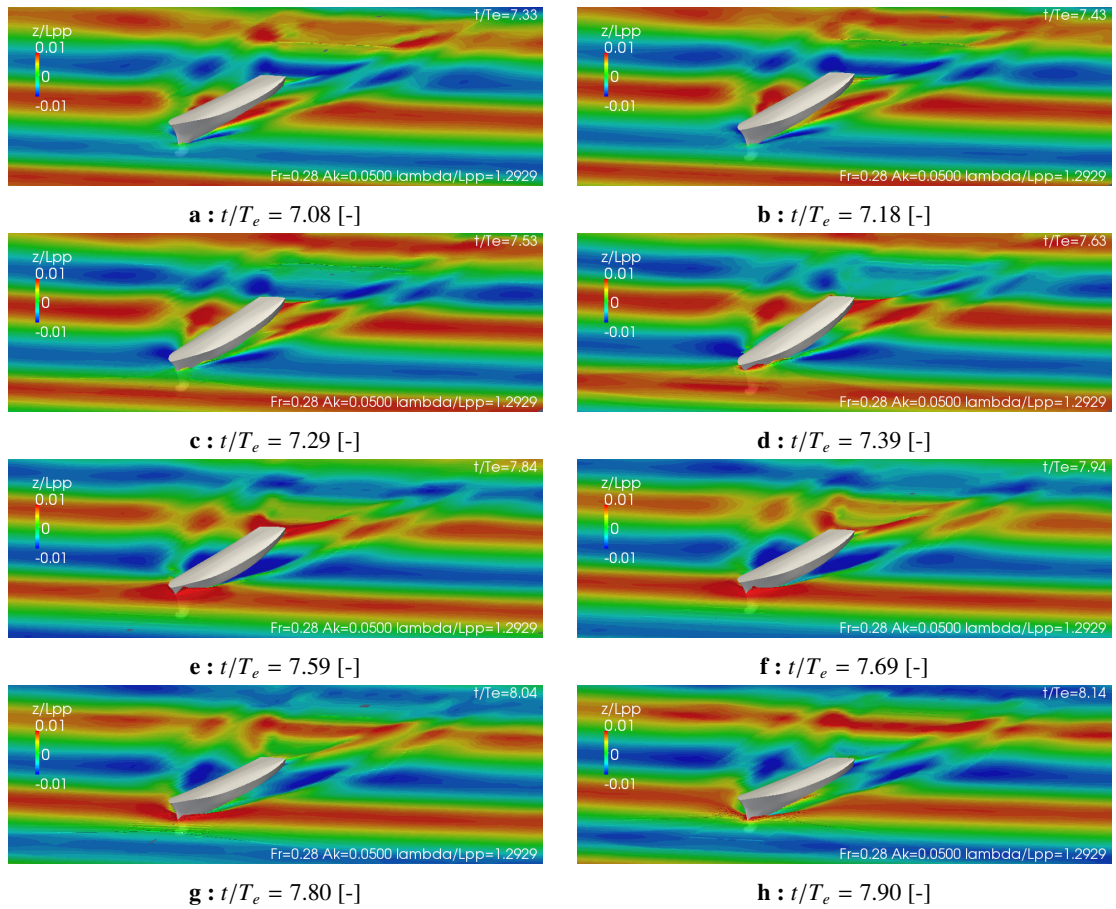
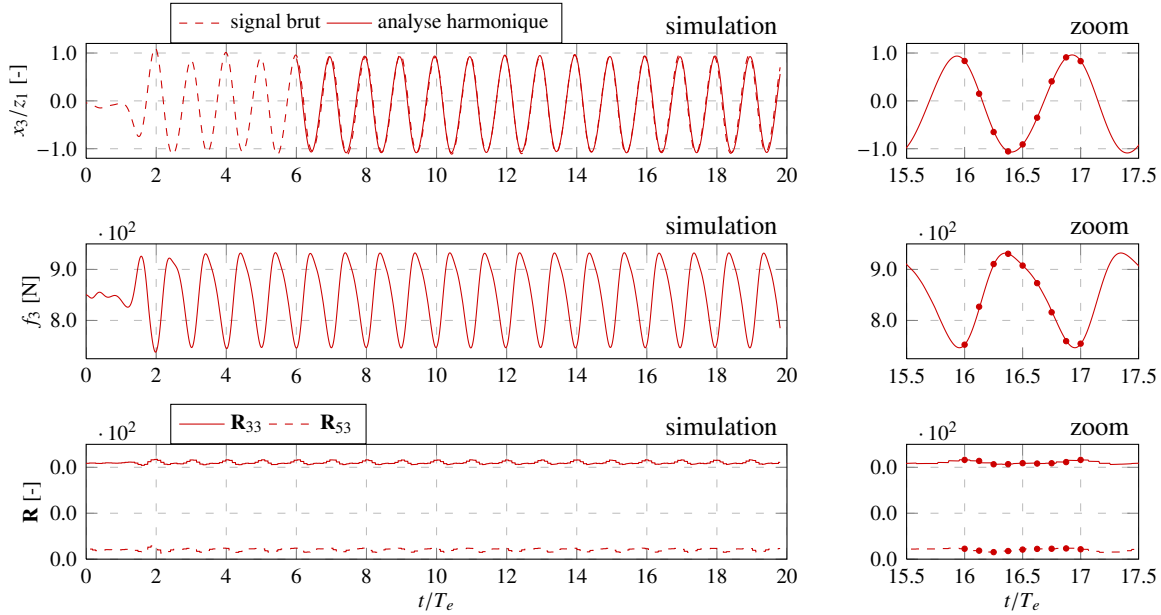
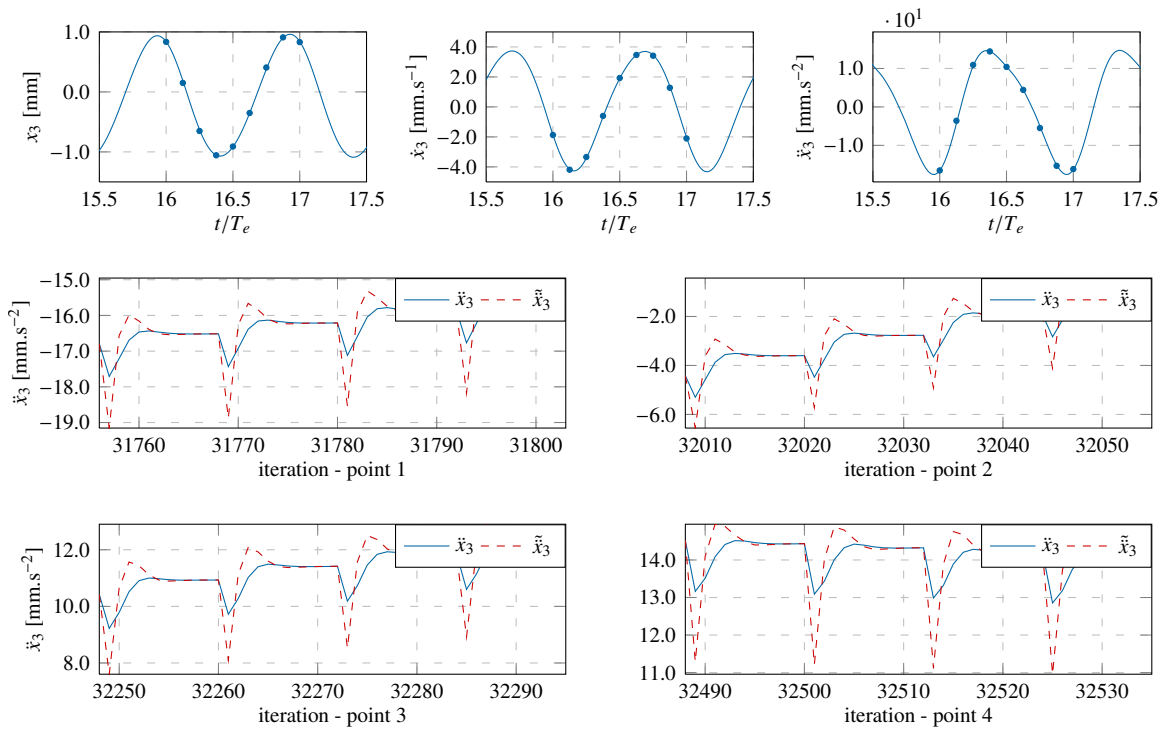


Figure G.6.2.24 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.2929$  – Surface libre

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{PP} = 2.7207$  (1/3)

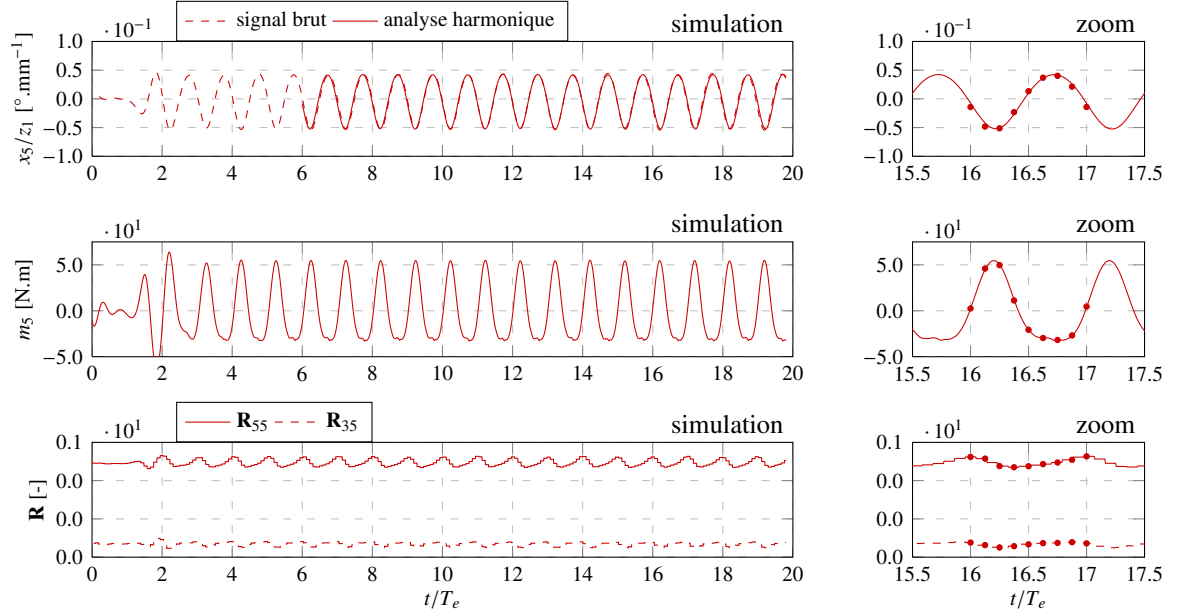


**Figure G.6.2.25 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{PP} = 2.7207$  – Mouvement de pilonnement

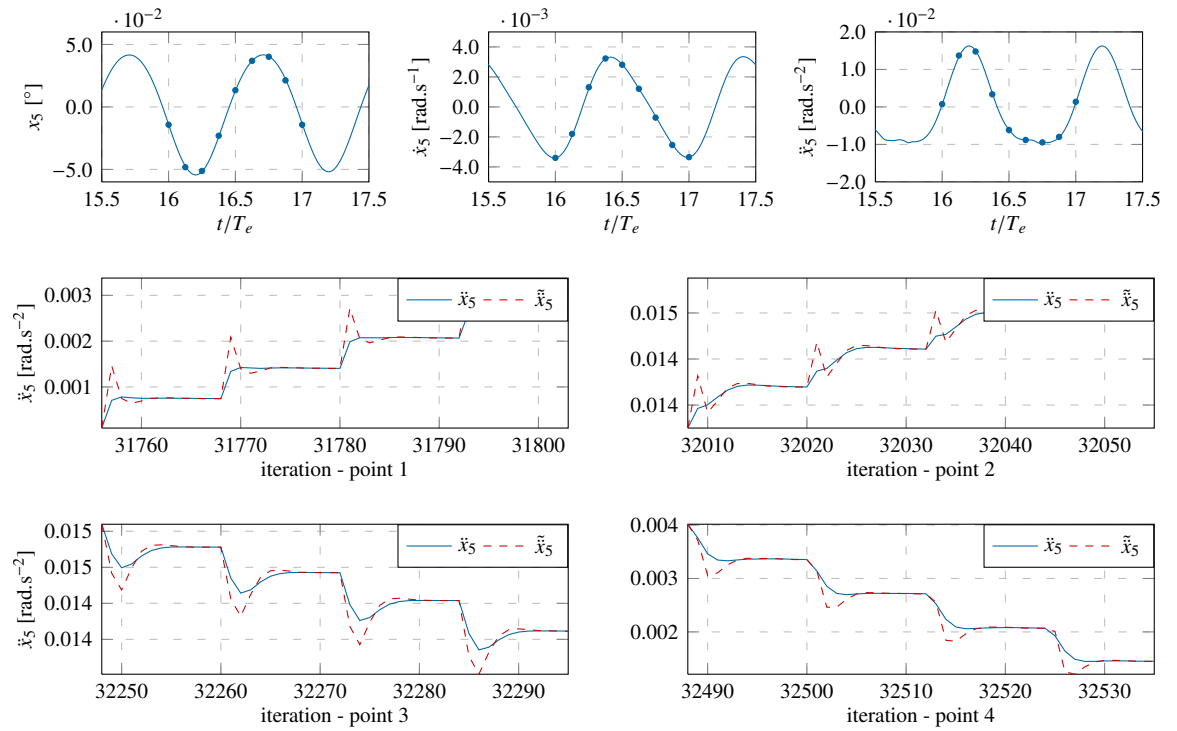


**Figure G.6.2.26 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{PP} = 2.7207$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  (1/3)



**Figure G.6.2.27 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.28 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  – Mouvement de tangage (zoom)



$Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  (3/3)

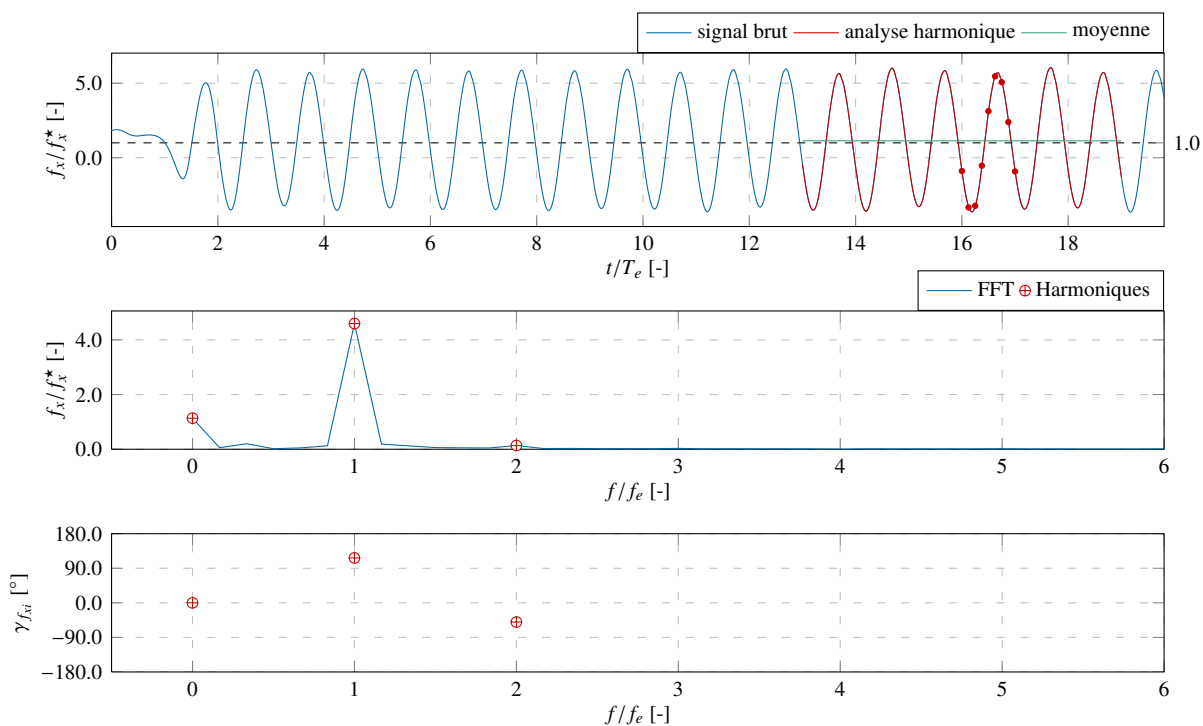


Figure G.6.2.29 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  – Effort de résistance

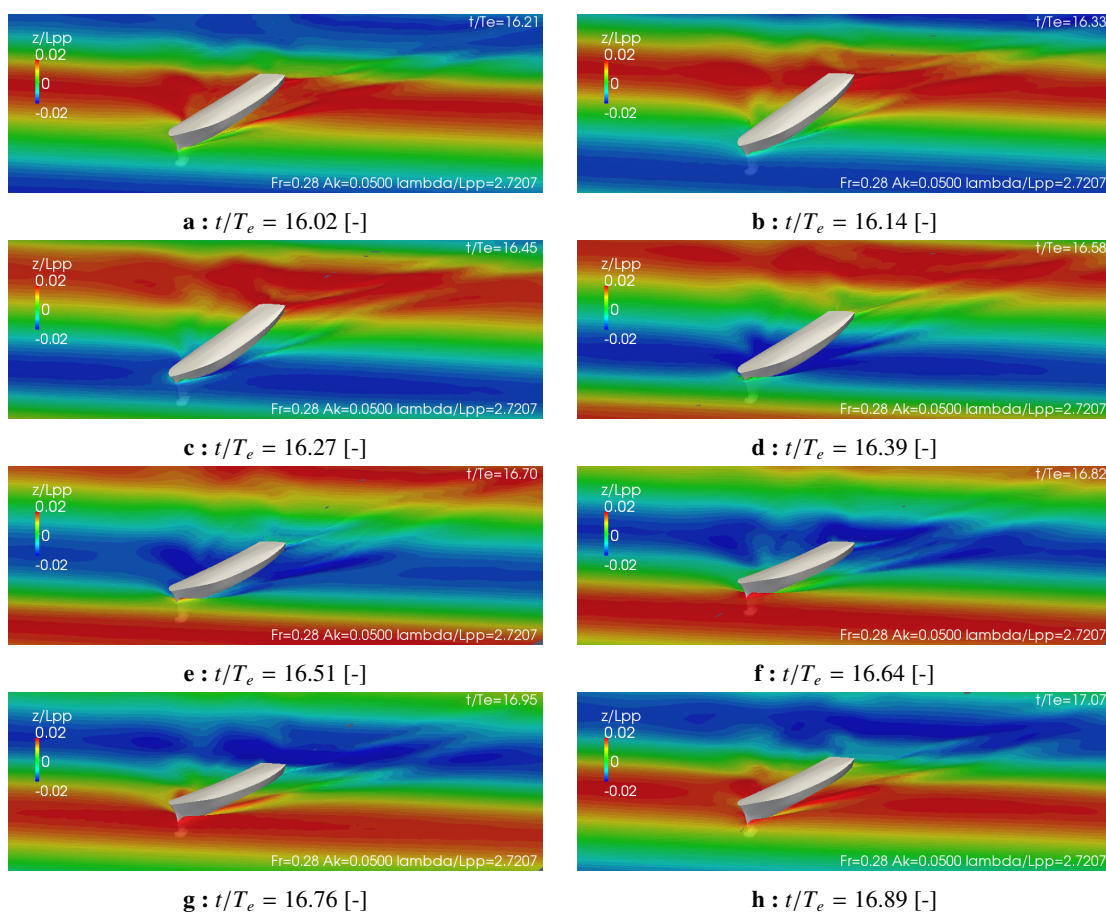
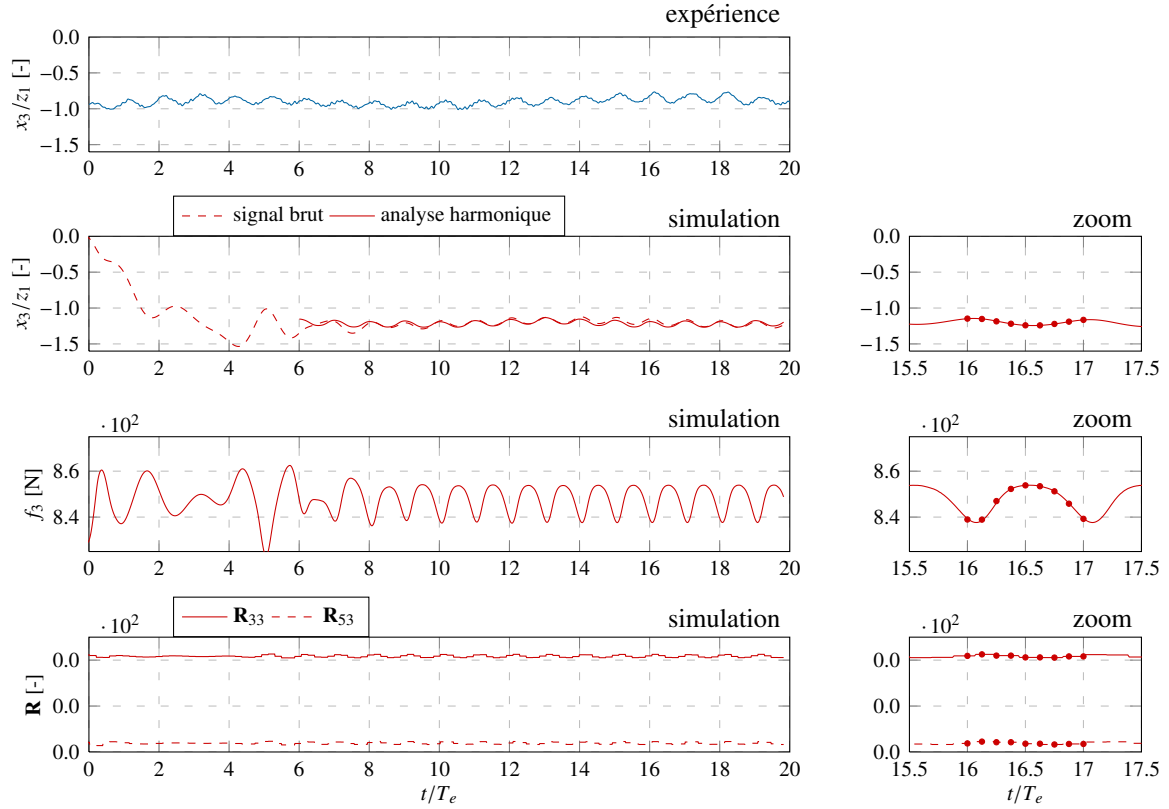
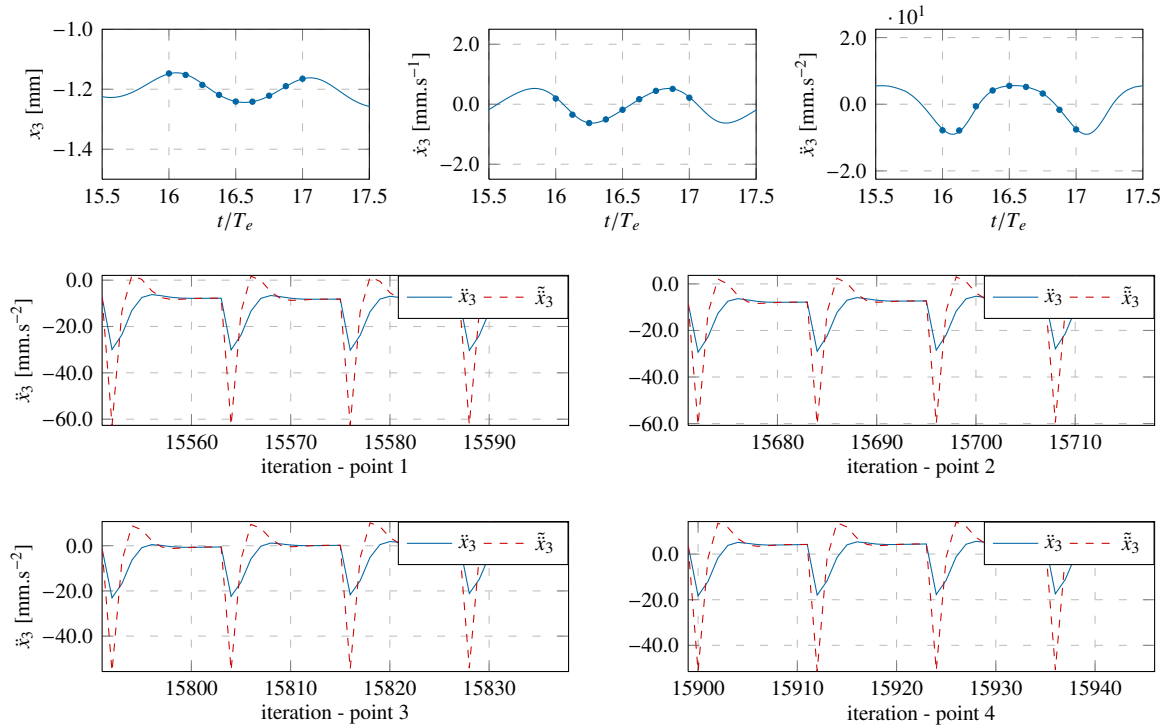


Figure G.6.2.30 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.28$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.7207$  – Surface libre

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  (1/3)

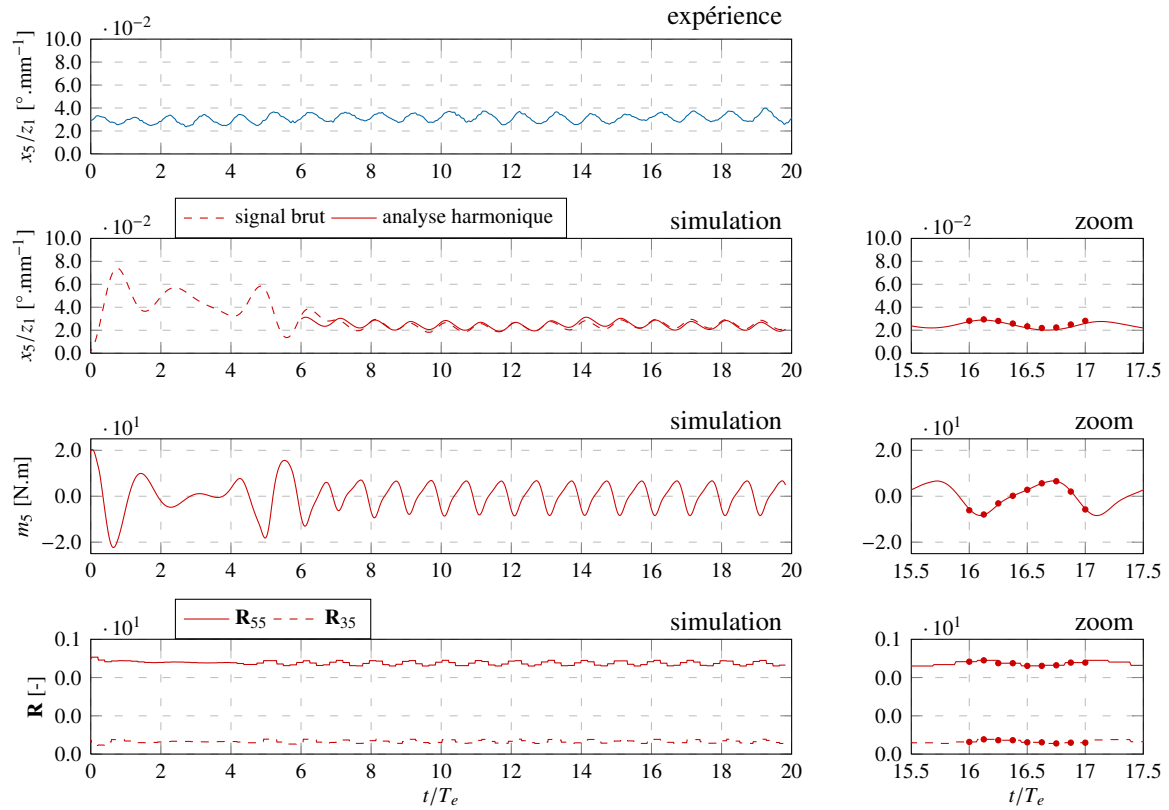


**Figure G.6.2.31** : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Mouvement de pilonnement

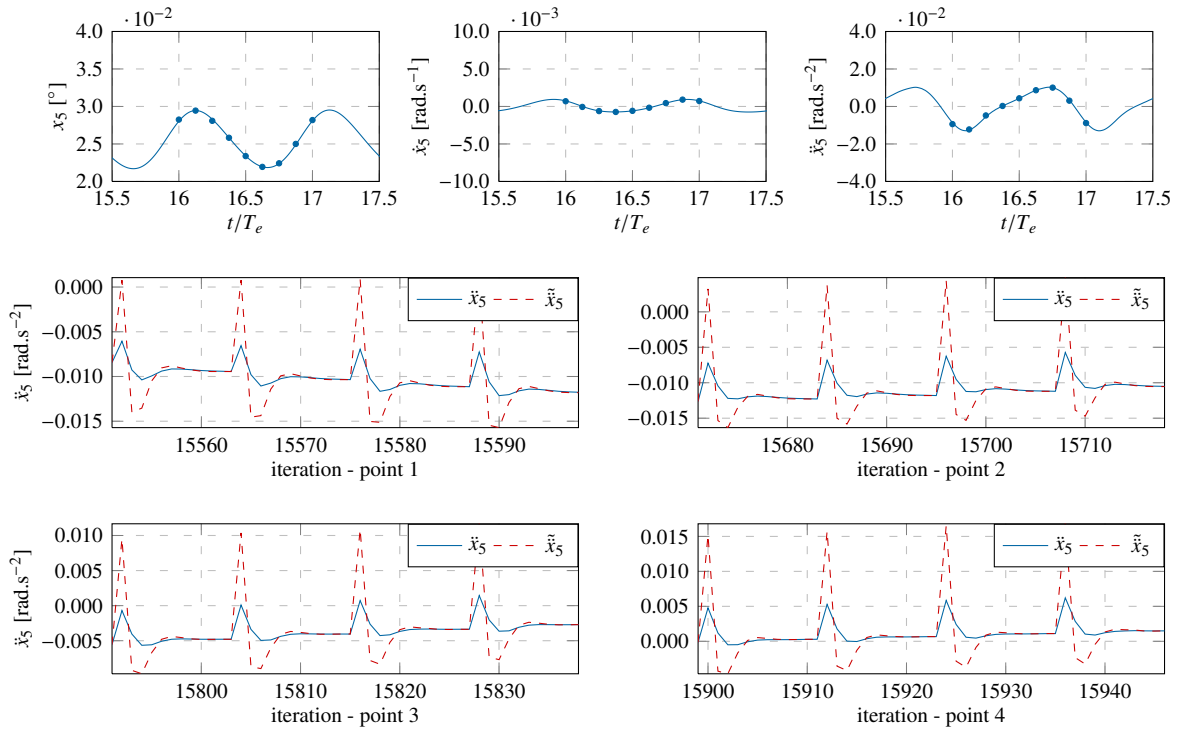


**Figure G.6.2.32** : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  (1/3)



**Figure G.6.2.33 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.34 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  (3/3)

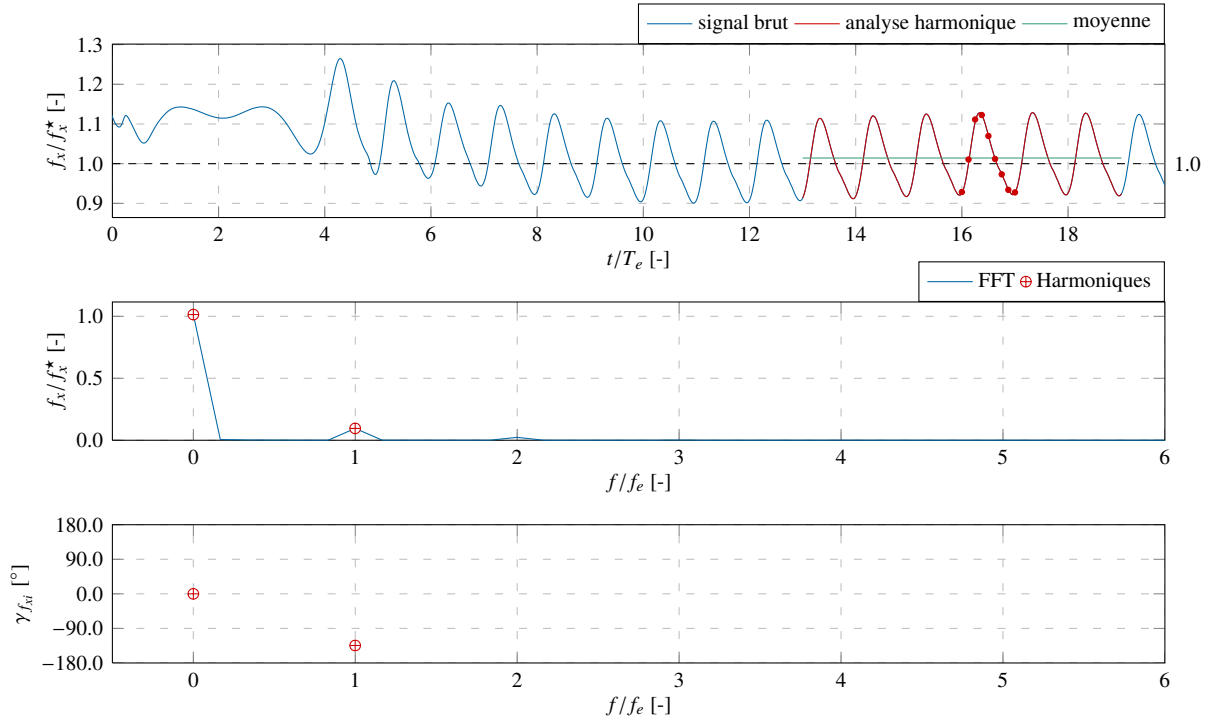


Figure G.6.2.35 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Effort de résistance

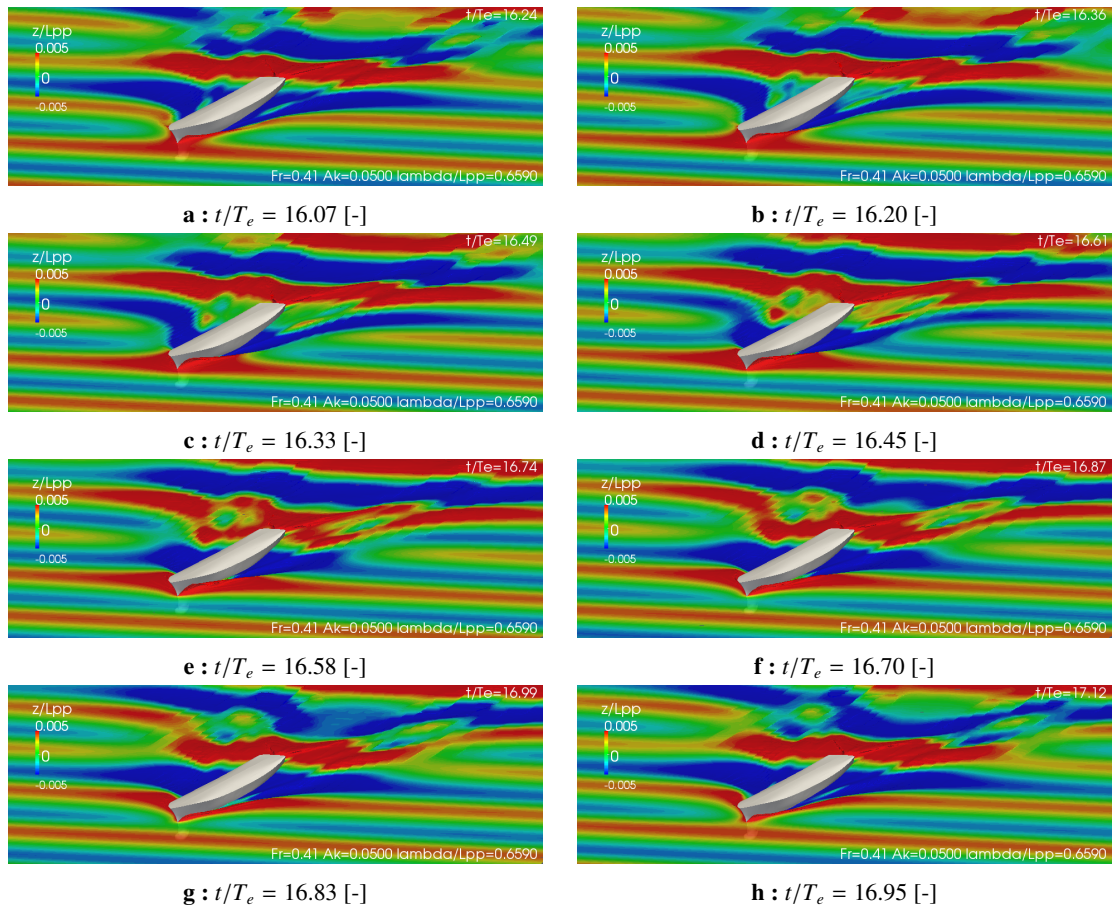
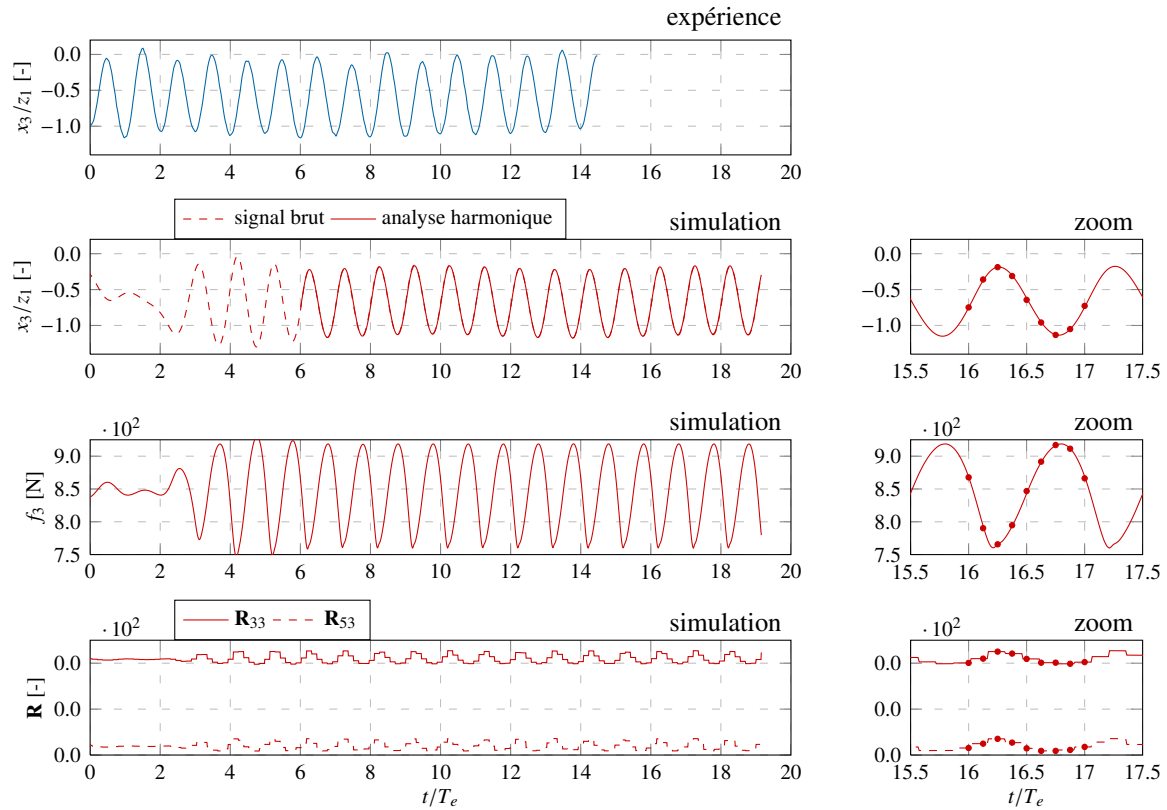
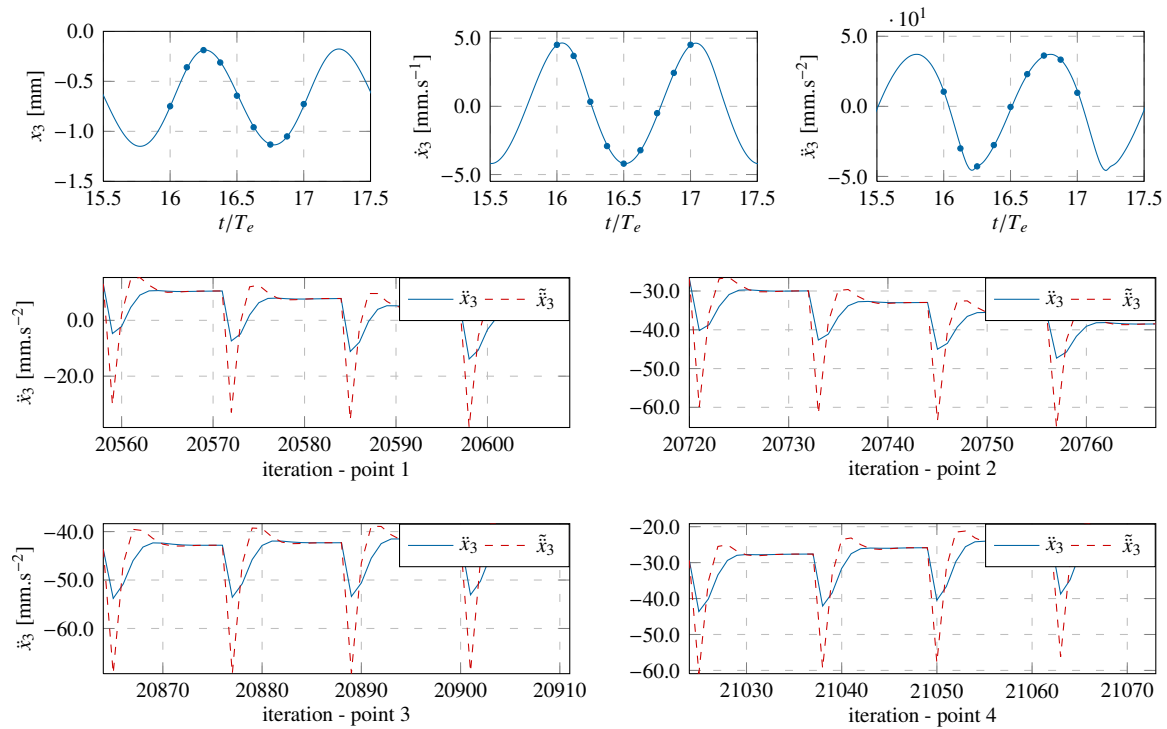


Figure G.6.2.36 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.6590$  – Surface libre

**Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  (1/3)**

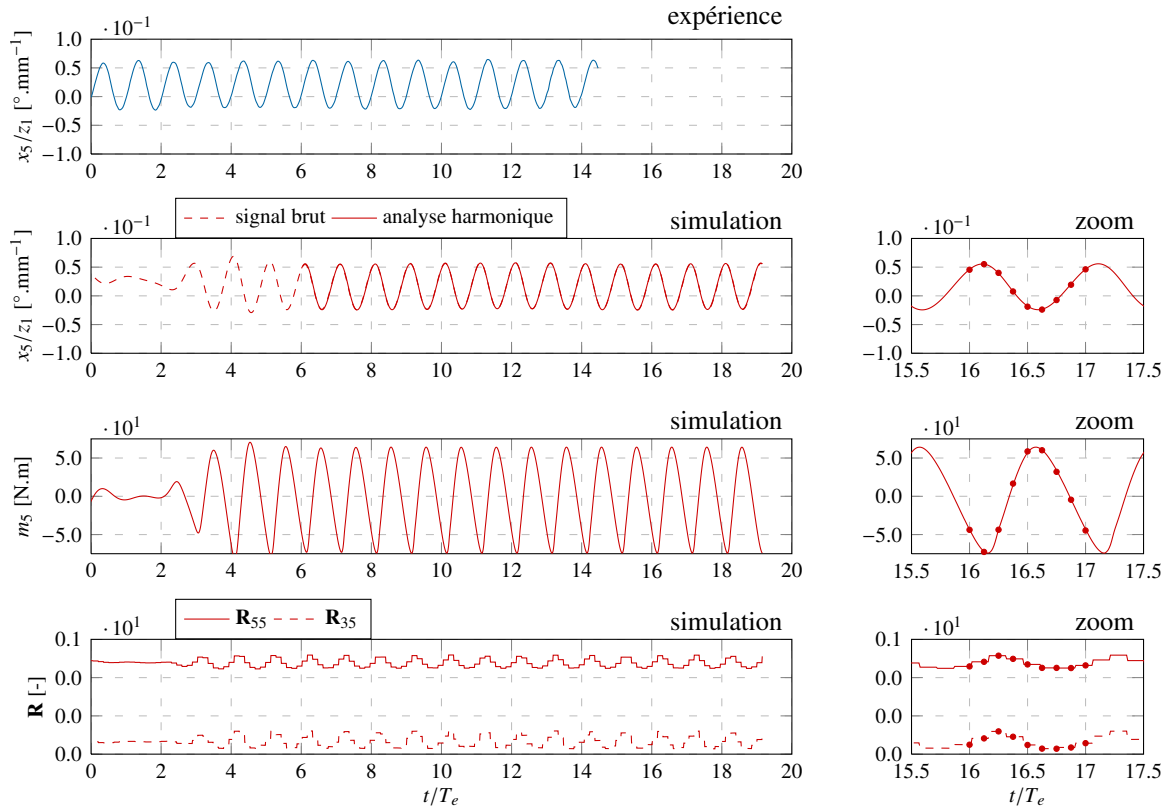


**Figure G.6.2.37 :** DTMB 5512 – Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Mouvement de pilonnement

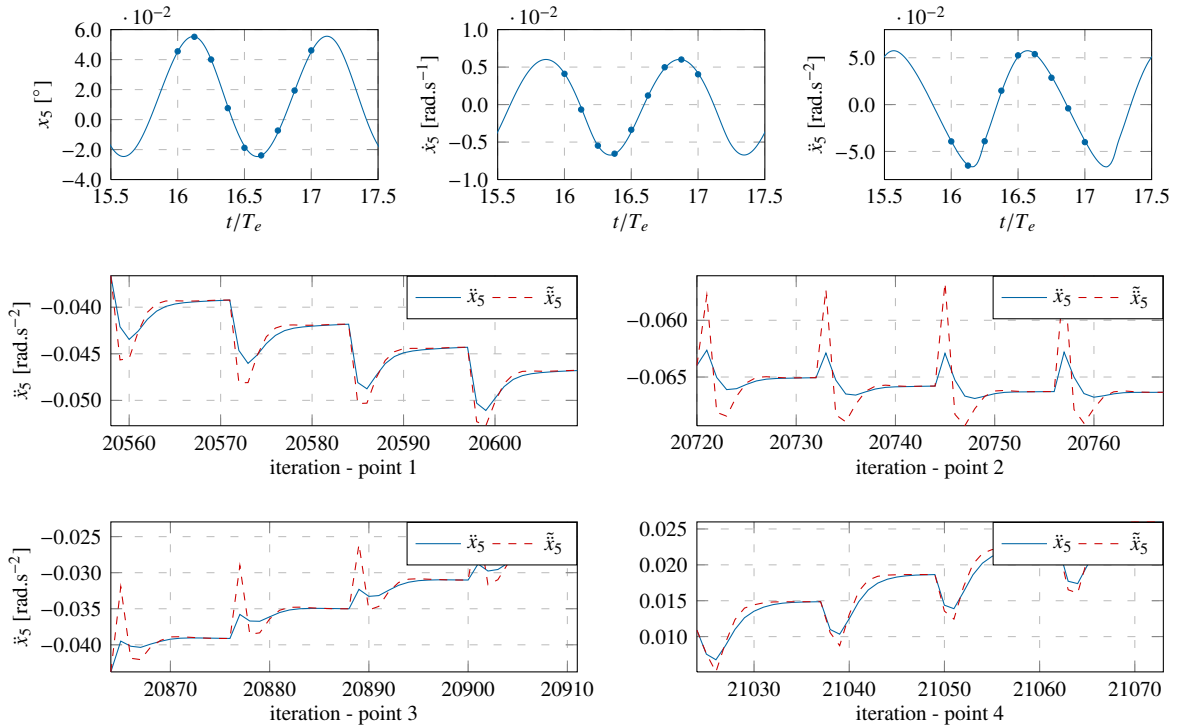


**Figure G.6.2.38 :** DTMB 5512 – Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  (1/3)



**Figure G.6.2.39 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.40 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Mouvement de tangage (zoom)



$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  (3/3)

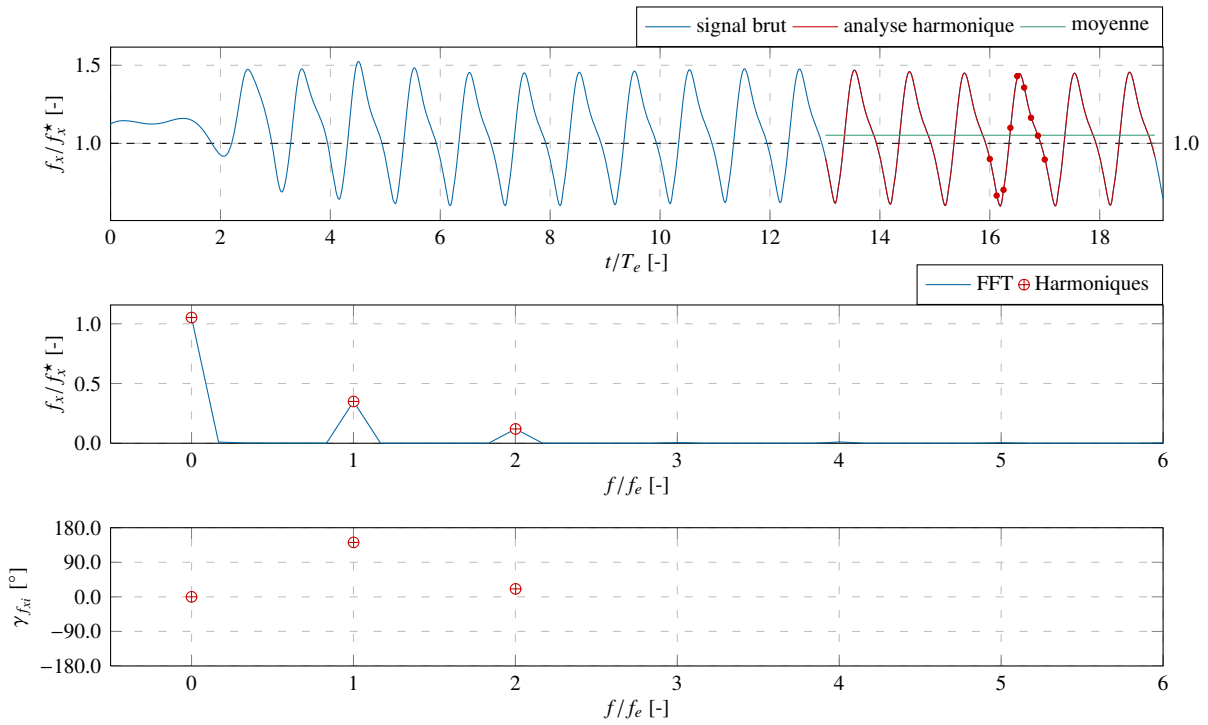


Figure G.6.2.41 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Effort de résistance

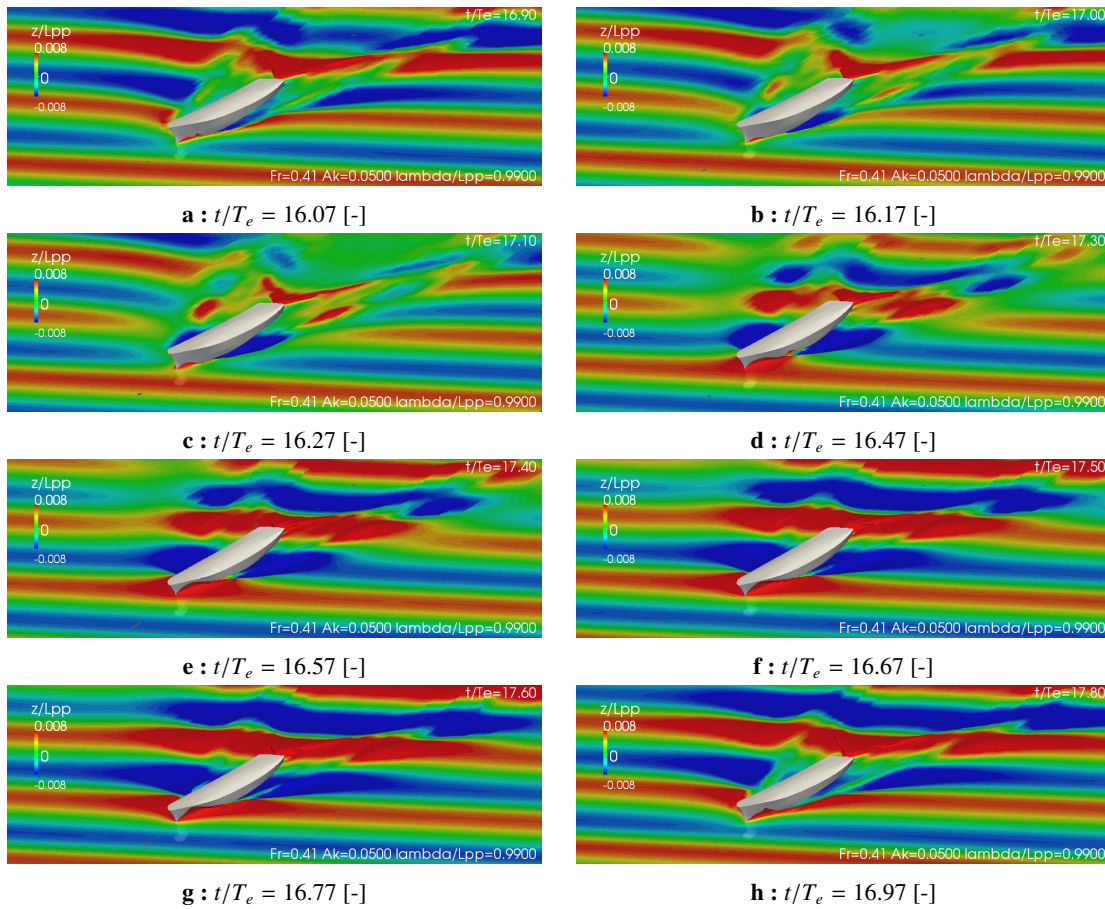
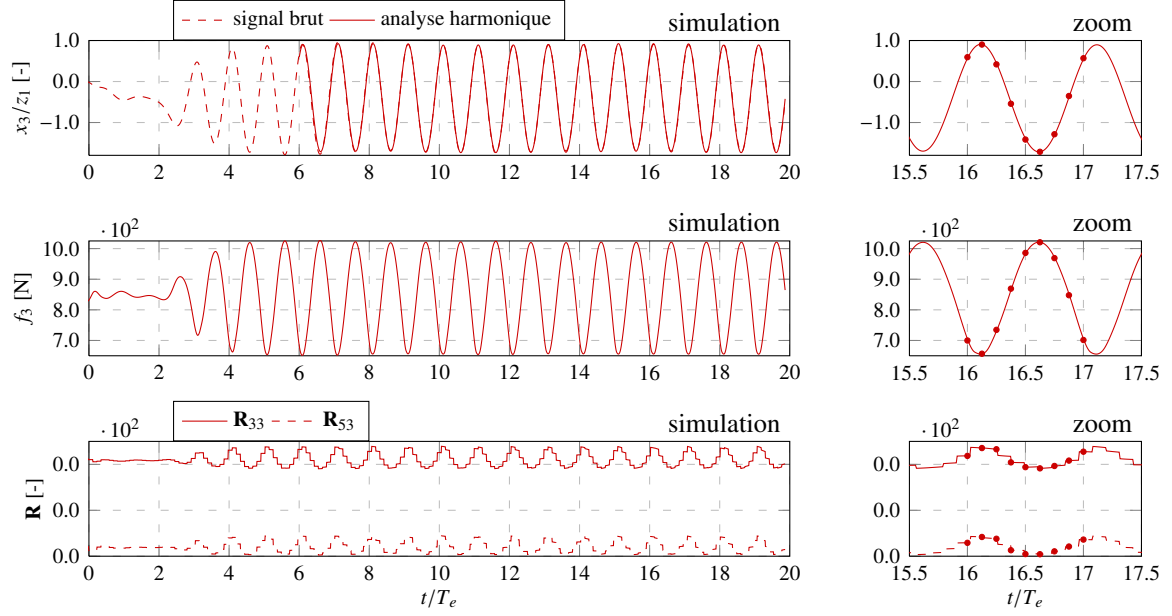
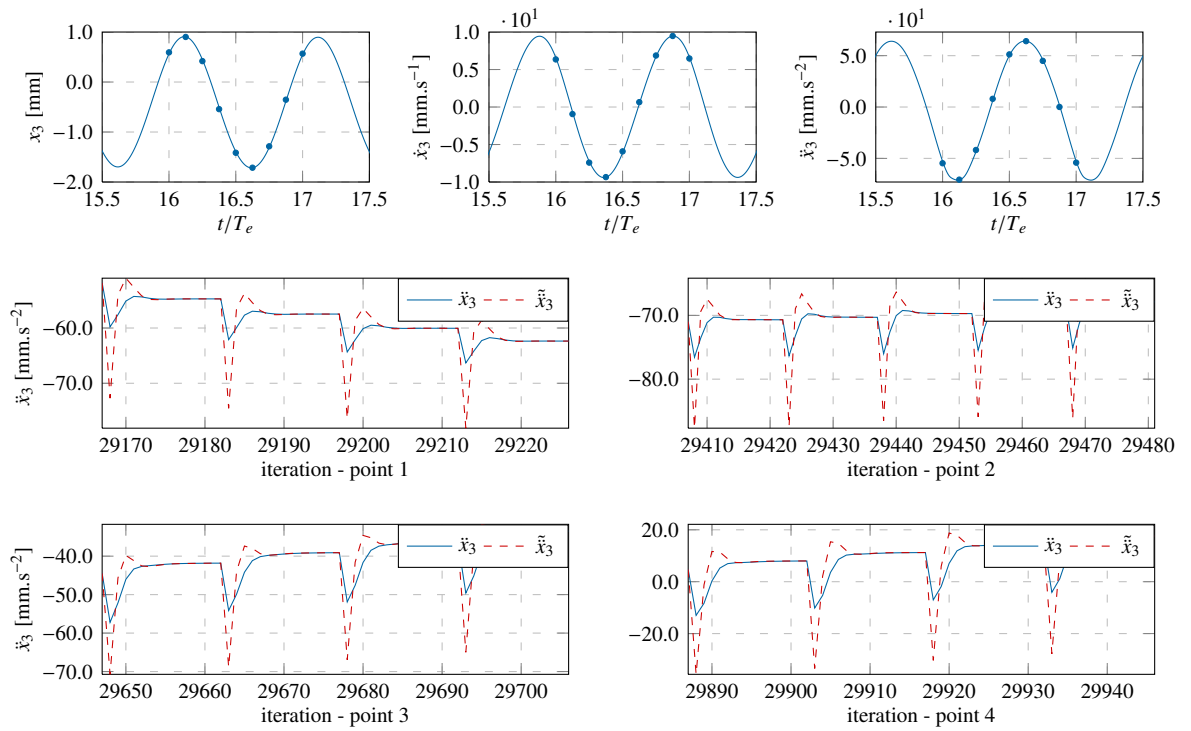


Figure G.6.2.42 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 0.9900$  – Surface libre

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  (1/3)



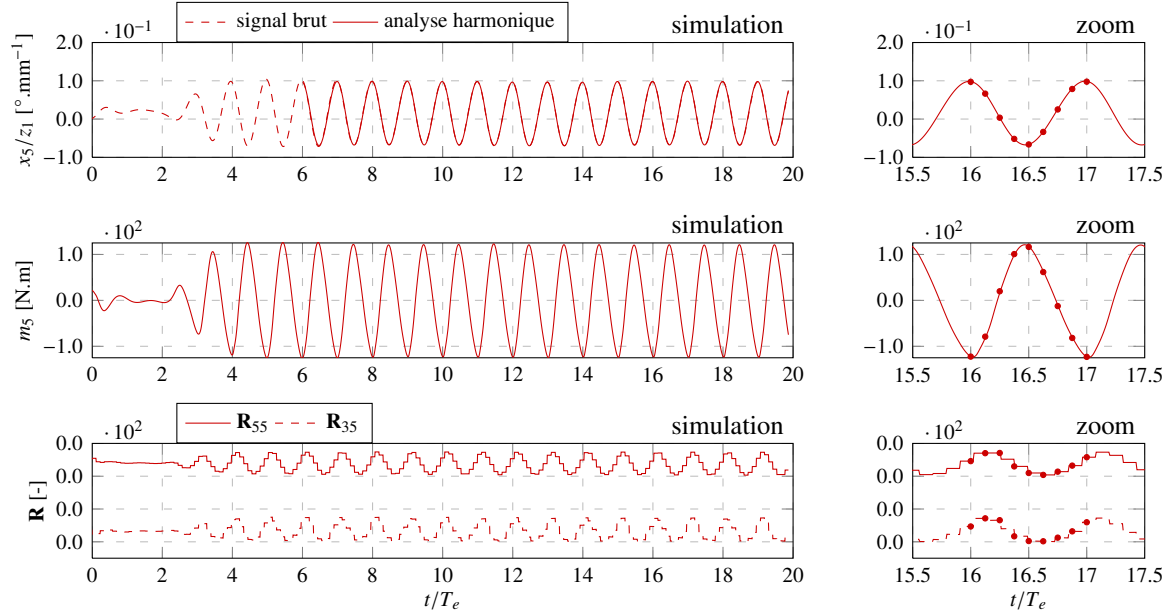
**Figure G.6.2.43 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Mouvement de pilonnement



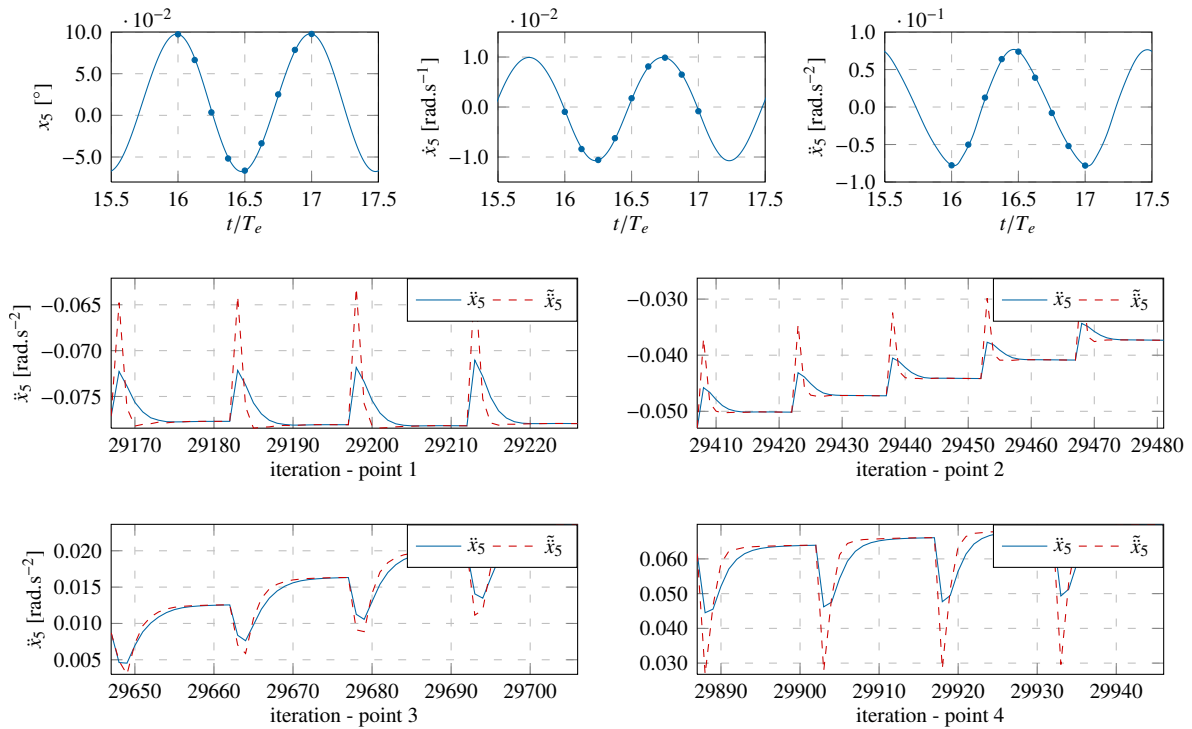
**Figure G.6.2.44 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Mouvement de pilonnement (zoom)



**Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  (1/3)**



**Figure G.6.2.45 :** DTMB 5512 – Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.46 :** DTMB 5512 – Fr = 0.41,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  (3/3)

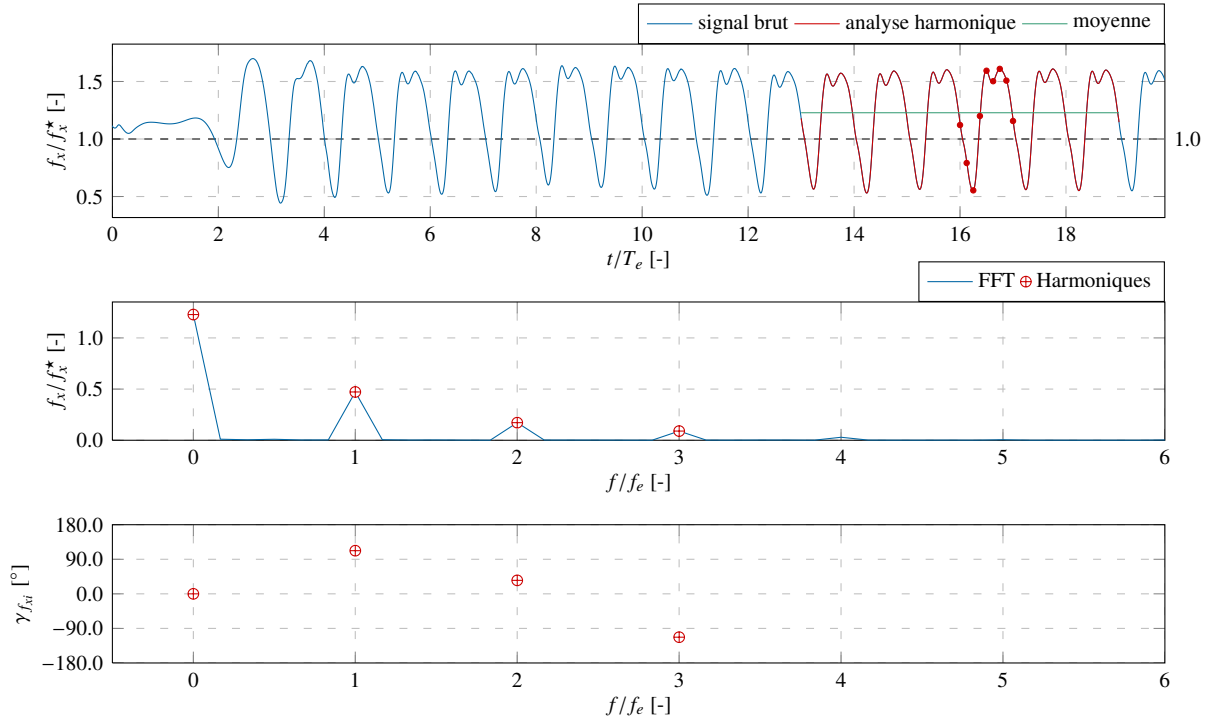


Figure G.6.2.47 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Effort de résistance

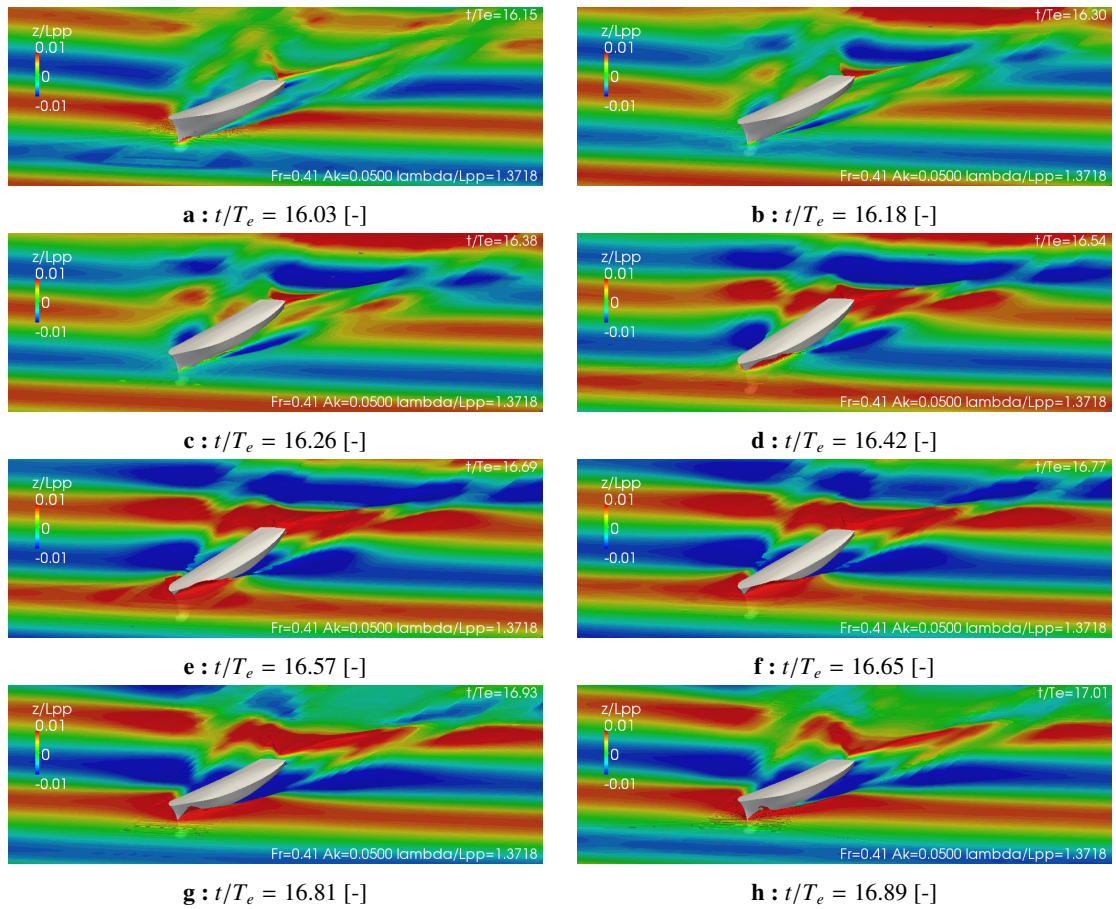


Figure G.6.2.48 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 1.3718$  – Surface libre

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  (1/3)

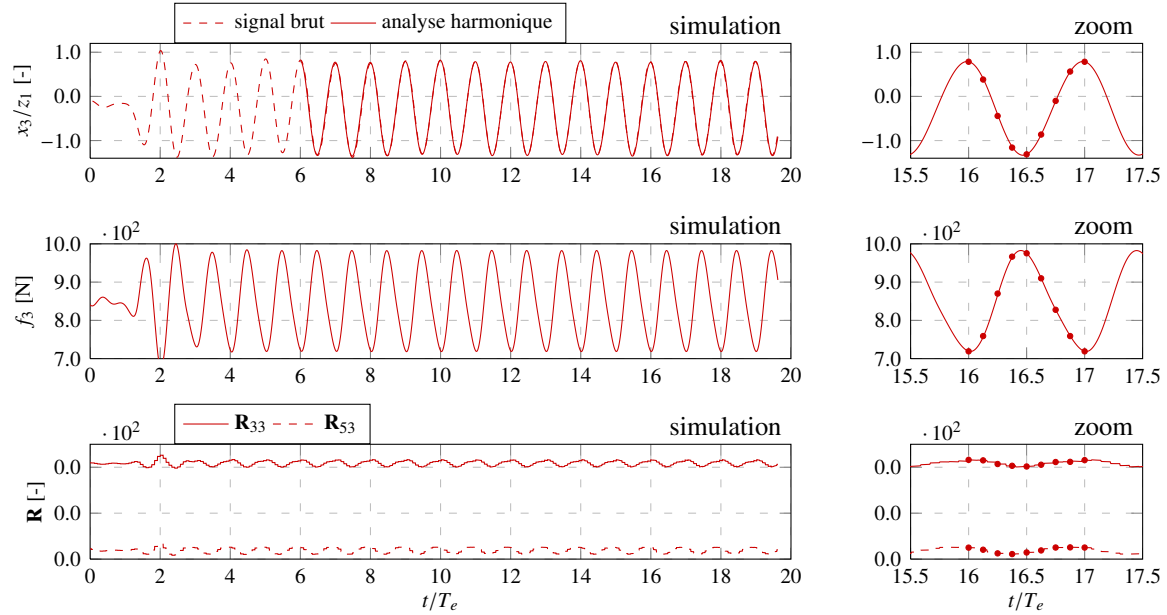


Figure G.6.2.49 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Mouvement de pilonnement

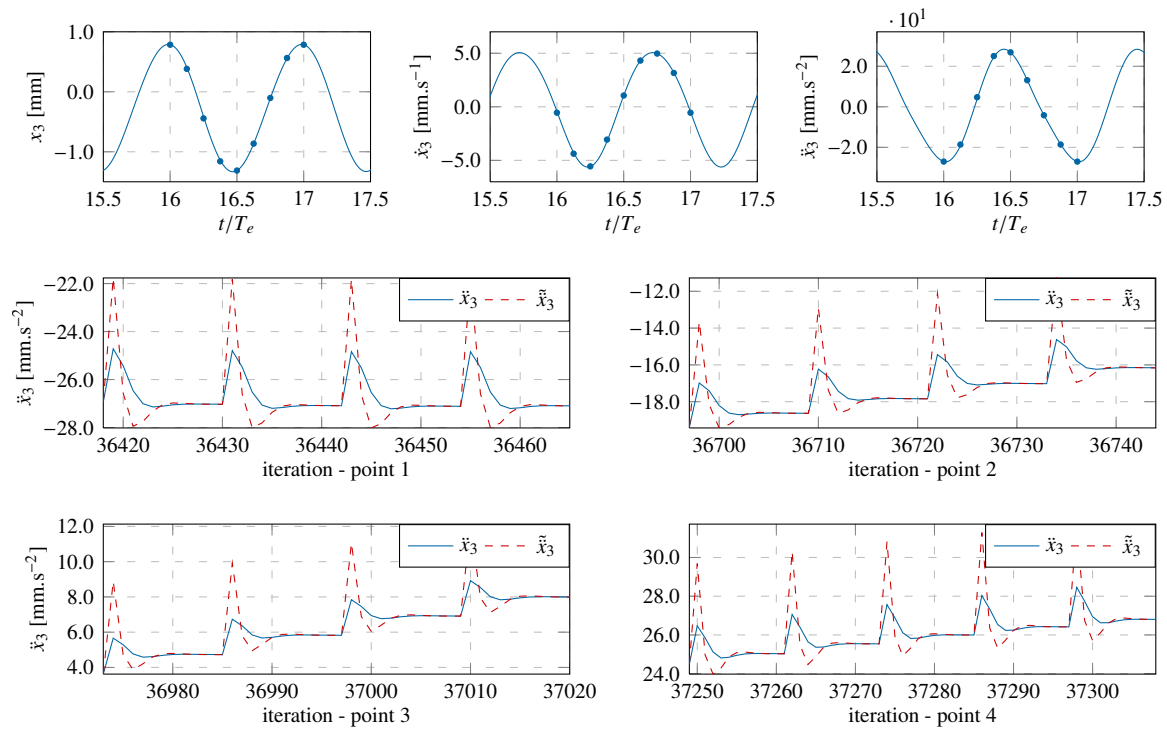
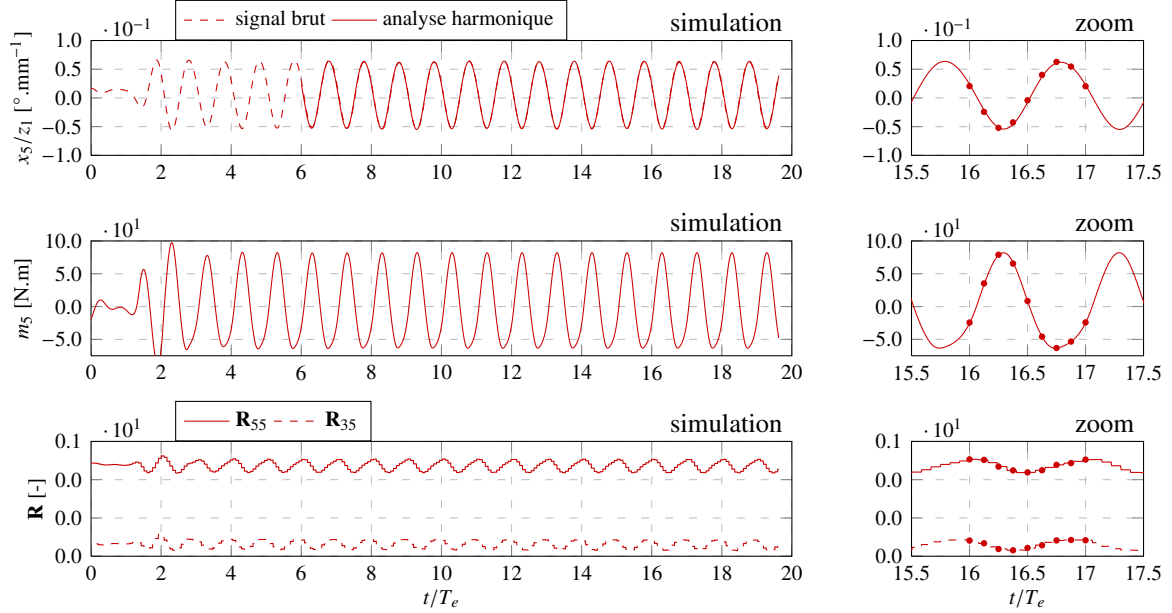
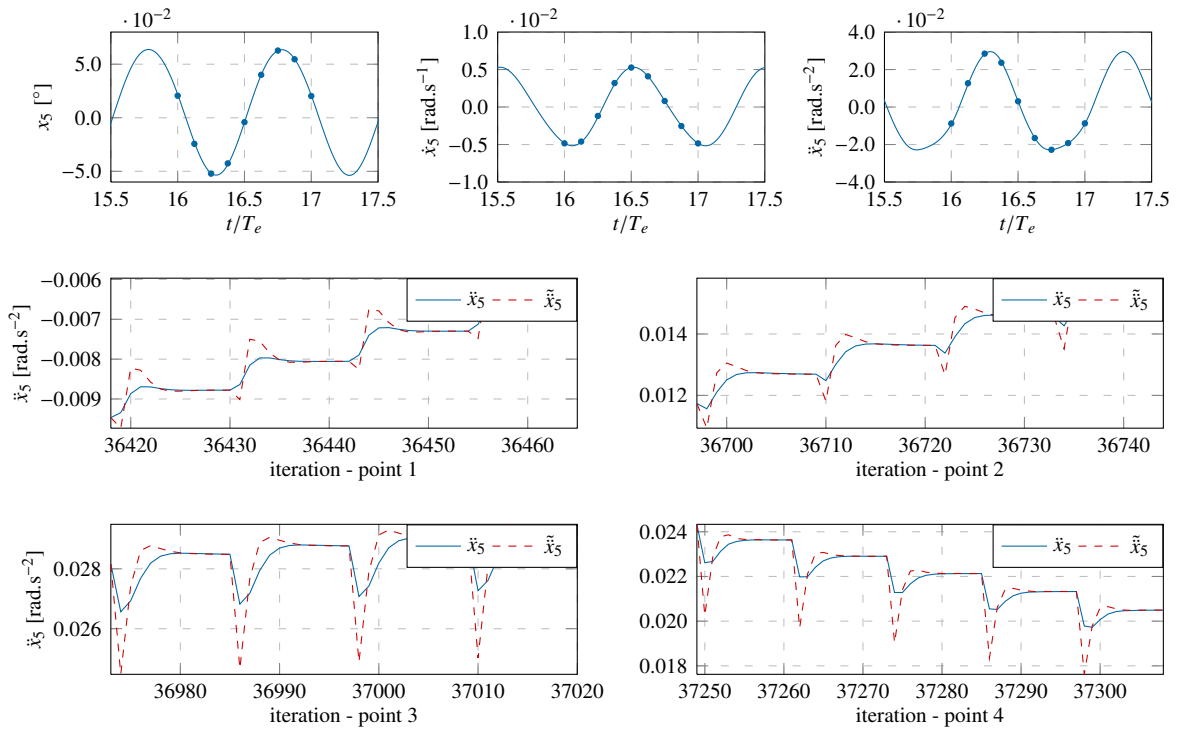


Figure G.6.2.50 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Mouvement de pilonnement (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  (1/3)



**Figure G.6.2.51 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Mouvement de tangage



**Figure G.6.2.52 :** DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Mouvement de tangage (zoom)

$Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  (3/3)

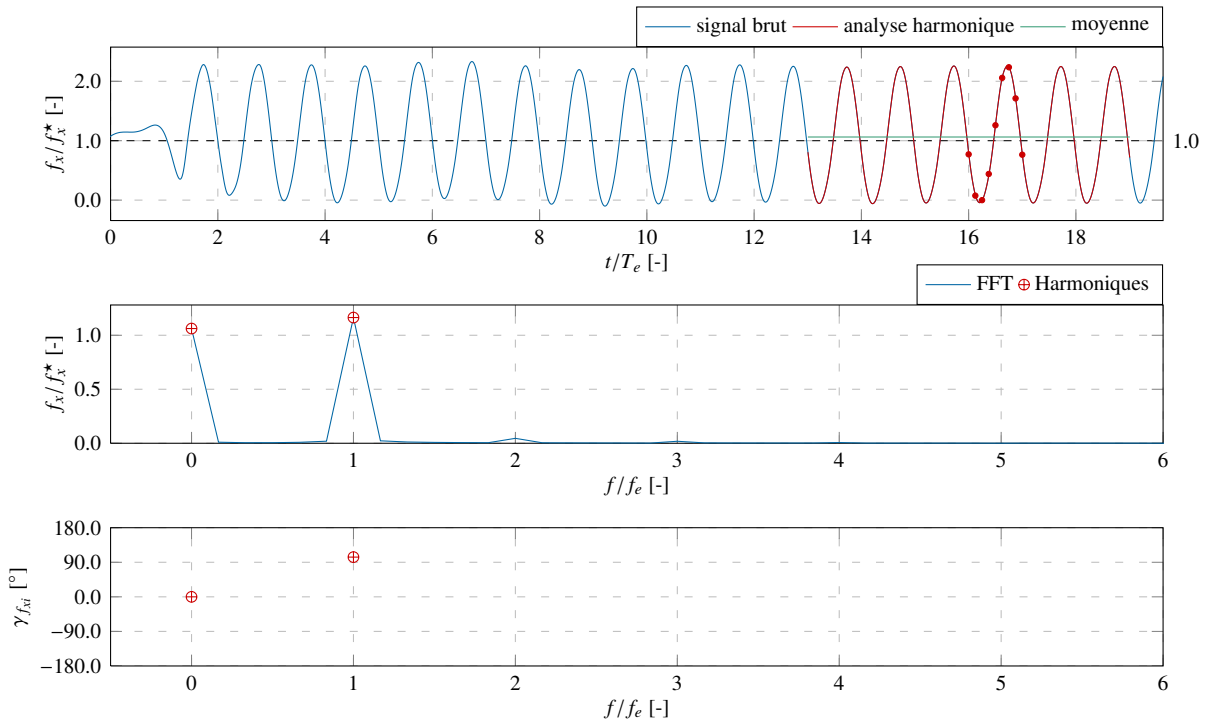


Figure G.6.2.53 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Effort de résistance

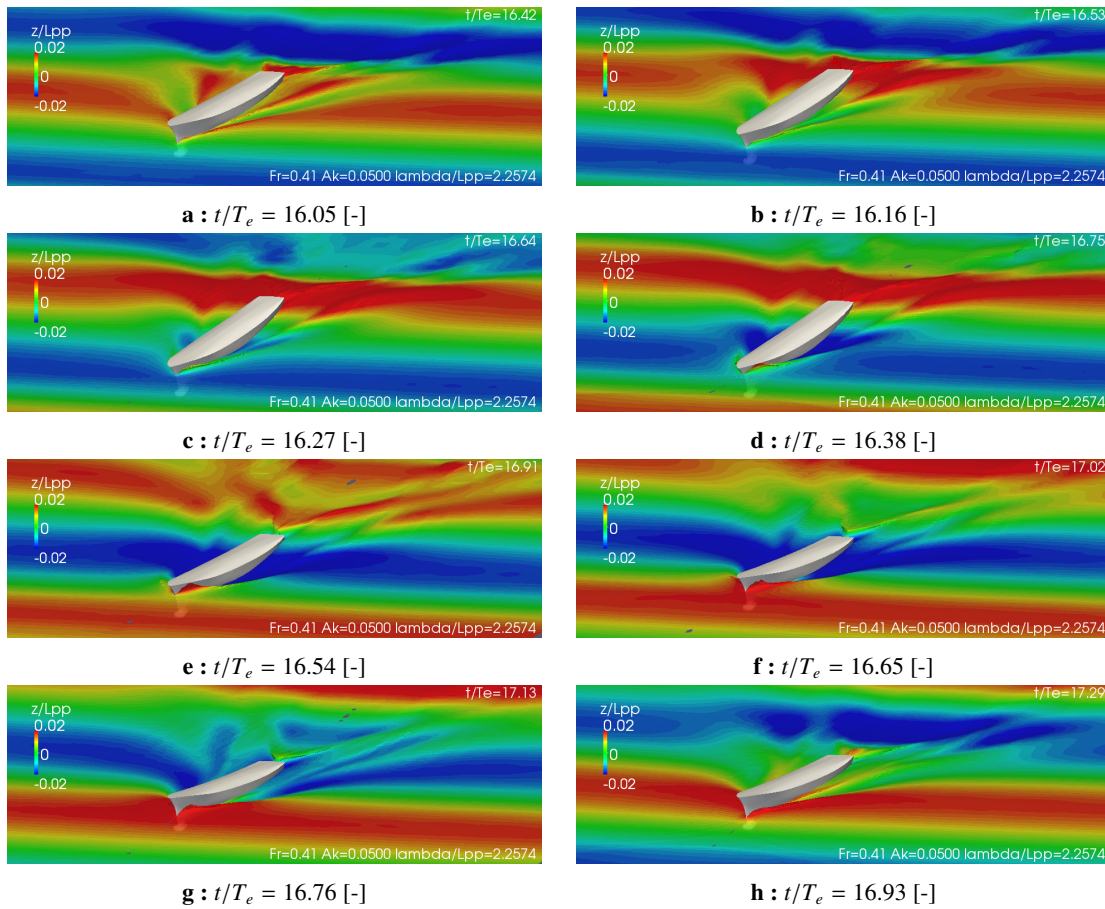


Figure G.6.2.54 : DTMB 5512 –  $Fr = 0.41$ ,  $A_k = 0.0500$ ,  $\lambda/L_{pp} = 2.2574$  – Surface libre

### G.6.3 Des parallélépipèdes de faible densité

#### G.6.3.1 Géométrie

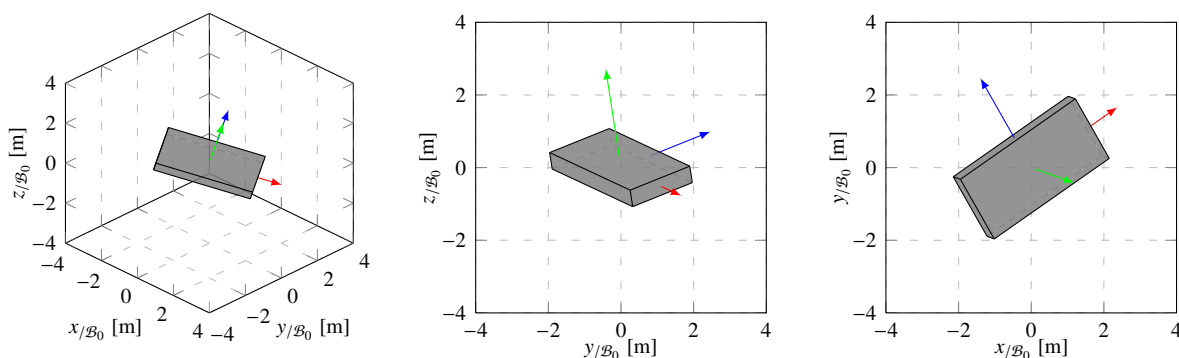


Figure G.6.3.1 : Cas 1 – Géométrie et position initiale

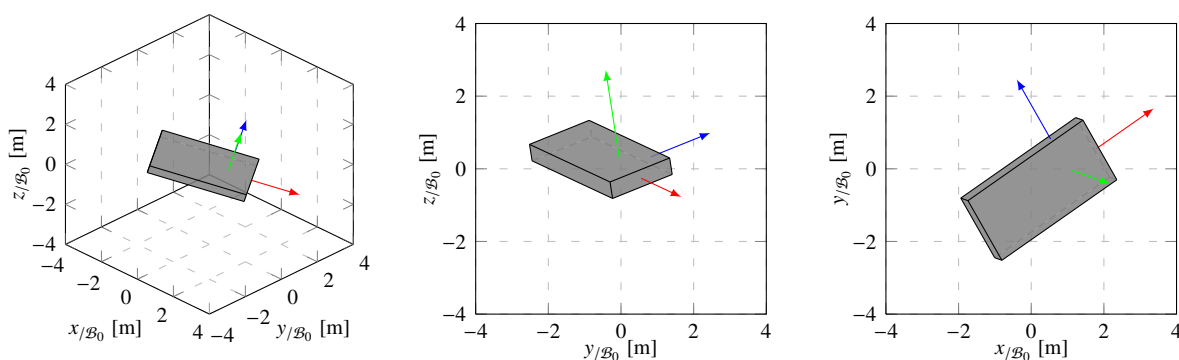


Figure G.6.3.2 : Cas 2 – Géométrie et position initiale

#### G.6.3.2 Répartition longitudinale de la masse volumique

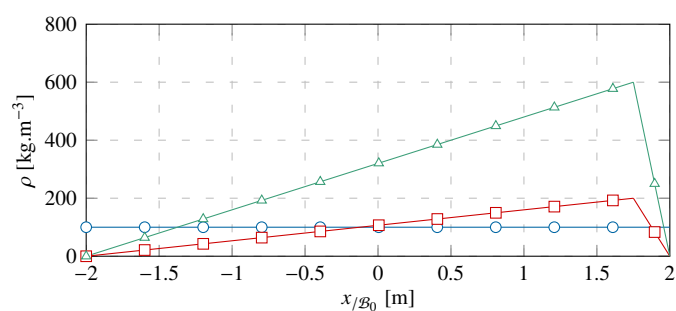


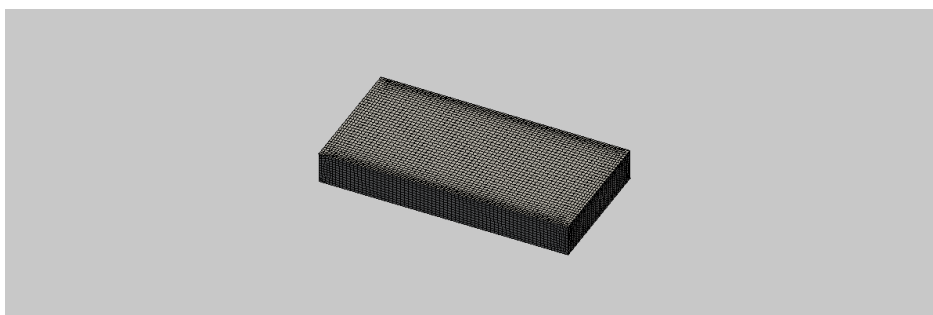
Figure G.6.3.3 : Parallélépipèdes – Répartition longitudinale de la masse volumique : —○— parallélépipède 1  $d_e = 0.1$ , —□— parallélépipèdes 2  $d_e = 0.1$  et —△— parallélépipèdes 2  $d_e = 0.3$

### G.6.3.3 Maillage

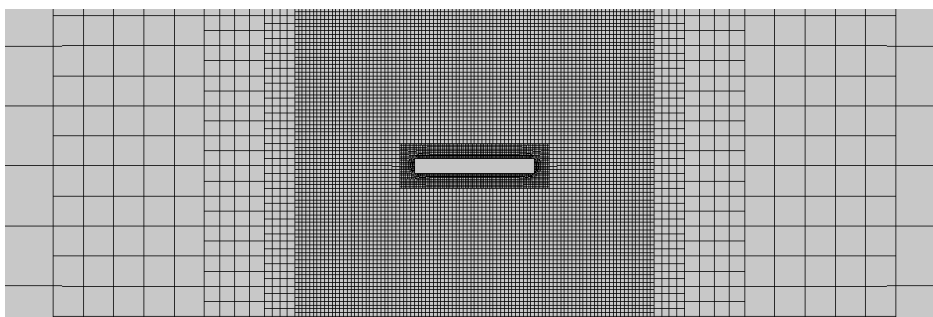
Le maillage de référence utilisé pour l'étude des parallélépipèdes de faible densité est présenté ci-dessous. Le nombre de cellules est fourni dans le tableau ci-dessous.

Descriptif	Nb. cellules
Maillage 1	1 068 806

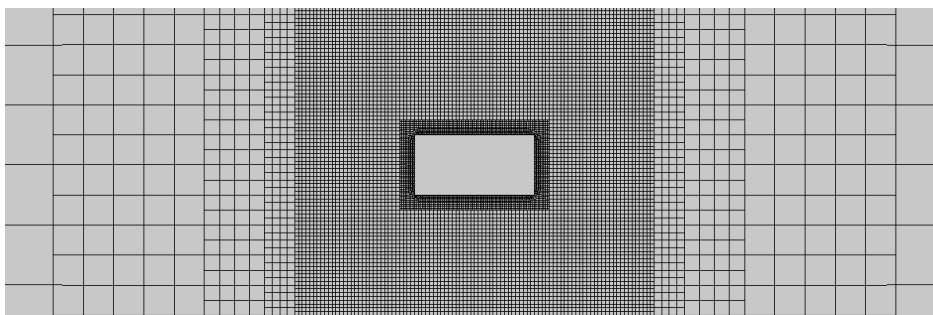
**Tableau G.6.3.1 : Parallélépipèdes – Information sur le maillage**



**Figure G.6.3.4 : Parallélépipèdes – Maillage de référence – Vue 3D du parallélépipède**



**Figure G.6.3.5 : Parallélépipèdes – Maillage de référence – Vue selon l'axe  $x$**

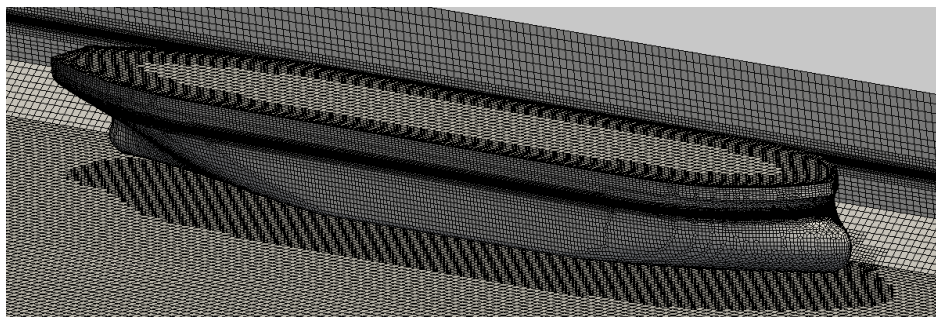


**Figure G.6.3.6 : Parallélépipèdes – Maillage de référence – Vue selon l'axe  $z$**

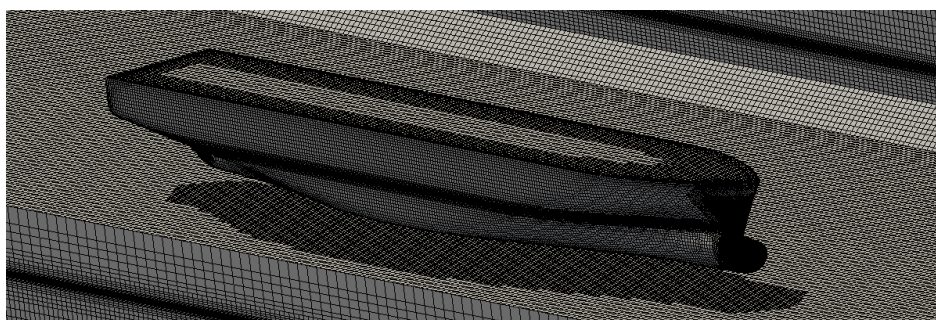


## G.6.4 Un navire amarré dans un canal

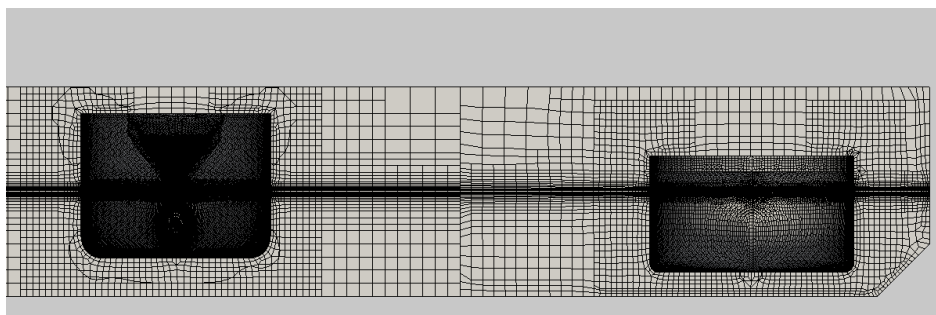
### G.6.4.1 Maillage



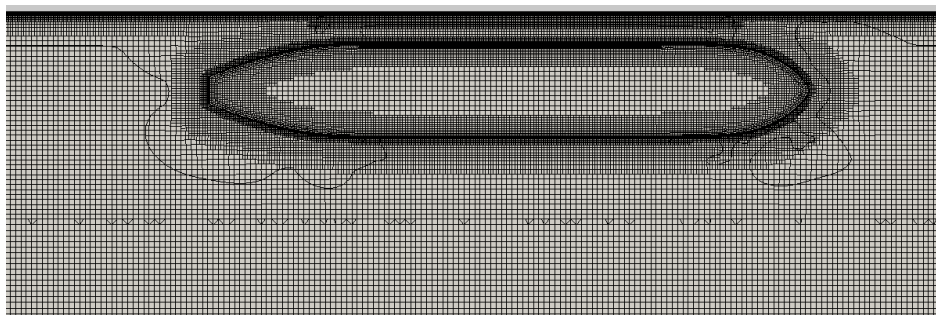
**Figure G.6.4.1 :** Un navire amarré dans un canal – Maillage – Navire amarré



**Figure G.6.4.2 :** Un navire amarré dans un canal – Maillage – Navire en transit



**Figure G.6.4.3 :** Un navire amarré dans un canal – Maillage – Vue de face



**Figure G.6.4.4 :** Un navire amarré dans un canal – Maillage – Vue de dessus



# Liste des figures

A.1.1	Quelques navires remarquables . . . . .	3
A.1.2	Le Charlotte Dundas . . . . .	4
A.1.3	Le Clermont . . . . .	4
A.1.4	Quelques modèles d'hélice . . . . .	5
A.1.5	Le steamer SS Archimedes . . . . .	6
A.1.6	Le Napoléon . . . . .	6
A.1.7	Le début des premières plateformes métalliques . . . . .	7
A.1.8	Plateformes offshore de structure métallique (a et b) ou en béton (c et d) . . . . .	7
A.1.9	Un FPSO (a) et un pétrolier (b) . . . . .	8
A.1.10	Exemples d'éoliennes offshore fixes au Danemark (a) et flottantes en France (b) . . . . .	8
A.1.11	Concepts d'hydroliennes installées en Irlande (a) et en France (b) . . . . .	8
A.1.12	Concept de système houlomoteur (a) et concept d'ETM (b) . . . . .	9
A.1.13	Exemples de sous-marins . . . . .	10
A.1.14	La boucle navire . . . . .	10
A.2.1	Un écoulement passant de l'état laminaire (gauche) à l'état turbulent (droite) . . . . .	16
A.3.1	Exemple d'une approche séquentielle de résolution d'une problématique fluide-structure – Cas simple d'un navire avec safran . . . . .	19
A.4.1	Schéma de principe de l'implémentation informatique . . . . .	22
B.2.1	Un volume de contrôle – Vues 3D et 2D et notations . . . . .	41
B.2.2	Boucle de résolution du problème fluide – Approche découplée . . . . .	43
B.2.3	Reconstruction – Notations – Vue 2D . . . . .	46
B.2.4	Variation de $Q$ dans la direction de l'écoulement . . . . .	54
B.2.5	Construction du point imaginaire $U$ . . . . .	54
B.2.6	Diagramme NVD – Critères . . . . .	55
B.2.7	Diagramme NVD – Schéma UDS . . . . .	56
B.2.8	Diagramme NVD – Schéma DDS . . . . .	56
B.2.9	Diagramme NVD – Schéma CDS . . . . .	56
B.2.10	Diagramme NVD – Schéma QUICK . . . . .	57
B.2.11	Diagramme NVD – Schéma GDS . . . . .	58
B.2.12	Diagramme NVD – Schéma AVLSMART . . . . .	59
B.2.13	Diagramme NVD – Schéma IGDS . . . . .	60
B.2.14	Diagramme NVD – Schéma BICS pour plusieurs nombres de Courant . . . . .	61
B.2.15	Schéma BRICS – Reconstruction de la valeur au point $U$ . . . . .	62
B.2.16	Une face frontière – Vue 2D et notations . . . . .	68
C.1.1	Corps rigide – Notations . . . . .	76
C.1.2	Poutre – Modélisation . . . . .	80
C.1.3	Poutre – Cinématiques de Bernoulli et de Timoshenko . . . . .	81
C.1.4	Poutre – Notations . . . . .	81
C.1.5	Poutre – Tronçon d'une poutre . . . . .	86
C.2.1	Exemple monodimensionnel . . . . .	91
C.2.2	Polynôme d'Hermite et prédiction . . . . .	95
C.2.3	Poutre – Notations pour une poutre caractérisée par trois nœuds . . . . .	103
C.2.4	Exemple monodimensionnel – Système linéaire . . . . .	105
C.2.5	Exemple d'illustration monodimensionnel – Quelques solutions numériques – Vitesse du nœud 1 . . . . .	106
D.2.1	Notations du problème fluide-structure . . . . .	113

D.3.1	Différentes méthodes de couplage fluide-structure . . . . .	118
D.3.2	CSS – Formulation en effort et en cinématique . . . . .	122
D.3.3	GSS – Formulation en cinématique . . . . .	123
D.3.4	DFMT-BGS avec prédicteur – Formulation en effort et en cinématique . . . . .	125
D.3.5	DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Formulation en effort . . . . .	130
D.4.1	Poutre – Description d’une poutre au sein du solveur fluide . . . . .	131
D.4.2	Interpolation d’Hermite – Illustration du problème de la pente . . . . .	132
D.4.3	Interpolation de Lagrange – Comparaison avec la méthode d’interpolation d’Hermite . . . . .	133
D.4.4	Reconstruction de l’orientation – Exemple tridimensionnel . . . . .	134
D.4.5	Une poutre encastrée à une extrémité . . . . .	135
D.4.6	Une poutre encastrée à une extrémité – Déformée et angle de rotation des section . . . . .	135
D.4.7	Une poutre encastrée à une extrémité – Erreur d’interpolation . . . . .	136
D.4.8	Transfert des efforts fluides vers les nœuds d’une poutre – Principe de base . . . . .	137
D.4.9	Exemple tridimensionnel – Données d’entrée . . . . .	137
D.4.10	Exemple tridimensionnel – Validation qualitative – Interpolation de Lagrange . . . . .	138
D.4.11	Exemple tridimensionnel – Validation qualitative – Interpolation de Lagrange . . . . .	139
D.4.12	Transfert des efforts fluides – Une poutre subissant un effort de pression unitaire sur un côté . . . . .	139
D.5.1	Cylindre – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	149
D.5.2	Rectangle – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	150
D.5.3	Cylindre dans un tuyau – Masse ajoutée en fonction du confinement . . . . .	150
D.5.4	Cylindre dans un tuyau – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	151
D.5.5	Parallélépipède – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	151
D.5.6	Parallélépipède – Masse ajoutée en fonction du ratio des longueurs . . . . .	151
D.5.7	Ellipsoïde – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	152
D.5.8	Ellipsoïde – Masses ajoutées en fonction du ratio des longueurs . . . . .	152
D.5.9	Barge parallélépipédique – Géométrie et masse ajoutée . . . . .	153
D.5.10	Barge parallélépipédique – Masses ajoutées en fonction du tirant d’eau . . . . .	154
D.5.11	Cargo Series 60 – Maillage Aqua+ 1 . . . . .	154
D.5.12	Cargo Series 60 – Maillage ISIS-CFD grossier . . . . .	154
D.5.13	Cargo Series 60 – Pourcentage d’écart . . . . .	156
D.5.14	Cargo Series 60 – Logarithme du résidus pour plusieurs coefficient de relaxation . . . . .	156
D.5.15	Cargo Series 60 – Champs de pression . . . . .	157
D.5.16	Cargo Series 60 – Géométrie . . . . .	157
D.5.17	Coefficient de relaxation maximum pour stabiliser le couplage implicite . . . . .	160
D.5.18	Sphère libre – Cinématique en fonction du temps – $d = 0.9$ . . . . .	162
D.5.19	Sphère libre – Cinématique en fonction du temps – $d = 0.9$ . . . . .	162
D.5.20	Sphère libre – Cinématique en fonction du temps – $d = 0.5$ . . . . .	163
D.5.21	Sphère libre – Décomposition des efforts – $d = 0.5$ . . . . .	163
D.5.22	Sphère libre – Nombre d’itérations en fonction du temps – $d = 0.5$ – $C_a = 2.0$ . . . . .	164
D.5.23	DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Relaxation appliquée à la cinématique . . . . .	171
D.5.24	Autre méthode de reconstruction des vitesses et positions . . . . .	173
D.5.25	DFMT-BGS-IFC avec prédicteur – Relaxation appliquée aux efforts fluides . . . . .	175
D.5.26	Différentes matrices de masse ajoutée pour une poutre tridimensionnelle discrétisée par deux nœuds . . . . .	177
D.5.27	Différentes matrices de masse ajoutée pour une poutre tridimensionnelle discrétisée par deux nœuds . . . . .	179
D.5.28	Contribution des différents nœuds sur la matrice de masse ajoutée – Cas 3 . . . . .	180
D.5.29	Champ de pression pour le degré de liberté en cavement – Cas corps rigide et cas 3 . . . . .	180
D.5.30	Champ de pression pour le degré de liberté en pilonnement – Cas corps rigide et cas 3 . . . . .	180
D.5.31	Champ de pression pour le degré de liberté en roulis – Cas corps rigide et cas 3 . . . . .	180
D.5.32	Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement – Cas 2 . . . . .	181
D.5.33	Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement – Cas 2 . . . . .	181
D.5.34	Champs de pression pour le degré de liberté en pilonnement – Cas 2 . . . . .	181
D.5.35	Partie supérieure gauche de la matrice de masse ajoutée – Cas 2 . . . . .	182
D.5.36	Partie supérieure gauche de la matrice de masse ajoutée – Cas 3 . . . . .	183
E.1.1	Exemple de VIM . . . . .	189
E.2.1	Géométrie . . . . .	191

E.2.2	Maillages Aqua+ . . . . .	192
E.2.3	Aqua+ – $C_a$ en fonction de B . . . . .	192
E.2.4	Cinématique pour plusieurs $\Delta t$ . . . . .	193
E.2.5	Comparaison de la stabilité des 3 algorithmes . . . . .	195
E.2.6	Cinématique et efforts – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_2$ . . . . .	197
E.2.7	Cinématique et efforts – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_4$ . . . . .	198
E.2.8	Efforts et résidus fluides – $\Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9 - p_{ga} = 4 - t_{ref} = t_1$ à $t_3$ . . . . .	199
E.2.9	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_1$ et $t_2 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	200
E.2.10	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ et $t_8 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	201
E.2.11	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_1$ et $t_2 - \Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	202
E.2.12	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3 - \Delta t = 0.050$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	203
E.2.13	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_1, t_2, t_3$ et $t_4 - \Delta t = 0.050$ s – $p_{ga} = 3$ . . . . .	203
E.2.14	Accélération en fonction de $\overline{C_a}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.010$ s et $0.075$ s – $p_{ga} = 4$ . . . . .	204
E.2.15	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.010$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	205
E.2.16	Accélération en fonction de $p_{ga}$ à $t_3, t_6$ et $t_9 - \Delta t = 0.075$ s – $\overline{C_a} = 9$ . . . . .	206
E.2.17	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Masse ajoutée et coefficient de relaxation . . . . .	207
E.2.18	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Cinématique . . . . .	208
E.2.19	Masse ajoutée évaluée dynamiquement – Accélérations de $t_1$ à $t_6 - \Delta t = 0.025$ s . . . . .	209
E.3.1	Géométrie . . . . .	213
E.3.2	Repère de la géométrie . . . . .	213
E.3.3	Une première approche de la résistance ajoutée de face – Décomposition . . . . .	214
E.3.4	Une première approche de la résistance ajoutée de face – Adimensionnalisation . . . . .	215
E.3.5	Résistance à l'avancement en modèle libre – Résultats . . . . .	217
E.3.6	Résistance à l'avancement en modèle libre – Élévation de la surface libre sur la carène . . . . .	218
E.3.7	Résistance à l'avancement en modèle libre – Surface libre – $Fr = 0.28$ . . . . .	218
E.3.8	Résistance à l'avancement en modèle libre – Surface libre – $Fr = 0.41$ . . . . .	219
E.3.9	Domaine de simulation . . . . .	221
E.3.10	Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts – $Fr = 0.28$ . . . . .	226
E.3.11	Modèle fixe – Moyenne et premier harmonique des efforts – $Fr = 0.41$ . . . . .	227
E.3.12	Amplitude de la houle . . . . .	229
E.3.13	Fonction de transfert des premiers harmoniques – $Fr = 0.28$ . . . . .	230
E.3.14	Fonction de transfert des premiers harmoniques – $Fr = 0.41$ . . . . .	230
E.3.15	Valeur moyenne du mouvement de pilonnement . . . . .	231
E.3.16	Valeur moyenne du mouvement de tangage . . . . .	231
E.3.17	Amplitude du premier harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	232
E.3.18	Amplitude du premier harmonique du mouvement de tangage . . . . .	232
E.3.19	Phase du premier harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	233
E.3.20	Phase du premier harmonique du mouvement de tangage . . . . .	233
E.3.21	Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de pilonnement . . . . .	234
E.3.22	Amplitude du deuxième harmonique du mouvement de tangage . . . . .	234
E.3.23	Résistance ajoutée adimensionnelle en modèle libre . . . . .	235
E.3.24	Résistance ajoutée en modèle libre et fixe . . . . .	236
E.4.1	Cas 1 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires . . . . .	243
E.4.2	Cas 2 – Opérateur de relaxation en fonction de $d_e$ . . . . .	244
E.4.3	Cas 2 – Champ de pression pour les mouvements élémentaires . . . . .	244
E.4.4	Cas 1 – Trajectoire et orientation pour différents pas de temps . . . . .	247
E.4.5	Cas 1 – Trajectoire dans le plan horizontal . . . . .	247
E.4.6	Cas 1 – Effort de masse ajoutée en fonction du temps . . . . .	248
E.4.7	Cas 1 – Accélération en fonction du temps . . . . .	248
E.4.8	Cas 1 – Position et vitesse linéaire en fonction du temps . . . . .	249
E.4.9	Cas 1 – Orientation et vitesse angulaire en fonction du temps . . . . .	249
E.4.10	Cas 1 – Accélération calculée et relaxée – $\Delta t = 0.002$ s . . . . .	250
E.4.11	Cas 1 – Accélération calculée et relaxée – $\Delta t = 0.050$ s . . . . .	251
E.4.12	Cas 1 – Effort fluide lorsque le mouvement est calculé et imposé – $\Delta t = 0.010$ s . . . . .	252
E.4.13	Cas 1 – Effort fluide lorsque le mouvement est calculé et imposé – $\Delta t = 0.050$ s . . . . .	253
E.4.14	Cas 1 – Iso-surface de pression dynamique – $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	254
E.4.15	Cas 2 – Trajectoire et orientation pour deux pas de temps – $d_e = 0.3$ . . . . .	258

E.4.16	Cas 2 – Trajectoire et orientation pour différentes densités équivalentes . . . . .	259
E.4.17	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.1$ . . . . .	260
E.4.18	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.2$ . . . . .	260
E.4.19	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.3$ . . . . .	261
E.4.20	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.5$ . . . . .	261
E.4.21	Cas 2 – Iso-surface de pression dynamique – $d_e = 0.7$ . . . . .	262
E.4.22	Cas 2 – Accélération en pilonnement et tangage – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s – $t = 8.25$ s . . . . .	262
E.4.23	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	263
E.4.24	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	263
E.4.25	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.3$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	264
E.4.26	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.3$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	264
E.4.27	Cas 2 – Position et vitesse linéaire – $d_e = 0.7$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	265
E.4.28	Cas 2 – Orientation et vitesse angulaire – $d_e = 0.7$ , $\Delta t = 0.025$ s . . . . .	265
E.4.29	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.1.a, 2.1.b et 2.1.c . . . . .	266
E.4.30	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.3.a, 2.3.b et 2.3.c . . . . .	267
E.4.31	Cas 2 – Accélération relaxée – $\Delta t = 0.025$ s – Cas 2.7.a, 2.7.b et 2.7.c . . . . .	268
E.5.1	Géométrie . . . . .	271
E.5.2	Repères – Vue de côté . . . . .	271
E.5.3	Repères – Vue de dessus . . . . .	271
E.5.4	Repères des appendices . . . . .	272
E.5.5	Domaine lointain . . . . .	272
E.5.6	Différentes vues des interfaces glissantes . . . . .	273
E.5.7	Décalage d'un aileron de stabilisation . . . . .	273
E.5.8	Maillage – Vue de face . . . . .	273
E.5.9	Maillage – Vue de dessus . . . . .	273
E.5.10	Maillage – Maillage de la poupe . . . . .	274
E.5.11	Maillage – Maillage des ailerons . . . . .	274
E.5.12	Scénario des simulations . . . . .	275
E.5.13	Angle de roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	277
E.5.14	Angle de roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	277
E.5.15	Mouvement de pilonnement et de tangage – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	277
E.5.16	Mouvement de pilonnement et de tangage – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	278
E.5.17	Angle de cabrage des ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	278
E.5.18	Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	279
E.5.19	Efforts fluides sur les ailerons de stabilisation – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	280
E.5.20	Efforts fluides sur les safrans – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	280
E.5.21	Efforts fluides sur les safrans – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	281
E.5.22	Efforts fluides sur les quilles anti-roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	281
E.5.23	Efforts fluides sur les quilles anti-roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	282
E.5.24	DTMB 5415M – Coefficient de pression et élévation de la surface libre . . . . .	284
E.5.25	Contribution des différents éléments en roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	285
E.5.26	Contribution des différents éléments en roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	286
E.5.27	Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	287
E.5.28	Modélisation du moment en roulis – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	288
E.6.1	Carènes . . . . .	291
E.6.2	Géométries . . . . .	291
E.6.3	Domaine de calcul – Vue de face . . . . .	292
E.6.4	Domaine de calcul – Vue de haut . . . . .	292
E.6.5	Mouvements des différents sous-domaines . . . . .	293
E.6.6	Plan d'amarrage . . . . .	293
E.6.7	Principe de fonctionnement et effort de réaction d'une défense tronconique . . . . .	294
E.6.8	Position longitudinale du navire en transit en fonction de $t_p$ . . . . .	295
E.6.9	Efforts fluides s'exerçant sur le navire amarré . . . . .	295
E.6.10	Cinématique du navire amarré . . . . .	296
E.6.11	Efforts de réaction pour une défense tronconique . . . . .	296
E.6.12	Tensions dans les amarres . . . . .	297
E.6.13	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.00$ . . . . .	298
E.6.14	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.25$ . . . . .	298

E.6.15	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.50$ . . . . .	298
E.6.16	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 0.75$ . . . . .	299
E.6.17	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.00$ . . . . .	299
E.6.18	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.25$ . . . . .	299
E.6.19	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.50$ . . . . .	300
E.6.20	Coefficient de pression – Vue de dessous – $t_p = 1.75$ . . . . .	300
E.6.21	Coefficient de pression – Vue de biais – $t_p = 1.00$ . . . . .	300
E.7.1	Poutre 1 – Configuration spatiale et conditions aux limites . . . . .	302
E.7.2	Poutre 1 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	303
E.7.3	Poutre 1 – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante . . . . .	304
E.7.4	Poutre 1 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	304
E.7.5	Poutre 1 – Maillage – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.6	Poutre 1 – Lignes de courant – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.7	Poutre 1 – Coefficient de pression – $t = 10$ s . . . . .	304
E.7.8	Poutre 2 – Configuration spatiale et conditions aux limites . . . . .	305
E.7.9	Poutre 2 – Cinématique du point extrémité et transformée de Fourier correspondante . . . . .	306
E.7.10	Poutre 2 – Forme de la poutre à différents instants . . . . .	306
E.7.11	Poutre 2 – Champ de pression et lignes de courant . . . . .	307
E.7.12	Poutre 2 – Champ de vitesse adimensionnelle et iso-lignes de vortacité . . . . .	308
G.1.1	Équations pour un corps rigide – Notations . . . . .	319
G.1.2	Rotation – Angles de Cardan . . . . .	323
G.1.3	Exemple d’une rotation d’angle $\theta$ autour d’un axe $\mathbf{u}$ . . . . .	327
G.2.1	Euler explicite . . . . .	342
G.2.2	Euler implicite . . . . .	342
G.2.3	Heun ou Runge . . . . .	342
G.2.4	Runge-Kutta 3 . . . . .	343
G.2.5	Runge-Kutta 4 . . . . .	343
G.2.6	Adams-Bashforth 1 . . . . .	343
G.2.7	Adams-Bashforth 2 . . . . .	344
G.2.8	Adams-Moulton 2 . . . . .	344
G.2.9	Adams-Moulton 3 . . . . .	344
G.2.10	BDF-2 . . . . .	344
G.2.11	BDF-3 . . . . .	344
G.2.12	Multi-Step $\rho_\infty=0.0$ . . . . .	344
G.2.13	MS $\rho_\infty=0.1$ . . . . .	344
G.2.14	MS $\rho_\infty=0.2$ . . . . .	344
G.2.15	MS $\rho_\infty=0.3$ . . . . .	344
G.2.16	MS $\rho_\infty=0.4$ . . . . .	344
G.2.17	MS $\rho_\infty=0.5$ . . . . .	344
G.5.1.1	Cylindre – Géométrie . . . . .	351
G.5.1.2	Cylindre fixe – Nombre de Strouhal en fonction de Re . . . . .	352
G.5.1.3	Cylindre fixe – Amplitude des efforts normaux en fonction de Re . . . . .	352
G.5.1.4	Cylindre fixe – Re = 90 – $\Delta t = 0.0025$ s – Maillage 1 – Champ de pression . . . . .	352
G.5.1.5	Cylindre fixe – Re = 90 – $\Delta t = 0.0025$ s – Maillage 1 – Champ de pression . . . . .	352
G.5.1.6	Cylindre oscillant – Amplitude et fréquence des oscillations du cylindre en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	353
G.5.1.7	Cylindre oscillant – Champs de vortacité – Re = 100 . . . . .	354
G.5.1.8	Cylindre oscillant – Enveloppe, initialisation et régime stabilisé des oscillations . . . . .	355
G.5.1.9	Cylindre oscillant – Maillage 1 . . . . .	356
G.5.1.10	Cylindre oscillant – Maillage 2 . . . . .	356
G.5.1.11	Cylindre oscillant – Maillage 3 . . . . .	356
G.5.2.1	Carré – Géométrie . . . . .	357
G.5.2.2	Carré oscillant – Maillage 1 . . . . .	359
G.5.2.3	Carré oscillant – Maillage 2 . . . . .	359
G.5.2.4	Carré fixe – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	359
G.5.2.5	Carré fixe – Amplitude des efforts normaux en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	359
G.5.2.6	Carré oscillant – Amplitude des oscillations en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	360

G.5.2.7	Carré oscillant – Fréquences des oscillations en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	360
G.5.2.8	Carré oscillant – Exemples d'oscillations . . . . .	361
G.5.2.9	Carré oscillant – Exemples d'oscillations . . . . .	362
G.5.2.10	Carré oscillant – $Re = 50$ – Vorticité en position haute . . . . .	363
G.5.2.11	Carré oscillant – $Re = 50$ – Vorticité en position basse . . . . .	363
G.5.2.12	Carré oscillant – $Re = 200$ – Vorticité en position haute . . . . .	363
G.5.2.13	Carré oscillant – $Re = 200$ – Vorticité en position basse . . . . .	363
G.5.3.1	Rectangle – Géométrie . . . . .	364
G.5.3.2	Rectangle fixe – Nombre de Strouhal et amplitude du moment en fonction de $\Delta t$ . . . . .	365
G.5.3.3	Rectangle fixe – Moment en fonction du temps . . . . .	365
G.5.3.4	Rectangle oscillant – Amplitude et fréquence des oscillations en fonction de $\Delta t$ . . . . .	366
G.5.3.5	Rectangle oscillant – Rotation en fonction du temps . . . . .	366
G.5.3.6	Rectangle oscillant – Maillage 1 . . . . .	366
G.5.3.7	Rectangle oscillant – Maillage 1 – Zoom . . . . .	366
G.5.3.8	Rectangle oscillant – Champs de vorticité – $\Delta t = 0.0250$ s . . . . .	367
G.5.4.1	Profil de poutre – Géométrie . . . . .	368
G.5.4.2	Profil de poutre fixe – Nombre de Strouhal et amplitude de l'effort et du moment . . . . .	369
G.5.4.3	Profil de poutre fixe – Enveloppe de l'effort et du moment – Symétrie et dissymétrie . . . . .	369
G.5.4.4	Profil de poutre fixe – Effort et moment pour plusieurs $\Delta t$ . . . . .	370
G.5.4.5	Profil de poutre fixe – $\Delta t = 0.025$ s – Vorticité . . . . .	371
G.5.4.6	Profil de poutre oscillant – Mouvements en fonction du temps . . . . .	372
G.5.4.7	Profil de poutre oscillant – Effort et moment en fonction du temps . . . . .	373
G.5.4.8	Profil de poutre oscillant – Mouvements et efforts en fonction du temps . . . . .	373
G.5.4.9	Profil de poutre oscillant – Champs de vorticité pendant une demi oscillation . . . . .	374
G.5.4.10	Profil de poutre oscillant – Maillage 1 . . . . .	375
G.5.4.11	Profil de poutre oscillant – Maillage 1 – Zoom . . . . .	375
G.6.1.5	Pression dynamique entre $t = 0.2$ s et $t = 2.0$ s . . . . .	376
G.6.1.10	Pression dynamique entre $t = 2.2$ s et $t = 4.0$ s . . . . .	377
G.6.1.15	Pression d'évaluation de la masse ajoutée entre $t = 0.2$ s et $t = 2.0$ s . . . . .	378
G.6.1.20	Pression d'évaluation de la masse ajoutée entre $t = 2.2$ s et $t = 4.0$ s . . . . .	379
G.6.1.21	Maillage à différents instants . . . . .	380
G.6.2.1	Maillage – Vue générale . . . . .	381
G.6.2.2	Maillage – Vue de côté . . . . .	381
G.6.2.3	Maillage – Vue du navire . . . . .	381
G.6.2.4	Maillage – Vue du dessus au niveau de la surface libre . . . . .	382
G.6.2.5	Maillage – Zoom sur le bulbe . . . . .	382
G.6.2.6	Maillage – Zoom sur la poupe . . . . .	382
G.6.2.7	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	385
G.6.2.8	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	385
G.6.2.9	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de tangage . . . . .	386
G.6.2.10	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	386
G.6.2.11	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Effort de résistance . . . . .	387
G.6.2.12	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.7075$ – Surface libre . . . . .	387
G.6.2.13	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	388
G.6.2.14	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	388
G.6.2.15	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de tangage . . . . .	389
G.6.2.16	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	389
G.6.2.17	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Effort de résistance . . . . .	390
G.6.2.18	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 0.9977$ – Surface libre . . . . .	390
G.6.2.19	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	391
G.6.2.20	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	391
G.6.2.21	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de tangage . . . . .	392
G.6.2.22	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	392
G.6.2.23	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Effort de résistance . . . . .	393
G.6.2.24	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 1.2929$ – Surface libre . . . . .	393
G.6.2.25	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	394
G.6.2.26	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	394
G.6.2.27	$Fr = 0.28, A_k = 0.0500, \lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de tangage . . . . .	395

G.6.2.28	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	395
G.6.2.29	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Effort de résistance . . . . .	396
G.6.2.30	Fr = 0.28, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.7207$ – Surface libre . . . . .	396
G.6.2.31	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	397
G.6.2.32	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	397
G.6.2.33	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de tangage . . . . .	398
G.6.2.34	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	398
G.6.2.35	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Effort de résistance . . . . .	399
G.6.2.36	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.6590$ – Surface libre . . . . .	399
G.6.2.37	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	400
G.6.2.38	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	400
G.6.2.39	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de tangage . . . . .	401
G.6.2.40	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	401
G.6.2.41	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Effort de résistance . . . . .	402
G.6.2.42	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 0.9900$ – Surface libre . . . . .	402
G.6.2.43	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	403
G.6.2.44	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	403
G.6.2.45	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de tangage . . . . .	404
G.6.2.46	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	404
G.6.2.47	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Effort de résistance . . . . .	405
G.6.2.48	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 1.3718$ – Surface libre . . . . .	405
G.6.2.49	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de pilonnement . . . . .	406
G.6.2.50	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de pilonnement (zoom) . . . . .	406
G.6.2.51	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de tangage . . . . .	407
G.6.2.52	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Mouvement de tangage (zoom) . . . . .	407
G.6.2.53	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Effort de résistance . . . . .	408
G.6.2.54	Fr = 0.41, $A_k = 0.0500$ , $\lambda/L_{PP} = 2.2574$ – Surface libre . . . . .	408
G.6.3.1	Cas 1 – Géométrie et position initiale . . . . .	409
G.6.3.2	Cas 2 – Géométrie et position initiale . . . . .	409
G.6.3.3	Répartition longitudinale de la masse volumique . . . . .	409
G.6.3.4	Maillage de référence – Vue 3D du parallélépipède . . . . .	410
G.6.3.5	Maillage de référence – Vue selon l'axe $x$ . . . . .	410
G.6.3.6	Maillage de référence – Vue selon l'axe $z$ . . . . .	410
G.6.4.1	Maillage – Navire amarré . . . . .	411
G.6.4.2	Maillage – Navire en transit . . . . .	411
G.6.4.3	Maillage – Vue de face . . . . .	411
G.6.4.4	Maillage – Vue de dessus . . . . .	411

# Liste des tableaux

C.2.1	Système masse-ressort à deux masses contraintes – Conditionnements pour différents paramètres physiques et numériques . . . . .	97
C.2.2	Exemple monodimensionnel – Vérification initiale . . . . .	100
C.2.3	Exemple monodimensionnel – Détermination des dérivées temporelles restantes . . . . .	101
D.5.1	Cargo Series 60 – Matrice de masse ajoutée <b>MA</b> – Maillages 1 (première ligne) et maillages 2 (deuxième ligne) . . . . .	155
D.5.2	Sphère libre – Nombre moyen d’itérations implicites – $d = 0.9 - C_a \approx 1.1$ . . . . .	163
D.5.3	Sphère libre – Nombre moyen d’itérations implicites – $d = 0.5 - C_a \approx 2.0$ . . . . .	163
E.2.1	Caractéristiques . . . . .	191
E.2.2	Algorithme 1 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.3	Algorithme 2 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.4	Algorithme 3 – Temps CPU relatif . . . . .	194
E.2.5	Notation et signification des termes analysés . . . . .	195
E.2.6	Coefficient de relaxation en fonction de la masse ajoutée artificielle . . . . .	200
E.3.1	Caractéristiques . . . . .	213
E.3.2	Résistance à l’avancement en modèle libre . . . . .	216
E.3.3	Résistance à l’avancement en modèle libre – Efforts hydrostatiques . . . . .	217
E.3.4	Liste des simulations . . . . .	222
E.3.5	Pas de temps – Nombres de cellules – Nombres moyen d’itérations par pas de temps . . . . .	223
E.3.6	Modèle fixe – Liste des configurations . . . . .	224
E.3.7	Modèle fixe – Rappel des coefficients de résistance en eau calme . . . . .	224
E.3.8	Modèle fixe – Résultats et comparaison – $Fr = 0.28$ . . . . .	226
E.3.9	Modèle fixe – Résultats et comparaison – $Fr = 0.41$ . . . . .	227
E.4.1	Informations diverses . . . . .	240
E.4.2	Cas 1 – Matrice de masse ajoutée artificielle et opérateur de relaxation . . . . .	241
E.4.3	Cas 2 – Matrices de masse ajoutée artificielle . . . . .	241
E.4.4	Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations . . . . .	242
E.4.5	Cas 2 – Opérateurs de relaxation des accélérations diagonalisés . . . . .	242
E.4.6	Cas 2 – Ratios entre la matrice de masse ajoutée et la matrice d’inertie . . . . .	243
E.4.7	Cas 1 – Nombre moyen d’itérations par pas de temps . . . . .	246
E.4.8	Cas 1 – Moyenne quadratique des efforts de masse ajoutée . . . . .	246
E.4.9	Cas 1 – Moyenne quadratique de la dérivée temporelle des accélérations . . . . .	246
E.4.10	Cas 2 – Nombres moyens d’itérations par pas de temps – $d_e = 0.3$ , $d_e = 0.5$ et $d_e = 0.7$ . . . . .	257
E.4.11	Cas 2 – Nombres moyens d’itérations par pas de temps – $d_e = 0.1$ et $d_e = 0.2$ . . . . .	258
E.5.1	Décomposition des coefficients – Ailerons de stabilisation passifs . . . . .	283
E.5.2	Décomposition des coefficients – Ailerons de stabilisation actifs . . . . .	284
E.6.1	Caractéristiques des navires . . . . .	292
E.6.2	Caractéristiques des amarres utilisées . . . . .	294
E.6.3	Caractéristiques des amarres utilisées . . . . .	294
E.7.1	Poutre 1 – Paramètres . . . . .	302
E.7.2	Poutre 2 – Paramètres . . . . .	305
G.1.1	Table de multiplication des vecteurs de base des quaternions . . . . .	331
G.2.1	Fonction de stabilité de quelques méthodes mono-pas . . . . .	342
G.2.2	Polynômes caractéristiques de quelques méthodes multi-pas . . . . .	343
G.2.3	Méthodes d’intégration temporelle – Résumé . . . . .	343
G.5.1.1	Cylindre oscillant – Informations . . . . .	351



## LISTE DES TABLEAUX

---

G.5.2.1	Carré oscillant – Informations . . . . .	357
G.5.3.1	Rectangle oscillant – Informations . . . . .	365
G.5.4.1	Profil de poutre oscillant – Informations . . . . .	369
G.5.4.2	Profil de poutre oscillant – Amplitude des mouvements . . . . .	372
G.6.2.1	Résistance ajoutée – Amplitude de la moyenne et des trois premiers harmoniques . . . .	383
G.6.2.2	DTMB 5512 – Pages des résultats . . . . .	384
G.6.3.1	Information sur le maillage . . . . .	410

# Liste des algorithmes

C.2.1	Intégration temporelle du problème structure – Résolution d’un pas de temps courant . . .	96
D.3.1	Opérateur de Steklov-Poincaré du fluide . . . . .	120
D.3.2	Opérateur linéarisé de Steklov-Poincaré du fluide . . . . .	120
D.3.3	Opérateur de Poincaré-Steklov de la structure . . . . .	121
D.3.4	DFMT-Block Newton – Formulation en cinématique . . . . .	127
D.5.1	DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué à la cinématique	170
D.5.2	DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort et opérateur de relaxation appliqué aux efforts .	175
G.1.1	Passage de matrice de rotation à angles de Cardan . . . . .	325
G.1.2	Passage de matrice de rotation au paramètre de Gibbs-Rodrigues . . . . .	330
G.1.3	Passage d’une matrice de rotation à un quaternion . . . . .	333
G.3.1	CSS – Formulation en effort . . . . .	345
G.3.2	GSS – Formulation en cinématique . . . . .	345
G.3.3	DFMT-BGS – Formulation en effort . . . . .	346
G.3.4	DFMT-BGS – Formulation en cinématique . . . . .	346
G.3.5	DFMT-BGS-IFC – Formulation en effort . . . . .	347

# Table des matières

<b>A</b>	<b>Problématique</b>	<b>1</b>
<b>A.1</b>	<b>L'architecture navale et l'hydrodynamique</b>	<b>2</b>
A.1.1	Du commencement au XVIII <sup>e</sup> siècle	2
A.1.2	Du XIX <sup>e</sup> siècle à nos jours	4
<b>A.2</b>	<b>Histoire de l'hydrodynamique</b>	<b>12</b>
A.2.1	Découverte des premières équations	12
A.2.2	Une nouvelle étape dans la mécanique des fluides	14
<b>A.3</b>	<b>Présentation et analyse du sujet</b>	<b>18</b>
<b>A.4</b>	<b>La simulation collaborative</b>	<b>21</b>
<b>B</b>	<b>Résolution du problème fluide</b>	<b>25</b>
<b>B.1</b>	<b>Le problème fluide en équations</b>	<b>27</b>
B.1.1	Principes généraux	27
B.1.2	Description eulérienne et lagrangienne	27
B.1.3	Notations et théorèmes mathématiques	28
B.1.3.1	Notations	28
B.1.3.2	Règle de Leibnitz	28
B.1.3.3	Formule de Green-Ostrogradski	29
B.1.3.4	Théorème de Green-Riemann en dimension 3	29
B.1.4	Condition de conservation spatiale	30
B.1.5	Bilan de masse	30
B.1.6	Fluide incompressible et isotherme	30
B.1.7	Loi de comportement des fluides newtoniens	31
B.1.8	Bilan de quantité de mouvement d'un fluide newtonien	32
B.1.9	Forme convective	33
B.1.10	Modélisation multiphasique	33
B.1.11	Modélisation de la turbulence	35
B.1.11.1	Introduction	35
B.1.11.2	Moyenne au sens de Reynolds	36
B.1.11.3	Équation de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds	36
B.1.11.4	Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST	37
B.1.12	Résumé	39
<b>B.2</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>40</b>
B.2.1	Introduction	40
B.2.2	Méthode des volumes finis	40
B.2.2.1	Généralités	40
B.2.2.2	Discrétisations spatiales	42
B.2.2.3	Discrétisation temporelle	44
B.2.2.4	Discrétisation pseudo-stationnaire	44
B.2.3	Équation de transport	44
B.2.3.1	Introduction	44
B.2.3.2	Reconstructions centrées	46
B.2.3.2.1	Introduction	46
B.2.3.2.2	Reconstruction des quantités aux faces	47
B.2.3.2.2.1	Cas général	47
B.2.3.2.2.2	Cas continu	48
B.2.3.2.2.3	Cas discontinu	49

B.2.3.2.3	Reconstruction du gradient normal aux faces . . . . .	50
B.2.3.2.3.1	Cas général . . . . .	50
B.2.3.2.3.2	Cas continu . . . . .	51
B.2.3.2.3.3	Cas discontinu . . . . .	52
B.2.3.2.4	Conclusion sur les reconstructions centrées . . . . .	52
B.2.3.3	Calcul du gradient au centre des cellules . . . . .	53
B.2.3.4	Reconstructions décentrées . . . . .	53
B.2.3.4.1	Diagrammes NVD . . . . .	53
B.2.3.4.2	Schémas élémentaires . . . . .	55
B.2.3.4.2.1	Schéma UDS . . . . .	55
B.2.3.4.2.2	Schéma DDS . . . . .	55
B.2.3.4.2.3	Schéma CDS . . . . .	56
B.2.3.4.2.4	Schéma QUICK . . . . .	57
B.2.3.4.2.5	Conclusion sur les schémas élémentaires . . . . .	57
B.2.3.4.3	Schémas hybrides . . . . .	57
B.2.3.4.3.1	Schéma GDS . . . . .	57
B.2.3.4.3.2	Schéma AVLSMART . . . . .	58
B.2.3.4.4	Schémas pour la fonction de présence . . . . .	59
B.2.3.4.4.1	Position du problème . . . . .	59
B.2.3.4.4.2	Schéma IGDS . . . . .	59
B.2.3.4.4.3	Schéma BICS . . . . .	60
B.2.3.4.4.4	Schéma BRICS . . . . .	61
B.2.3.4.5	Conclusion sur les schémas décentrés . . . . .	62
B.2.3.5	Conclusion sur l'équation de transport . . . . .	63
B.2.4	Couplage vitesse-pression . . . . .	64
B.2.4.1	Généralités . . . . .	64
B.2.4.2	Algorithme de résolution . . . . .	66
B.2.5	Application des conditions aux limites . . . . .	67
B.2.5.1	Conditions aux limites numériques . . . . .	67
B.2.5.1.1	Généralités . . . . .	67
B.2.5.1.2	Condition de Dirichlet . . . . .	68
B.2.5.1.3	Condition de Von Neumann . . . . .	68
B.2.5.2	Conditions aux limites physiques . . . . .	69
B.2.6	Conclusion et remarques diverses . . . . .	69
B.2.7	Équation de masse ajoutée . . . . .	70
<b>C</b>	<b>Résolution du problème solide . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>C.1</b>	<b>Le problème de la mécanique du solide en équation . . . . .</b>	<b>75</b>
C.1.1	Principes généraux . . . . .	75
C.1.2	Bilan de quantité de mouvement pour un corps rigide . . . . .	75
C.1.3	Paramétrisation des corps rigides . . . . .	77
C.1.4	Contraintes . . . . .	79
C.1.5	Introduction à la théorie des poutres . . . . .	80
C.1.5.1	Introduction . . . . .	80
C.1.5.2	Cinématique des poutres et déformations . . . . .	80
C.1.5.2.1	Généralités . . . . .	80
C.1.5.2.2	Évaluation simplifiée des déformations . . . . .	82
C.1.5.2.3	Évaluation générale des déformations . . . . .	83
C.1.5.3	Loi de comportement élastique . . . . .	84
C.1.5.4	Équations d'équilibre des poutres . . . . .	85
C.1.5.5	Conclusion et remarques diverses . . . . .	86
<b>C.2</b>	<b>Résolution numérique . . . . .</b>	<b>88</b>
C.2.1	Introduction . . . . .	88
C.2.2	Généralités . . . . .	88
C.2.3	Traitement des rotations . . . . .	89
C.2.3.1	Paramétrisation en fonction du pas de temps précédent . . . . .	89
C.2.3.2	Paramétrisation en fonction de la prédiction . . . . .	90
C.2.4	Exemple d'illustration . . . . .	91

C.2.5	Algorithmes de résolution des EDA . . . . .	92
C.2.6	Intégration temporelle . . . . .	94
C.2.7	Initialisation . . . . .	97
C.2.7.1	Introduction . . . . .	97
C.2.7.2	Vérification initiale . . . . .	98
C.2.7.3	Détermination des dérivées temporelles restantes . . . . .	100
C.2.7.4	Le respect des deuxièmes dérivées temporelles des équations de contrainte . . . . .	101
C.2.7.5	Première intégration temporelle . . . . .	102
C.2.8	Problématique des poutres . . . . .	102
C.2.8.1	Rappel . . . . .	102
C.2.8.2	Modèle élémentaire . . . . .	103
C.2.8.3	Évaluation des efforts internes aux points d'évaluation . . . . .	103
C.2.8.4	Remarques . . . . .	104
C.2.9	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	104
C.2.10	Résultats de l'exemple d'illustration . . . . .	105
C.2.11	Conclusion et remarques diverses . . . . .	105
<b>D</b>	<b>Le couplage fluide-structure . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>D.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>D.2</b>	<b>Le problème fluide-structure en équations . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>D.3</b>	<b>Les algorithmes de couplage fluide-structure . . . . .</b>	<b>116</b>
D.3.1	Introduction . . . . .	116
D.3.1.1	Approche monolithique . . . . .	116
D.3.1.2	Approche partitionnée . . . . .	117
D.3.2	Description des opérateurs élémentaires et composés . . . . .	118
D.3.2.1	Introduction . . . . .	118
D.3.2.2	Opérateurs représentatifs du problème fluide . . . . .	118
D.3.2.2.1	Opérateur classique . . . . .	119
D.3.2.2.2	Opérateur linéarisé . . . . .	119
D.3.2.3	Opérateurs représentatifs du problème structure . . . . .	121
D.3.3	Les algorithmes de couplage classiques . . . . .	121
D.3.3.1	Algorithme explicite élémentaire . . . . .	122
D.3.3.2	Algorithme explicite avec prédicteur de cinématique . . . . .	122
D.3.3.3	Algorithme de Gauss-Seidel par blocs . . . . .	124
D.3.3.4	Accélération de l'algorithme de Gauss-Seidel par blocs . . . . .	124
D.3.3.4.1	Généralités . . . . .	124
D.3.3.4.2	Accélération d'Aitken . . . . .	126
D.3.3.4.3	Accélération de type Newton . . . . .	126
D.3.4	L'algorithme de couplage utilisé . . . . .	128
D.3.4.1	Analyse du problème et discussion . . . . .	128
D.3.4.2	Algorithme DFMT-BGS-IFC . . . . .	129
D.3.4.3	Note sur la prédiction de la cinématique . . . . .	129
<b>D.4</b>	<b>Cas particulier des poutres . . . . .</b>	<b>131</b>
D.4.1	Introduction . . . . .	131
D.4.2	Description d'une poutre au sein du solveur fluide . . . . .	131
D.4.3	Reconstruction de la géométrie . . . . .	131
D.4.3.1	Reconstruction de la fibre neutre . . . . .	132
D.4.3.1.1	Interpolation d'Hermite . . . . .	132
D.4.3.1.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	133
D.4.3.1.3	Abscisse curviligne et longueur d'un segment . . . . .	133
D.4.3.2	Reconstruction de l'orientation . . . . .	134
D.4.3.2.1	Interpolation d'Hermite . . . . .	134
D.4.3.2.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	134
D.4.3.3	Comparaison des deux méthodes . . . . .	134
D.4.4	Transfert des efforts fluides . . . . .	136
D.4.5	Transfert de la cinématique de la poutre . . . . .	139
D.4.6	Note sur l'implémentation . . . . .	140
<b>D.5</b>	<b>Le problème de la masse ajoutée . . . . .</b>	<b>141</b>

D.5.1	Définition de la masse ajoutée . . . . .	141
D.5.1.1	Introduction . . . . .	141
D.5.1.2	Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu infini . . . . .	141
D.5.1.3	Cas des écoulements potentiels monophasiques en milieu non infini . . . . .	143
D.5.1.4	Cas des écoulements monophasiques visqueux . . . . .	144
D.5.1.5	Cas des écoulements potentiels avec surface libre . . . . .	144
D.5.1.6	Définition retenue . . . . .	145
D.5.1.7	Discussion . . . . .	146
D.5.1.8	Symétrie de la matrice de masse ajoutée . . . . .	147
D.5.1.9	Comparaison avec les autres définitions . . . . .	148
D.5.1.10	Conclusion . . . . .	148
D.5.2	Validation de la méthode d'évaluation des effets de masse ajoutée . . . . .	149
D.5.2.1	Un cylindre . . . . .	149
D.5.2.2	Un rectangle . . . . .	150
D.5.2.3	Un cylindre dans un tuyau . . . . .	150
D.5.2.4	Un parallélépipède . . . . .	151
D.5.2.5	Un ellipsoïde de révolution . . . . .	152
D.5.2.6	Une barge parallélépipédique . . . . .	153
D.5.2.7	Un cargo Series 60 . . . . .	154
D.5.3	Généralités sur le problème de la masse ajoutée . . . . .	158
D.5.4	Approche théorique sur les corps rigides . . . . .	159
D.5.5	Illustration sur un modèle analytique de corps rigide . . . . .	161
D.5.6	Algorithme DFMT-BGS-IFC et masse ajoutée . . . . .	165
D.5.6.1	Introduction . . . . .	165
D.5.6.2	Notations des corps rigides à 6 degrés de liberté . . . . .	166
D.5.6.3	Méthode sans relaxation . . . . .	167
D.5.6.4	Relaxation appliquée à la cinématique . . . . .	168
D.5.6.4.1	Principe général . . . . .	168
D.5.6.4.2	Reconstruction des vitesses et positions . . . . .	171
D.5.6.4.3	Autre méthode de reconstruction des vitesses et positions . . . . .	172
D.5.6.4.4	Prise en compte des actionneurs . . . . .	173
D.5.6.5	Relaxation appliquée sur les efforts . . . . .	173
D.5.7	Masse ajoutée pour les corps déformables de type poutre . . . . .	176
D.5.8	Masse ajoutée d'une poutre de section carrée . . . . .	178
D.5.8.1	Description . . . . .	178
D.5.8.2	Généralités . . . . .	178
D.5.8.3	Résultats et analyses . . . . .	179
D.5.8.3.1	Méthode 3 et corps rigide . . . . .	179
D.5.8.3.2	Méthodes 3 et méthode 2 . . . . .	179
D.6	Résumé . . . . .	184
E	Applications . . . . .	187
E.1	Premières applications . . . . .	189
E.2	Une barge parallélépipédique . . . . .	190
E.2.1	Description . . . . .	190
E.2.2	Évaluation de la masse ajoutée . . . . .	192
E.2.3	Cinématique . . . . .	192
E.2.4	Temps CPU . . . . .	194
E.2.5	Étude de l'influence de l'algorithme de couplage . . . . .	194
E.2.6	Étude de l'influence du coefficient de masse ajoutée artificielle . . . . .	200
E.2.7	Étude de l'influence du gain sur le solveur de pression . . . . .	202
E.2.8	Étude de l'influence du pas de temps . . . . .	204
E.2.9	Évaluation dynamique de la masse ajoutée . . . . .	207
E.2.10	Conclusion . . . . .	210
E.3	Une frégate soumise à une houle de face . . . . .	211
E.3.1	Description . . . . .	213
E.3.2	Simulations de résistance à l'avancement en modèle libre . . . . .	215
E.3.3	Simulations de réponse à une houle incidente de face . . . . .	219

E.3.3.1	Description . . . . .	219
E.3.3.2	Paramètres des simulations . . . . .	220
E.3.3.3	Modèle fixe . . . . .	224
E.3.3.4	Modèle libre . . . . .	228
E.3.3.5	Résistance ajoutée sur houle de face . . . . .	235
E.3.4	Conclusion . . . . .	237
<b>E.4</b>	<b>Des parallélépipèdes de faible densité . . . . .</b>	<b>238</b>
E.4.1	Description . . . . .	239
E.4.2	Critère de convergence . . . . .	240
E.4.3	Masse ajoutée et opérateur de relaxation des accélérations . . . . .	240
E.4.4	Parallélépipède 1 . . . . .	245
E.4.5	Parallélépipèdes 2 . . . . .	255
E.4.6	Conclusion . . . . .	269
<b>E.5</b>	<b>Amortissement d'une frégate par ailerons actifs . . . . .</b>	<b>270</b>
E.5.1	Description . . . . .	270
E.5.2	Définition des repères . . . . .	271
E.5.3	Domaine de calcul et maillage . . . . .	272
E.5.4	Scénario et loi de pilotage des ailerons . . . . .	274
E.5.5	Différences par rapport aux essais expérimentaux . . . . .	275
E.5.6	Résultats et analyses . . . . .	276
E.5.7	Conclusion . . . . .	289
<b>E.6</b>	<b>Un navire amarré dans un canal . . . . .</b>	<b>290</b>
E.6.1	Description . . . . .	290
E.6.2	Caractéristiques des navires . . . . .	291
E.6.3	Domaine de simulation et degrés de liberté des navires . . . . .	291
E.6.4	Amarres et défenses . . . . .	293
E.6.5	Résultats . . . . .	295
E.6.6	Conclusion . . . . .	301
<b>E.7</b>	<b>Deux simulations avec des poutres flexibles . . . . .</b>	<b>302</b>
E.7.1	Une poutre encastrée au sein d'un écoulement . . . . .	302
E.7.1.1	Description . . . . .	302
E.7.1.2	Résultats . . . . .	303
E.7.1.3	Conclusion . . . . .	305
E.7.2	Un appendice flexible au sein d'un écoulement . . . . .	305
E.7.2.1	Description . . . . .	305
E.7.2.2	Résultats . . . . .	306
E.7.2.3	Conclusion . . . . .	309
<b>F</b>	<b>Conclusion générale et perspectives . . . . .</b>	<b>311</b>
<b>G</b>	<b>Annexes . . . . .</b>	<b>315</b>
	<b>Liste des figures . . . . .</b>	<b>412</b>
	<b>Liste des tableaux . . . . .</b>	<b>419</b>
	<b>Liste des algorithmes . . . . .</b>	<b>421</b>
	<b>Table des matières . . . . .</b>	<b>422</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>427</b>

# Bibliographie

- Abbad M.** : *Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, mars 2003. [2 citations p. 144 et 161].
- Airy G. B.** : *Tides and Waves*, volume 5. Encyclopedia Metropolitana, 1842. [1 citation p. 14].
- Alexandersson M.** : *A Study of Methods to Predict Added Resistance in Waves*. Mémoire de D.E.A., KTH Centre for Naval Architecture, Stockholm, janvier 2009. [1 citation p. 214].
- Althuser J. M.** et **Naegel P. A.** : *Les débuts du moteur diesel en France, nouveaux éléments historiques*. Connaissance de la Meuse, 89:2–7, 2008. [1 citation p. 6].
- Anagnostopoulos P.** et **Bearman P. W.** : *Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low reynolds numbers*. Journal of Fluids and Structures, 6(1):39–50, 1992. [2 citations p. 351 et 353].
- Anderson J. D.** : *A History of Aerodynamics : And Its Impact on Flying Machines*. Cambridge University Press, 1999. [2 citations p. 12 et 14].
- Archimède S.** : *De l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité*, a. [1 citation p. 2].
- Archimède S.** : *Traité des corps flottants*, b. [1 citation p. 2].
- Arribas F. P.** : *Some methods to obtain the added resistance of a ship advancing in waves*. Ocean Engineering, 34(7):946–955, 2007. [2 citations p. 214 et 215].
- Astorino M.**, **Chouly F.** et **Fernández M.** : *An added-mass free semi-implicit coupling scheme for fluid–structure interaction*. Comptes Rendus Mathématique, 347(1–2):99–104, 2009. [1 citation p. 159].
- Augustin-Normand P.** : *La genèse de l'hélice propulsive*, volume 17 de *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*. Persee, 1964. [1 citation p. 5].
- Badia S.** et **Codina R.** : *On some fluid-structure iterative algorithms using pressure segregation methods. Application to aeroelasticity*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 72:46–71, 2000. [1 citation p. 129].
- Badia S.**, **Nobile F.** et **Vergara C.** : *Fluid–structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions*. Journal of Computational Physics, 227(14):7027–7051, 2008. [1 citation p. 116].
- Badia S.**, **Nobile F.** et **Vergara C.** : *Robin-Robin preconditioned Krylov methods for fluid-structure interaction problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(33-36):2768–2784, 2009. [1 citation p. 116].
- Bahmani M.** et **Akbari M.** : *Response characteristics of a vortex-excited circular cylinder in laminar flow*. Journal of Mechanical Science and Technology, 25:125–133, 2011. [2 citations p. 350 et 352].
- Batchelor G. K.** : *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. [3 citations p. 141, 142, et 143].
- Bauchau O. A.** : *Flexible Multibody Dynamics*, volume 176 de *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer Netherlands, 2011. [6 citations p. 79, 88, 92, 93, 94, et 328].
- Bauchau O. A.** et **Choi J.-Y.** : *The Vector Parameterization of Motion*. Nonlinear Dynamics, 33(2):165–188, 2003. [2 citations p. 78 et 327].



- Bauchau O. A. et Laulusa A. :** *Review of Contemporary Approaches for Constraint Enforcement in Multibody Systems*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 3(1):1–10, 2008. [1 citation p. 93].
- Baumgarte J. :** *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1(1):1–16, 1972. [1 citation p. 93].
- Belanger F., Païdoussis M. P. et De Langre E. :** *Time-marching analysis of fluid-coupled systems with large added mass*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 33(4):752–757, avril 1995. [1 citation p. 159].
- Bernoulli D. :** *Hydrodynamica*. Dulsecker, 1738. [1 citation p. 12].
- Bernoulli J. :** *Hydraulique*. Dulsecker, 1742. [1 citation p. 12].
- BEXCO :** *BEXCO - Ultaline HMPE USD12*. [1 citation p. 293].
- Blasius P. R. H. :** *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 56:1–37, 1908. [1 citation p. 17].
- Blevins R. :** *Flow-induced vibration*, volume 1. Krieger, 1977. [3 citations p. 161, 350, et 353].
- Blevins R. :** *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Krieger, 2001. [5 citations p. 149, 150, 151, 152, et 303].
- Bonnin P. :** *Découverte de deux pirogues monoxyles mésolithiques entre Corbeil-Essones (Essone) et Meulun (Seine-Et-Marnes)*. Les derniers chasseurs-cueilleurs d'Europe occidentale, 1(1):305–311, octobre 1998. [1 citation p. 2].
- Boschi V., De Salvo R., P. M., Quaranta G. et Sannibale V. :** *Seismic Attenuation System Synthesis By Reduced Order Models From Multibody Analysis*. Dans *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2007)*, Milan, Italy, 2007. [1 citation p. 91].
- Bottasso C. L., Blockley R. et W. S. :** *Encyclopedia of Aerospace Engineering*, volume Computational Dynamics. Wiley-Blackwell, 2010. [3 citations p. 88, 93, et 94].
- Boudriot J. :** *La conception des vaisseaux royaux sous l'ancien régime*. Neptunia, 1(169):9–24, mars 1988. [1 citation p. 3].
- Bouguer F. P. :** *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements*. Jombert, 1740. [1 citation p. 3].
- Bourguet R. :** *Analyse physique et modélisation d'écoulements turbulents instationnaires compressibles autour de surfaces portantes par approches statistiques haute-fidélité et de dimension réduite dans le contexte de l'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2008. [1 citation p. 17].
- Boussinesq J. :** *Essai sur la théorie des eaux courantes*, volume 23. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut de France, 1877. [1 citation p. 16].
- Bovis A. :** *Hydrodynamique navale : le sous-marin*. Les presses de l'ENSTA, 2010. [1 citation p. 8].
- Brennen C. E. :** *A review of added mass and fluid inertial forces*. Rapport technique N62583-81-MR-554, Naval Civil Engineering Laboratory, Port Hueneme, California, 1982. [3 citations p. 141, 143, et 144].
- Brennen C. E. :** *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge University Press, 2008. [1 citation p. 144].
- Breuer M., Bernsdorf J., Ziser T. et Durst F. :** *Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods : lattice-Boltzmann and finite-volume*. International Journal of Heat and Fluid Flow, 21(2):186–196, novembre 2000. [3 citations p. 306, 358, et 359].
- Breuer M., De Nayer G., Münsch M., Gallinger T. et Wüchner R. :** *Fluid–structure interaction using a partitioned semi-implicit predictor–corrector coupling scheme for the application of large-eddy simulation*. Journal of Fluids and Structures, 29(0):107–130, 2012. [1 citation p. 159].

- Bungartz H.-J.** et **Schäfer M.** : *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 de *Modelling, Simulation, Optimisation*. Springer, 2006. [1 citation p. 116].
- Carlton J.** : *Marine propellers and propulsion*, volume 1. Elsevier Ltd, 2 édition, 2007. [1 citation p. 5].
- Carrica P. M., Huang J., Noack R., Kaushik D., Smith B.** et **Stern F.** : *Large-scale DES computations of the forward speed diffraction and pitch and heave problems for a surface combatant*. *Computers & Fluids*, 39(7):1095–1111, 2010. [1 citation p. 225].
- Carrica P. M., Wilson R. V.** et **Stern F.** : *Unsteady RANS simulation of the ship forward speed diffraction problem*. *Computers & Fluids*, 35(6):545–570, 2006. [2 citations p. 224 et 225].
- Cauchy A. L.** : *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique*, volume 8 de *Exercices de Mathématiques*. Gauthier-Villars et fils, 1828. [1 citation p. 14].
- Causin P., Gerbeau J.-F.** et **Nobile F.** : *Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(42-44):4506–4527, 2005. [4 citations p. 115, 124, 158, et 162].
- Cavagna L., A. F., P. M., M. M.** et **P. M.** : *Real-Time Aeroservoelastic Analysis of Wind-Turbines by Free Multibody Software*, volume *Computational Methods and Applications de 23*, chapitre *Multibody Dynamics*, pages 69–86. Springer, 2011. [1 citation p. 79].
- Cervera M., Codina R.** et **Galindo M.** : *On the computational efficiency and implementation of block-iterative algorithms for nonlinear coupled problems*. *Engineering Computations*, 13(6):4–30, 1996. [2 citations p. 116 et 124].
- Chassaing P.** : *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès, août 2000. [1 citation p. 36].
- Chéze G.** et **Yakoubsohn J.-C.** : *Invitation aux équations différentielles algébriques*. [1 citation p. 75].
- Choi S. K.** : *Note on the use of momentum interpolation method for unsteady flows*. *Numerical Heat Transfer*, 36:545–550, 1999. [1 citation p. 66].
- Couette M.** : *Étude sur le frottement des liquides*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris, mai 1890. [1 citation p. 17].
- Craik A. D. D.** : *The origins of water wave theory*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:1–28, 2004. [1 citation p. 14].
- Craveur J. C.** : *Modélisation par éléments finis*. Dunod, 3 édition, 2008. [2 citations p. 80 et 85].
- Cummins W. E.** : *The impulse response function and ship motions*. Rapport technique 1661, Department of the David Taylor Model Bassin, octobre 1962. [2 citations p. 18 et 145].
- D'Alembert J.** : *Traité de dynamique*. David, 1743. [1 citation p. 13].
- D'Alembert J.** : *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. David, 1744. [1 citation p. 13].
- D'Alembert J.** : *Réflexions sur la cause générale des vents*. A. Haude & J.C. Spener, 1747. [1 citation p. 13].
- D'Alembert J.** : *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. David, 1752. [2 citations p. 13 et 141].
- D'Alembert J.** : *Opusculs mathématiques*, volume 8. David, 1761-1780. [1 citation p. 13].
- D'Alembert J., de Caritat Condorcet J.-A.-N.** et **Bossut C.** : *Nouvelles expériences sur la résistance des fluides*. Chez Claude-Antoine Jombert, fils aîné, 1777. [1 citation p. 15].
- De Nayer G.** : *Interaction Fluide-Structure pour les corps élancés*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2008. [2 citations p. 302 et 303].

- De Nayer G., Breuer M. et Kalmbach A.** : *Fluid-structure interaction in turbulent flows : LES predictions and PIV measurements*. Dans *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, pages 10–14, Vienne, Autriche, septembre 2012. [1 citation p. 124].
- Degroote J., K.-J. B. et Vierendeels J.** : *Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid-structure interaction*. *Computers & Structures*, 87(11–12):793–801, 2009. [2 citations p. 116 et 127].
- Delaitre M.** : *Validation d'un code d'interaction fluide-structure*. Mémoire de D.E.A., ENSTA Bretagne, 2012. [3 citations p. 302, 303, et 305].
- Delhommeau G.** : *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique, juillet 1987. [6 citations p. 144, 145, 147, 148, 149, et 192].
- Deparis S., Discacciati M., Fourestey G. et Quarteroni G.** : *Fluid-structure algorithms based on Steklov-Poincaré operators*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41–43):5797–5812, 2006a. [3 citations p. 113, 114, et 115].
- Deparis S., Discacciati M. et Quarteroni A.** : *A domain decomposition framework for fluid-structure interaction problems*. Dans *Proceedings of the Third International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD3)*, pages 41–58, 2006b. [2 citations p. 115 et 127].
- Deparis S., Gerbeau J.-F. et Vasseur X.** : *A dynamic preconditioner for Newton-Krylov algorithms. Application to fluid-structure interaction*. Rapport technique, INRIA, 2004. [1 citation p. 127].
- Dettmer W. et Perić D.** : *A Fully Implicit Computational Strategy for Strongly Coupled Fluid–Solid Interaction*. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 14:205–247, 2007. [9 citations p. 116, 127, 305, 351, 353, 360, 365, 366, et 372].
- Dettmer W. et Perić D.** : *On the coupling between fluid flow and mesh motion in the modelling of fluid–structure interaction*. *Computational Mechanics*, 43:81–90, 2008. [3 citations p. 116, 127, et 305].
- Dolean V.** : *Algorithmes par décomposition de domaine et accélération multigrille pour le calcul d'écoulements compressibles*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, avril 2001. [1 citation p. 113].
- Du Buat P. L. G.** : *Principes d'hydraulique vérifiés par un grand nombre d'expériences*. Firmin Didot, 1779. [1 citation p. 13].
- Duhamel H.-L.** : *Éléments d'architecture navale*. Jombert, 1758. [1 citation p. 4].
- Dunne T. et Rannacher R.** : *Adaptive Finite Element Approximation of Fluid-Structure Interaction Based on an Eulerian Variational Formulation*. Dans Bungartz H.-J. et Schäfer M., éditeurs : *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, chapitre 6, pages 110–145. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006. [1 citation p. 116].
- Durand M.** : *Interaction fluide-structure souple et légère, applications aux voiliers*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2012. [2 citations p. 159 et 176].
- Etienne S., Pelletier D. et Garon A.** : *A monolithic formulation for unsteady Fluid-structure Interactions*. Dans *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2006. [1 citation p. 116].
- Euler L.** : *Principes généraux du mouvement des fluides*, volume 11. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1755. [1 citation p. 13].
- Farhat C., Zee van der K. G. et Geuzaine P.** : *Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17–18):1973–2001, mars 2006. [2 citations p. 122 et 123].
- Fernández M.** : *Coupling schemes for incompressible fluid-structure interaction : implicit, semi-implicit and explicit*. *SeMa Journal*, (55):59–108, juin 2011. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*. [1 citation p. 159].

- Fernández M., Gerbeau J.-F. et Grandmont C. :** *A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid.* Rapport technique RR-5700, INRIA, 2005. [1 citation p. 159].
- Fernández M., Gerbeau J.-F. et Grandmont C. :** *A projection algorithm for fluid–structure interaction problems with strong added-mass effect.* Comptes Rendus Mathématique, 342(4):279–284, 2006. [1 citation p. 159].
- Fernández M. Á. et Moubachir M. :** *A Newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling.* Rapport technique RR-5085, INRIA, 2004. [1 citation p. 127].
- Ferziger J. H. et Peric M. :** *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Springer, Berlin, 1999. [1 citation p. 41].
- Förster C., Wall W. et Ramm E. :** *Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(7):1278–1293, 2007. [4 citations p. 122, 158, 162, et 176].
- Fossen T. I. :** *Marine Control Systems. Guidance, Navigation, and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*, volume 1. Marine Cybernetics, 2002. [4 citations p. 167, 323, 326, et 332].
- Franke R., Rodi W. et Schönung B. :** *Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders.* Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 35(0):237–257, 1990. [2 citations p. 358 et 359].
- Froude W. :** *On some difficulties in the received view of fluid friction.* British Association Reports, 39:211–214, 1869. [1 citation p. 15].
- Froude W. :** *Experiments on the surface-friction experienced by a plane moving through water.* British Association Reports, 42:36–73, 1872. [1 citation p. 15].
- Froude W. :** *Admiralty on experiments for the determination of the frictional resistance of water on a surface under various conditions.* British Association Reports, 44:249–255, 1874. [1 citation p. 15].
- Hak GAD-EL M. :** *Stoke’s hypothesis for a newtonian, isotropic fluid.* Journal of Fluids Engineering, 117:3–5, 1995. [1 citation p. 32].
- Gallinger T. et Bletzinger K.-U. :** *Comparison of algorithms for strongly coupled partitioned fluid-structure interaction.* Dans *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2010)*, Portugal, Lisbonne, juin 2010. [2 citations p. 126 et 127].
- Gaskell P. H. et Lau A. K. C. :** *Curvature-compensated convective transport : SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm.* International Journal For Numerical Methods In Fluids, 8:617–641, 1988. [2 citations p. 55 et 58].
- Gerbeau J.-F. et Vidrascu M. :** *A Quasi-Newton Algorithm Based on a Reduced Model for Fluid-Structure Interaction Problems in Blood Flows.* European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 37(4):631–647, 2003. [2 citations p. 125 et 127].
- Gere J. :** *Mechanics of Materials.* Bill Stenquist, 6 édition, 2004. [1 citation p. 85].
- Ghiringhelli G., P. M. et Mantegazza P. :** *A Multy-Body Implementation of Finite Volumes C0 Beams.* The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 38(1):131–138, 2000. [1 citation p. 104].
- Ghiringhelli G. L., Masarati P., Mantegazza P. et Nixon M. W. :** *Multi-Body Analysis of a Tiltrotor Configuration.* Nonlinear Dynamics, 19(4):333–357, 1999. [1 citation p. 79].
- Gloria A. :** *Modélisation et méthodes numériques multiéchelles en élasticité non linéaire.* Thèse de doctorat, Ecole des Ponts ParisTech, juin 2007. [1 citation p. 113].
- Glück M., Breuer M., Durst F., Halfmann A. et Rank E. :** *Computation of fluid–structure interaction on lightweight structures.* Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 89:1351–1368, 2001. [1 citation p. 302].

- Gosselet P. et Rey C.** : *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 13(4):515–572, 2006. [2 citations p. 114 et 116].
- Gravelle M.** : *Quaternions and their Applications to Rotation in 3D Space*. mai 2006. [1 citation p. 323].
- Gui L., Longo J., Metcalf B., Shao J. et Stern F.** : *Forces, moment and wave pattern for surface combatant in regular head waves Part I. Measurement systems and uncertainty assessment*. Experiments in Fluids, 31(1):674–680, 2001. [1 citation p. 224].
- Gui L., Longo J., Metcalf B., Shao J. et Stern F.** : *Forces, moment and wave pattern for surface combatant in regular head waves Part II. Measurement results and discussions*. Experiments in Fluids, 32(1):27–36, 2002. [1 citation p. 224].
- Guilbaud A.** : *La science des écoulements*. Génies de la Science, 39, mai 2009. [1 citation p. 12].
- Guyon E., Hulin J.-P., Petit L. et Mitescu C.** : *Physical Hydrodynamics*. Oxford University Press, 2001. [3 citations p. 145, 148, et 149].
- Hagen G.** : *Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren*. Poggendorfs Annalen, pages 423–442, 1839. [1 citation p. 14].
- Hairer E.** : *Analyse Numérique*. Université de Genève - Section de mathématiques, octobre 2001. [1 citation p. 335].
- Heil M.** : *An efficient solver for the fully-coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193:1–23, 2004. [2 citations p. 116 et 127].
- Hermann G. M. et Jan S.** : *Partitioned strong coupling algorithms for fluid–structure interaction*. Computers & Structures, 81:805–812, 2003. [1 citation p. 305].
- Hoerner S. F.** : *Fluid-dynamic Drag - Practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance*, volume 2. Hoerner Fluid Dynamics, juin 1965. [1 citation p. 161].
- Hoffman J. et Johnson C.** : *Resolution of d'Alembert's Paradox*. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 12:321–334, 2010. [1 citation p. 141].
- Hou G., Wang J. et Layton A.** : *Numerical methods for fluid-structure interaction - A review*. Communications in Computational Physics, 12(2):337–377, 2012. [1 citation p. 20].
- Hübner B., Walhorn E. et Dinkler D.** : *A monolithic approach to fluid–structure interaction using space–time finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(23–26):2087–2104, 2004. [1 citation p. 116].
- Huré J.** : *Méthodes Numériques - Eléments d'un premier parcours*. DEA Astrophysique & Méthodes associées - Ecole doctorale d'Ile-de-France - Université Paris 7 et 11 - Observatoire de Paris, septembre 2002. [1 citation p. 335].
- Irvine J. M., Longo J. et Stern F.** : *Pitch and Heave Tests and Uncertainty Assessment for a Surface Combatant in Regular Head Waves*. Journal of Ship Research, 52:146–163, 2008. [3 citations p. 213, 219, et 228].
- Issa R. I.** : *Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting*. Journal of Computational Physics, 62:40–65, 1986. [1 citation p. 65].
- ITTC** : *Testing and Extrapolation Methods, Propulsion, Performance Propulsion Test*. Rapport technique 7.5-02-03-01.1, International Towing Tank Conference, 1957. [1 citation p. 215].
- ITTC** : *Testing and Extrapolation Methods, General Density and Viscosity of Water*. Rapport technique 7.5-02-01-03, International Towing Tank Conference, 1978. [2 citations p. 220 et 271].

- Jagers H. R. A.** : *Linking Data, Models and Tools : An overview. Dans International Congress on Environmental Modelling and Software Modelling for Environment's Sake*, Ottawa, Canada, 2010. [1 citation p. 21].
- Japhet C.** : *Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode Optimisée d'Orde 2*. Thèse de doctorat, Université Paris-Nord - Paris XIII, juillet 1998. [1 citation p. 113].
- Jasak H.** : *Interface Tracking Capabilities of the Inter-Gamma Differencing Scheme*. Rapport technique, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Février, 1995. [1 citation p. 59].
- Jasak H.** : *Error analysis and estimation for the Finite Volume method with applications to fluid flows*. Thèse de doctorat, University of London, 1996. [3 citations p. 47, 57, et 62].
- Jasak H., Weller H. G. et Gosman A. D.** : *High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes*. International Journal For Numerical Methods In Fluids, 31:431–449, 1999. [1 citation p. 55].
- Jürgens D.** : *Survey on Software Engineering for Scientific Applications : Reuseable Software, Grid Computing and Application*. Rapport technique, Université technique Carolo-Wilhelmina de Brunswick, 2009. [2 citations p. 117 et 118].
- Kalro V. et Tezduyar T. E.** : *A parallel 3D computational method for fluid–structure interactions in parachute systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(3–4):321–332, 2000. [1 citation p. 115].
- Kassiotis C.** : *Nonlinear fluid-structure interaction : a partitioned approach and its application through component technology*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, École Doctorale MODES, 2009. [10 citations p. 113, 117, 122, 123, 124, 125, 126, 129, 159, et 305].
- Kelvin L.** : *On ship waves*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1:409–433, 1887a. [1 citation p. 17].
- Kelvin L.** : *On the waves produced by a single impulse in water of any depth*. Proceedings of the Royal Society of London, 42:80–83, 1887b. [1 citation p. 17].
- Khosla P. K. et Rubin S. G.** : *A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme*. Computers & Fluids, 2(2):207–209, 1974. [1 citation p. 62].
- Korotkin A. I.** : *Added Masses of Ship Structures*, volume 88. Springer, 2009. [1 citation p. 144].
- Kundu P. K. et M. C. I.** : *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2 édition, 2002. [1 citation p. 143].
- Küttler U. et Wall W.** : *Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation*. Computational Mechanics, 43:61–72, 2008. [2 citations p. 124 et 126].
- Lamb H.** : *Hydrodynamics*. Dover publications, 6 édition, 1945. [1 citation p. 152].
- Landau L. D. et Lifshitz E. M.** : *Fluid Mechanics*, volume 6 de *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 1987. [1 citation p. 144].
- Launder B. E. et Sharma B. I.** : *Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc*. Letters in Heat and Mass Transfer, 1(2):131–137, novembre 1974. [1 citation p. 37].
- Laurens J. M.** : *Hélices marines*. Cours de l'ENSTA Bretagne, 2010. [1 citation p. 5].
- Leborgne G.** : *Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et Éléments finis*. Notes de cours de l'ISIMA, deuxième année, 2011. [1 citation p. 114].
- Legrand A.** : *Le traité des corps flottants d'Archimède. Traduction nouvelle*. Journal de Physique Théorique et Appliquée, 10(1):437–457, 1891. [1 citation p. 2].

- Leonard A. et Roshko A.** : *Aspects of flow-induced vibration*. Journal of Fluids and Structures, 15:415–425, 2001. [1 citation p. 145].
- Leonard B. P.** : *A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19(1):59–98, 1979. [1 citation p. 57].
- Leonard B. P.** : *Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities*. International Journal For Numerical Methods In Fluids, 8:1291–1318, 1988. [2 citations p. 53 et 55].
- Leroyer A.** : *Étude du couplage écoulement/mouvement pour des corps solides ou à déformation imposée par résolution des équations de Navier-Stokes. Contribution à la modélisation numérique de cavitation*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2004. [6 citations p. 40, 78, 128, 167, 192, et 323].
- Lévêque E.** : *Contributions à la description de l'agitation turbulente d'un fluide visqueux incompressible*. Laboratoire de physique de l'École normale supérieure de Lyon, décembre 2004. Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger des recherches. [1 citation p. 17].
- Lewis** : *The inertia of the water surrounding a vibrating ship*. Transactions Society of Naval Architects, pages 1–20, 37. [1 citation p. 150].
- Löhner R., Cebal J., Yang C., Baum J., Mestreau E. et Soto O.** : *Extending the Range and Applicability of the Loose Coupling Approach for FSI Simulations*. Dans Bungartz H.-J. et Schäfer M., éditeurs : *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 82–00. Springer Berlin Heidelberg, 2006. [1 citation p. 124].
- Longatte E., Verreman V. et Souli M.** : *Time marching for simulation of fluid–structure interaction problems*. Journal of Fluids and Structures, 25(1):95–111, 2009. [3 citations p. 122, 124, et 144].
- Longo J. et Stern** : *Uncertainty Assessment for Towing Tank Tests With Example for Surface Combatant DTMB Model 5415*. Journal of Ship Research, 49:55–68, 2005. [2 citations p. 215 et 220].
- Lorentzon J.** : *Fluid-Structure Interaction (FSI) case study of a cantilever using OpenFOAM and DEAL. II with application to VIV*. Thèse de doctorat, Lund University, 2009. [2 citations p. 126 et 159].
- MacTutor** : *The MacTutor History of Mathematics archive*, 2012. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html>, Visité en Août 2012. [1 citation p. 12].
- Masarati P.** : *Comprehensive Multibody AeroServoElastic Analysis of Integrated Rotorcraft Active Controls*. Thèse de doctorat, Dipartimento Di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico Di Milano, 1999. [8 citations p. 75, 83, 87, 90, 92, 94, 102, et 104].
- Masarati P.** : *MBDyn Theory and Developer's Manual*. Rapport technique, Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale Politecnico di Milano, 2013. [1 citation p. 94].
- Masarati P., Lanz M. et P. M.** : *Multistep Integration of Ordinary, Stiff and Differential-Algebraic Problems for Multibody Dynamics Applications*. XVI Congresso Nazionale AIDAA, 1:1–10, septembre 2001. [1 citation p. 339].
- Matthies H. G. et Steindorf J.** : *Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid–structure interaction*. Computers & Structures, 80(27–30):1991–1999, 2002. [1 citation p. 127].
- Maxima** : *Maxima, a Computer Algebra System*. <http://maxima.sourceforge.net/>, Visité en Mars 2012. [1 citation p. 329].
- MBDyn** : *MBDyn - Free MultiBody Dynamics Simulation Software*, novembre . [www.aero.polimi.it/mbdyn/](http://www.aero.polimi.it/mbdyn/), Visité en Novembre 2013. [1 citation p. 88].
- MBDyn** : *MBDyn Input File Format Version 1.5.1*. Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale Politecnico di Milano, 2012. [1 citation p. 105].

- Melot V.** : *Hydrodynamique instationnaire d'un cylindre sous choc*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, décembre 2006. [1 citation p. 161].
- Menter F. R.** : *Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 24:2906, 1993. [1 citation p. 37].
- Menter F. R.** : *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 32(8):1598–1605, août 1994. [1 citation p. 37].
- MeTiS** : *Family of Graph and Hypergraph Partitioning Software*. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>, Visité en Mars 2013. [1 citation p. 69].
- Michler C., Brummelen H. et Borst R.** : *An investigation of Interface-GMRES(R) for fluid–structure interaction problems with flutter and divergence*. Computational Mechanics, 47:17–29, 2011. [1 citation p. 127].
- Mitra S., Kumar A. et Sinhamahapatra K. P.** : *A fluid–solid finite element method for the analysis of reactor safety problems*. Annals of Nuclear Energy, 33(8):692–699, 2006. [1 citation p. 159].
- Molin B., Remy F., Le Hir E., Rippol T. et Scardigli S.** : *Étude expérimentale des vibrations induites par le détachement tourbillonnaire à grands nombres de Reynolds*. Dans *12<sup>ème</sup> Journées de l'hydrodynamique*, Nantes, octobre 2010. [1 citation p. 356].
- Monroy C.** : *Simulation numérique de l'interaction houle-structure en fluide visqueux par décomposition fonctionnelle*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2010. [1 citation p. 167].
- Morandini M. et Mantegazza P.** : *Using dense storage to solve small sparse linear systems*. ACM (Association for Computing Machinery) Transactions on Mathematical Software, 33:12, 2007. [1 citation p. 104].
- MPCCI** : *MpCCI – Multiphysics Interfaces*. <http://www.mpcci.de/mpcci-software.html>, Visité en Mai 2014. [1 citation p. 21].
- MPI** : *The Message Passing Interface (MPI) standard*. <http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpi/>, Visité en Mars 2013. [2 citations p. 21 et 69].
- Muzaferija S. et Peric M.** : *Nonlinear Water Wave Interaction*, chapitre Computation of free surface flows using interface-tracking and interface-capturing methods, pages 59–100. WIT Press, Southampton, 1999. [1 citation p. 61].
- Navier H.** : *Mémoire sur les lois de mouvement du fluide*. Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 6:389–440, 1823. [1 citation p. 14].
- Newton I.** : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londres, 1687. [1 citation p. 12].
- Ng K. C., Yusoff M. Z. et Ng E. Y. K.** : *Higher-order bounded differencing schemes for compressible and incompressible flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 53(1):57–80, 2007. [1 citation p. 58].
- NUMECA** : *User Manual - Fine<sup>TM</sup>/Marine v3 (including ISIS-CFD) - Flow Integrated Environment for Marine Hydrodynamics*. NUMECA International, Belgium, décembre 2012. v3.0b. [1 citation p. 69].
- OCIMF** : *Mooring Equipment Guidelines*, volume 1. Witherby, 2 édition, 1997. [1 citation p. 293].
- Iowa of T. U.** : *Highlights in the History of Hydraulics*, 1983. <http://www.lib.uiowa.edu/spec-coll/bai/hydraul.htm>, Visité en Août 2012. [1 citation p. 12].
- Olivieri A., Pistani F., Avanzini A., Stern F. et Penna R.** : *Towing Tank Experiments of Resistance, Sinkage and Trim, Boundary Layer, Wake, and Free Surface Flow Around a Naval Combatant Insean 2340 Model*. Rapport technique 421, IIHR, INSEAN, septembre 2001. [1 citation p. 215].
- Panton R. L.** : *incompressible Flow*. Wiley, 3 édition, 2005. [2 citations p. 141 et 142].



- Papadakis G.** : *A novel pressure-velocity formulation and solution method for fluid-structure interaction problems*. Journal of Computational Physics, 227(6):3383–3404, 2008. [1 citation p. 116].
- Paris E.** : *Traité de l'hélice propulsive*, volume 1. Bertrand, 1 édition, 1855. [1 citation p. 5].
- Park J., Kwon K. et Choi H.** : *Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160*. Journal of Mechanical Science and Technology, 12:1200–1205, 1998. [2 citations p. 350 et 352].
- Patankar S. V. et Spalding D. B.** : *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15(10):1787–1806, 1972. [2 citations p. 42 et 64].
- Pena G. et Prud'homme C.** : *Construction of a high order fluid–structure interaction solver*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(7):2358–2365, 2010. Fourth International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008). [1 citation p. 126].
- Piperno S., Farhat C. et Larrouiturou** : *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - Part I : model problem, theory and two-dimensional application*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 124:79–112, 1995. [1 citation p. 117].
- Piperno S. et Farhat C.** : *Design and Evaluation of Staggered Partitioned Procedures for Fluid-Structure Interaction Simulations*. Rapport technique RR-3241, INRIA, septembre 1997. [1 citation p. 123].
- Piperno S. et Farhat C.** : *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - Part II : energy transfer analysis and three-dimensional applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:3147–3170, 2001. [1 citation p. 122].
- Placzek A., Sigrist J.-F. et Hamdouni A.** : *Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number : Forced and free oscillations*. Computers & Fluids, 38:80–100, 2009. [3 citations p. 124, 350, et 352].
- Poiseuille J. L. M.** : *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, 9:433–544, 1846. [1 citation p. 14].
- Poisson S. D.** : *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, volume 13. Journal de l'École Polytechnique, 1829. [1 citation p. 14].
- Prandtl L.** : *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*. Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongress, Heidelberg, 1:599–601, 1904. [1 citation p. 17].
- Prandtl L.** : *Über die ausgebildete Turbulenz*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 5:136–139, 1925. [1 citation p. 17].
- Presles D. et Paulet D.** : *Architecture navale : Connaissance et pratique*, volume 1. Éd. de la Villette, 2 édition, 2005. [2 citations p. 2 et 6].
- Quaini A.** : *Algorithms for Fluid-Structure Interaction Problems Arising in Hemodynamics*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009. [1 citation p. 159].
- Queutey P. et Visonneau M.** : *An interface capturing method for free-surface hydrodynamic flows*. Computers & Fluids, 36(9):1481–1510, 2007. [1 citation p. 40].
- Rajaomazava III T., Benaouicha M. et J.-A. A.** : *Etude numérique de schémas de couplages en interaction fluide-structure*. Dans 20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Besançon, août 2001. [2 citations p. 128 et 129].
- Reech F.** : *Cours de Mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps, comprenant la statique et la dynamique avec la théorie des vitesses virtuelles, celle des forces vives et celle des forces de réaction, la théorie des mouvements relatifs et le théorème de Newton sur la similitude des mouvements*. J. Garay, 1852. [1 citation p. 15].

- Reynolds A.** : *An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water in Parallel Channels Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 174:935–982, 1883. [1 citation p. 16].
- Rhie C. M. et Chow W. L.** : *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 21:1525–1532, novembre 1983. [1 citation p. 66].
- Richardson L.** : *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922. [1 citation p. 17].
- Robertson I., Li L., Sherwin S. J. et Bearman P. W.** : *A numerical study of rotational and transverse galloping rectangular bodies*. Journal of Fluids and Structures, 17(5):681–699, 2003. [2 citations p. 365 et 366].
- Rossell H. E., Chapman L. B., Naval Architects of S. et (U.S.) M. E.** : *Principles of Naval Architecture*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1939. [1 citation p. 6].
- Rossell H. E., Chapman L. B., Naval Architects of S. et (U.S.) M. E.** : *Principles of Naval Architecture - Resistance, Propulsion and Vibration*, volume 2 de *Second Revision*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1988. [1 citation p. 15].
- Rossell H. E., Chapman L. B., Naval Architects of S. et (U.S.) M. E.** : *Principles of Naval Architecture - Motions in Waves and Controllability*, volume 2 de *Second Revision*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1989. [1 citation p. 214].
- Saint-Venant B.** : *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides*. Bachelier, 1843. [1 citation p. 14].
- Saksono P. H., Dettmer W. et Peric D.** : *An adaptive remeshing strategy for flows with moving boundaries and fluid–structure interaction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71:1009–1050, 2007. [1 citation p. 116].
- Sarpkaya T.** : *Added mass of lenses and parallel plates*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 86:141–152, 1960. [1 citation p. 151].
- Schmitt F. G.** : *About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis : historical remarks and a direct evaluation of its validity*. Comptes Rendus Mécanique, 335(9-10):617–627, 2007. [1 citation p. 16].
- Shabana A.** : *Computational Dynamics*. Wiley, 3 édition, 2010. [2 citations p. 88 et 330].
- Shepperd S. W.** : *Quaternion from Rotation Matrix*. Journal of Guidance and Control, 1(3):223–224, 1978. [1 citation p. 332].
- Sigrist J.-F.** : *Interaction fluide-structure. Analyse vibratoire par éléments finis*. Ellipses, 2011. [1 citation p. 176].
- Sigrist J.-F.** : *Calcul et modélisation en mécanique - Méthodes numériques de calculs couplés fluide/structure - Cas du fluide s'écoulant : introduction*, volume base documentaire : 42178210. Editions des Techniques de l'Ingénieur, 2014. [2 citations p. 20 et 117].
- Simman2008** : *US Navy Combatant, DTMB 5415*, juillet 2013. [http://www.simman2008.dk/5415/5415\\_geometry.htm](http://www.simman2008.dk/5415/5415_geometry.htm), Visité en Juillet 2013. [1 citation p. 213].
- Simpson T.** : *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*. T. Woodward, 1743. [1 citation p. 4].
- Sirehna** : *Étude de la tenue des navires au poste XXXXX. Analyse des phénomènes conduisant à la rupture d'amarres*. Rapport technique 2003-31-S\_R002-A, Sirehna, 2003. [1 citation p. 290].
- Söding H.** : *How to integrate free motions of solids in fluids. Dans 4th Numerical Towing Tank Symposium*, Hamburg, Germany, 2001. [4 citations p. 145, 147, 158, et 159].

- Soyibou S. et Cornel M. M.** : *A stable time advancing scheme for solving fluid–structure interaction problem at small structural displacements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(2):210–222, 2008. [1 citation p. 159].
- Soyibou S.** : *Algorithmes semi-implicites pour des problèmes d’interaction fluide structure : approches procédurales partagées et monolithiques*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace - Mulhouse, octobre 2009. [1 citation p. 159].
- Steger J. L., Dougherty F. C. et Benek J. A.** : *A Chimera Grid Scheme*, volume 5. Advances in Grid Generation, k.n. ghia and u. ghia édition, juin 1983. [1 citation p. 40].
- Steinbrecher A.** : *Numerical Solution of Quasi-Linear Differential-Algebraic Equations and Industrial Simulation of Multibody Systems*. Thèse de doctorat, Technische Universität Berlin, 2006. [1 citation p. 92].
- Steindorf J.** : *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*. Thèse de doctorat, Université technique Carolo-Wilhelmina de Brunswick, 2002. [1 citation p. 305].
- Stevens S.** : *Principes sur le poids de l’eau (De Beghinselen des Waterwichts)*. Leyden, 1586. [1 citation p. 13].
- Stokes G. G.** : *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8:287–319, 1845. [1 citation p. 14].
- Stokes G. G.** : *On the theory of oscillatory waves*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8:197–229, 1847. [1 citation p. 14].
- Stokes G. G.** : *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 9:8–106, 1851. [1 citation p. 14].
- Sutherland W.** : *L’assistant des constructeurs de navires, ou quelques essais complémentaires sur l’art de l’architecture navale*. Rotherfield, 1711. [1 citation p. 3].
- Taurines A.** : *Théorie de la vis d’Archimède et des autres surfaces tournantes propres à produire une impulsion suivant leur axe de rotation*. Annales Maritimes, 1842. [1 citation p. 5].
- Tezduyar S., T. and Sathe, Keddy R. et Stein K.** : *Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195:2002–2027, 2006a. [1 citation p. 127].
- Tezduyar T., Sathe S., Stein K. et Aureli L.** : *Modeling of Fluid-Structure Interactions with the Space-Time Techniques*. Dans Bungartz H.-J. et Schäfer M., éditeurs : *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 50–81. Springer Berlin Heidelberg, 2006b. [1 citation p. 124].
- Timoshenko S. P.** : *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, 41:744–746, 1921. [1 citation p. 85].
- Timoshenko S. P.** : *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*. Philosophical Magazine, 43:125–131, 1922. [1 citation p. 85].
- Timoshenko S. P. et Goodier J. N.** : *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, 1934. [1 citation p. 135].
- Tissandier G.** : *Frédéric Sauvage, à propos de l’inauguration de sa statue à Boulogne-sur-Mer*. La nature, revue des sciences et de leurs applications aux arts et industrie, 418:555–558, 1881. [1 citation p. 5].
- Trainelli L. et Croce A.** : *A Comprehensive View of Rotation Parameterization*. Dans *European Congress ECCOMAS 2004*, 2004. [1 citation p. 329].
- Uzunoglu B., M. T. et G. P. W.** : *Low-Reynolds-Number flow around an oscillating circular cylinder using a cell viscous boundary element method*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 50:2317–2338, 2001. [1 citation p. 144].

- Versteeg H. K. et Malalasekera W. :** *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. Longman Group Ltd., London, 1995. [1 citation p. 57].
- Vikestad K., Vandiver J. K. et Larsen C. M. :** *Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibrations and external disturbance*. Journal of Fluids and Structures, 14(7):1071–1088, 2000. [1 citation p. 144].
- Vila P. :** *Progrès de la marine*, juillet 2012. [http://www.oceaniedeslumieres.org/D\\_progres\\_marine.asp](http://www.oceaniedeslumieres.org/D_progres_marine.asp), Visité en Juillet 2012. [1 citation p. 2].
- Viollet P.-L., Chabard J.-P., Esposito P. et Laurence D. :** *Mécanique des fluides appliquée*. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 1998. [1 citation p. 12].
- Viot P. :** *Méthodes d'analyse numérique*. Laboratoire de Physique Théorique des Liquides - Paris, novembre 2010. [1 citation p. 335].
- Gerstner von F. J. :** *Abhandlung über die Theorie der Wellen*. Haase u. Widmann, 1802. [1 citation p. 14].
- Wackers J., Koren B., Raven H. C., Ploeg A., Starke A. R., Deng G. B., Queutey P., Visonneau M., Hino T. et Ohashi K. :** *Free-Surface Viscous Flow Solution Methods for Ship Hydrodynamics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 18:1–41, 2011. [3 citations p. 40, 59, et 62].
- Wakaba L. et Balachandar S. :** *On the added mass force at finite Reynolds and acceleration numbers*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 21(2):147–153, 2007. [2 citations p. 145 et 149].
- Wall W. et Ramm E. :** *Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method*. Dans Idelson S. R., Oñate E. et Dvorkin E. N., éditeurs : *Computational Mechanics*, volume New trends and applications, Barcelone, Espagne, 1998. [1 citation p. 305].
- Wall W. A., Förster C., Neumann M. et Ramm E. :** *Advances in fluid-structure interaction*. Dans *17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering*, Weimar, Allemagne, juillet 2006a. [2 citations p. 126 et 159].
- Wall W., Gerstenberger A., Garmnitzer P., Förster C. et Ramm E. :** *Large Deformation Fluid-Structure Interaction – Advances in ALE Methods and New Fixed Grid Approaches*. Dans Bungartz H.-J. et Schäfer M., éditeurs : *Fluid-Structure Interaction*, volume 53 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 195–232. Springer Berlin Heidelberg, 2006b. [1 citation p. 124].
- Weghs M. :** *Efficiency Improvement of Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Simulations. Combining Quasi-Newton and Multi-level Algorithms on Coupling Partitioned Solvers*. Thèse de doctorat, Delft university of Technology, 2010. [2 citations p. 126 et 127].
- Weil J. A. et Yger A. :** *Mathématiques L3 - Mathématiques appliquées*, volume 1. Person, août 2009. [2 citations p. 335 et 341].
- Wendel K. :** *Hydrodynamic masses and hydrodynamic moments of inertia*. Numéro 260. David Taylor Model Bassin Translation, 1956. [1 citation p. 150].
- White M., F. :** *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Higher Education, 4 édition, 1998. [1 citation p. 141].
- Wick T. :** *Fluid-structure interactions using different mesh motion techniques*. Computers & Structures, 89 (13–14):1456–1467, 2011. [2 citations p. 116 et 127].
- Wilcox D. C. :** *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*. The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal, 11:1299–1310, janvier 1988. [2 citations p. 37 et 38].
- Wilcox D. C. :** *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries Inc., seconde édition, 1993. [2 citations p. 36 et 37].
- Williamson C. H. K. :** *Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 206:579–627, 1989. [2 citations p. 350 et 352].

- Wüchner R., Kupzock A. et Bletzinger K.-U.** : *Simulation of fluid-structure interaction with free form membrane structures using an implicit coupling scheme with adaptive under relaxation*. Dans *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006*, 2006. [1 citation p. 126].
- Yoon H.** : *Phase-averaged stereo-piv flow field and force/moment/motion measurements for surface combatant in pmm maneuvers*. Mémoire de D.E.A., University of Iowa, 2009. [1 citation p. 213].
- Young Y. L.** : *Fluid-structure interaction analysis of flexible composite marine propellers*. *Journal of Fluids and Structures*, 24(6):799–818, 2008. [1 citation p. 159].
- Yu B., Tao W.-Q., Wei J.-J., Kawaguchi Y., Tagawa T. et Ozoe H.** : *Discussion on momentum interpolation method for collocated grids of incompressible flow*. *Numerical Heat Transfer*, 42:141–166, 2002. [1 citation p. 66].
- Yvin C.** : *Couplage fluide-structure partitionné avec une chaîne de calculs open-source*. Dans *12<sup>ème</sup> Journées de l'hydrodynamique*, Nantes, octobre 2010. [3 citations p. 125, 126, et 305].









# Thèse de Doctorat

Camille YVIN

**Interaction fluide-structure pour des configurations multi-corps. Applications aux liaisons complexes, lois de commande d'actionneur et systèmes souples dans le domaine maritime.**

**Fluid-structure interaction for multi-body systems. Applications to complex joints, control laws of actuators and flexible systems in the maritime field.**

## Résumé

Ce travail vise à développer un couplage entre deux solveurs généralistes pour étudier des systèmes mécaniques complexes en interaction forte avec un milieu fluide. La simulation collaborative offre la possibilité de modéliser finement et sans approximation notable le comportement du milieu fluide, la dynamique des systèmes mécaniques considérés et les couplages entre ces deux milieux. Les équations de Navier-Stokes exprimées en moyenne de Reynolds pour un écoulement incompressible, isotherme, turbulent et diphasique sont résolues par ISIS-CFD. La dynamique du système mécanique est résolue par MBDyn, solveur open-source d'analyse des systèmes multi-corps. Une formulation générale et formelle du problème couplé par le biais de la formulation de Steklov-Poincaré est réalisée. Un algorithme de couplage implicite, rapide et stable est proposé, testé et validé. La stabilisation de l'algorithme est obtenue par le biais d'un opérateur de relaxation dépendant des effets de masse ajoutée. Pour cela, une méthode d'évaluation des effets de masse ajoutée est implémentée au sein de ISIS-CFD. Du fait de la formulation volumes finis adoptée au sein de ce solveur, cette méthode est générale. Par exemple, elle permet de prendre en compte des géométries complexes ou la déformée de la surface libre. De plus, l'algorithme de couplage proposé ne requiert pas que des modifications soient apportées au sein de chacun des solveurs. Seule la mise en place d'interfaces est nécessaire. De plus, il est montré que le nombre total d'itérations pour atteindre un état convergé est du même ordre de grandeur lorsque le mouvement est résolu ou quand il est connu d'avance et imposé (configuration optimale). L'algorithme de couplage est validé sur les applications suivantes : étude de structures excitées par des lâchers tourbillonnaires, évaluation des fonctions de transfert d'une frégate soumise à une houle de face, calcul du mouvement de corps de faible densité en déséquilibre hydrostatique (effets de masse ajoutée importants et anisotropes), analyse de l'amortissement en roulis d'une frégate par des ailerons actifs (commande d'actionneurs) et simulation d'un navire amarré en faible profondeur perturbé par un navire passant à proximité (modélisation de ruptures d'amarres). Deux simulations mettant en jeu des corps flexibles de type poutre ont également été menées. La chaîne de calcul s'est montrée performante sur l'ensemble des applications citées ci-dessus. Par exemple, les fonctions de transfert de la frégate soumise à une houle de face sont très proches de celles évaluées lors d'essais expérimentaux et l'effet des ailerons de stabilisation sur l'amortissement en roulis d'une frégate est parfaitement capturé.

## Mots clés

**Interaction fluide-structure, simulation collaborative, effets de masse ajoutée, systèmes mécaniques complexes**

## Abstract

The aim of this work is to develop a coupling between two solvers in order to study complex mechanical systems which are in strong interaction with a fluid. The co-simulation provides the ability to carefully model without significant approximations the fluid physics, the dynamics of the mechanical systems and their coupling. The Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for incompressible, isothermal, turbulent and multiphase flows are solved by ISIS-CFD. The mechanical problem is solved by MBDyn which is an open-source solver dedicated to dynamic multi-body systems. A general and formal formulation of the coupling problem is realised using the Steklov-Poincaré formulation. An implicit, efficient and stable coupling algorithm is proposed, tested and validated. The algorithm stabilisation is achieved through a relaxation operator which depends on the added mass effects. Thus, a method to evaluate the added mass effects is implemented in ISIS-CFD. Due to the finite-volume formulation adopted in this solver, this method is general. For instance, complex geometries or the free surface deformation can be taken into account. Moreover, the proposed algorithm does not require any modifications to be made to both solvers. Only the implementation of interfaces is required. In addition, it is shown that the number of iterations to reach a converged state, is of the same order when the kinematics are solved or when the motion is known in advance and imposed (optimal configuration). The coupling algorithm is validated on the following cases: vortex induced motions of simple shapes, evaluation of the transfer functions of a frigate in regular head waves, computation of the motion of very low density bodies (strong anisotropic added mass effects), analysis of the roll decay of a frigate with active fins (control of actuators) and simulation of a moored ship in shallow water disturbed by a nearby ship (breaking of mooring lines). Two simulations with flexible beams are also presented. The framework is proven to be efficient for all the above cases. For instance, the computed transfer functions of a frigate in regular head waves are in good agreement with experimental data and the effect of the stabilizer fins on the roll decay of a frigate is perfectly captured.

## Key Words

**Fluid-structure interaction, co-simulation, added mass effect, complex mechanical systems**